BAC BLANC 11

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$

Partie I

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
2. Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1 - x$ possède une solution unique α dans $]\frac{1}{e}, 1[$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$

(a) Calculer $F_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; F_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$

(d) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,(\forall n \in \mathbb{N}^*) : F_n(x) \geqslant 0$

(e) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$

Partie II

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite

(c) Montrer que $\lim \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{2}$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[\\ v_{n+1} = 1 - f(v_n) \end{cases}$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{e} \leqslant v_n \leqslant 1$.

(b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |v_{n+1} - \alpha| \leqslant e^{-\frac{1}{e}} |v_n - \alpha|$, en déduire que (v_n) convergente et préciser sa limite.

Partie III

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f(x) = 1 - x^n$ possède une solution unique α_n dans $]\,0, 1[$.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, et déduire qu'elle est convergente .

3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \dfrac{-1}{n} < \ln(\alpha_n) < 0$, en déduire $\lim \alpha_n$.
4. Montrer que $\lim n(\alpha_n - 1) = -1$

Partie IV

On considère les fonctions g et F définies sur $\mathbb{R}^+$par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x)}{x}; x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)dt; x > 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) : 1 - \dfrac{x}{4} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$

   (b) Montrer que F est continue et dérivable à droite en 0 , et interpréter géométriquement le résultat .
3. (a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) : 0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 g(t)dt + \dfrac{\ln x}{x}$

   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ puis préciser la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.
4. (a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :
   $(\forall x > 0); F'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^x g(t)dt$

   (b) Montrer que $(\forall x > 0) : e^{-x}(x + 1) - 1 < 0$

   (c) Etudier les variation de h sur $]0, +\infty[$, en déduire que $(\forall x > 0); h(x) < 0$.
5. Dresser le tableau de variation de F puis construire sa courbe représentative.

Partie V

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1 + e^x)}dx$

   (a) Calculer w_0.

   (b) Montrer que la suite (w_n) est décroissante, en déduire qu'elle convergente .

   (c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); w_{n+1} + w_n = g(n)$, en déduire que $\lim w_n = 0$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k g(k)$.

   (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \geqslant 2) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1}e^x}{e^{nx}(1 + e^x)} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

   (b) Montrer que $(\forall n \geqslant 2) : S_n = (-1)^{n-1}w_n + \ln\left(\dfrac{e+1}{2e}\right)$, en déduire $\lim S_n$.

Exercice 2 :

Partie I :

On admet que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(\frac{e}{n}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}} = 1 \qquad (\star)$$

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Le but est de montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

1. (a) Montrer que $u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$

   (b) Déduire que $u_{2n+1} = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{4k(k+1)}\right) = \ln\left(\frac{(2n+1)!}{2^{3n}(n+1)(n!)^3}\right)$

   (c) En utilisant $(\star)$, montrer que $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

2. Exprimer u_{2n} en fonction de u_{2n+1}, puis déduire la limite de (u_{2n}).
3. À l'aide de la définition de la limite, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Partie II :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Établir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

   En déduire la limite de (S_n).

2. Établir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).

Partie III :

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2;\pi/2[$

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.
   (écrire x_n en fonction de x_n et $Arctan$)

Exercice 3 :

soit m $\in \mathbb{C} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathrm{E_m}) : z^2-(2\,\mathrm{m}+\mathrm{i})z+2\,\mathrm{m}^2-\mathrm{m}(1-\mathrm{i})=0$.

1. Montrer que le discriminant de l'équation $(\mathrm{E_m})$ est $\Delta=(\mathrm{i}(2\,\mathrm{m}-1))^2$.
2. (a) Déterminer z_1 et z_2.

   (b) Dans cette question on prend $\mathrm{m}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{2}}$ avec $\theta\in]\dfrac{\pi}{2},\pi[$.

   Donner la forme trigonométrique de z_1 et z_2

Partie II :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$

On considère les points $\mathrm{M}(\mathrm{m}),\mathrm{M}_1(z_1)$ et $\mathrm{M}_2(z_2)$

1. Montrer que $M_1M_2=2\left|m-\dfrac{1}{2}\right|$

   En déduire l'ensemble des points $M(m)$ tels que $M_1M_2=2$
2. Montrer que les points $\mathrm{M}(\mathrm{m}),\mathrm{M}_1(z_1)$ et $\mathrm{M}_2(z_2)$ sont alignés si et seulement si $\mathrm{m}\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
3. Soit f la transformation du plan d'expression complexe $z'=\mathrm{i}z+\mathrm{m}$.

   (a) Vérifier que $f(\mathrm{M})=\mathrm{M}_1$.

   (b) Montrer que f est une rotation dont on donnera son centre et une mesure de son angle.
4. Soit (Γ) le cercle de diamètre [AB] avec A(1) et $\mathrm{B}\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\right)$

   Montrer que si $\mathrm{m}\notin\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et $\mathrm{M}(\mathrm{m})\in(\Gamma)$ alors les points $\mathcal{O}$, $\mathrm{M}(\mathrm{m}),\mathrm{M}_1(z_1)$ et $\mathrm{M}_2(z_2)$ sont cocycliques.

Exercice 4 :

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4n-1$ lorsque n est un entier naturel.

Partie I : Quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}, 4^n\equiv 1[3]$
2. Prouver que $4^{28}-1$ est divisible par 29.
3. (a) Pour $1\leq n\leq 4$, déterminer le reste modulo 17 de 4^n

   (b) En déduire que $\forall k\in\mathbb{N}$, on a : $4^{4k}\equiv 0[17]$
4. Le nombre 4^n-1 est-il divisible par 17 pour tout entier naturel n ?
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28}-1$.

Partie II : Divisibilité par un nombre premier.

Soit p un nombre premier différent de 2 .

1. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1[p]$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $4^n \equiv 1[p]$, On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1[p]$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

(a) Montrer que : $4^r \equiv 1[p]$. En déduire que $r = 0$.

(b) Montrer que : $4^n - 1$ est divisible par $p \Leftrightarrow n \equiv 0[b]$.

(c) En déduire que b divise $p - 1$.

Exercice 5 :

On rappelle que : $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(M_n(\mathbb{R}), +, \times)$ deux anneaux.

On considère l'ensemble $E = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. Pour tout a et b de E on pose : $a * b = a + b - 3ab$

1. Montrer que * est une loi de composition interne dans E.
2. Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* a^{(n)} = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n \text{ fois}}$

Montrer que $a^{(n)} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(1 - 3a)^n$

4. Pour tout a de $\mathbb{R}$ on considère la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que : $M(a) \times M(b) = M(a * b)$

(b) On considère l'ensemble : $G = \{M(a)/a \in E\}$ et φ une application définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to G \\ a &\longrightarrow M(a) \end{aligned}$$

Montrer que φ est un morphisme bijectif de $(E, *)$ vers $(G, \times)$.

(c) Déduire la structure de $(G, \times)$, puis déterminer $M^{-1}(a)$ le symétrique de $M(a)$.

(d) Déterminer la matrice $M^n(a)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

$\mathcal{FIN}$