BAC BLANC 5

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\boxed{f(x) = x + \ln x.}$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$
2. (a) Dresser le tableau de variations de f.
   (b) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers un intervalle que l'on déterminera puis dresser le tableau de variations de f^{-1}.
3. Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis contruire les courbes représentatives de f et f^{-1}.
4. Calculer $\displaystyle\int_1^e f^{-1}(x)dx$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'équation : (E_n) : $x + \ln x = n$.
   (a) Montrer que (E_n) admet une solution unique x_n.
   (b) Déterminer la valeur de x_1 puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
6. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x_n) \leq f(n)$. Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq n - \ln n$.
   (c) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n - \ln n}$.
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq n - \ln(n - \ln n)$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - n)$.

Exercice 2 :

$\mathcal{I}$/ Soit g la fonction définie par :

$$\left| \begin{array}{l} g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \longmapsto g(x) = 1 + \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\exp\dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

1. Etudier la monotonie de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\mathcal{II}$/ Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ et $f(0) = 0$.

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0.

4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$$

5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+/-\infty$.
7. Construire $\mathcal{C}_f$.
8. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! \alpha_n > 0, f(\alpha_n) = n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n > n$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

$\mathcal{III}$/ On considère la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^{x^2} f(t)dt$$

1. (a) Montrer que $\forall x \geq 1, \exists c \in [1, x^2] : F(x) = (x^2-1)f(c)$.
   (b) Montrer que $\forall x \geq 1 (x^2-1)f(1) \leq F(x) \leq (x^2-1)f(x^2)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
2. Déterminer $F'(x)$ et dresser le tableau de variation de F.
3. Donner l'équation de la demi-tangente à $\mathcal{C}_F$ en 1.
4. Construire $\mathcal{C}_F$.

$\mathcal{IV}$/ Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{f(t)}{t^3} dt$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right) dt$.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis calculer sa limite.

$\mathcal{V}$/ On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$.
2. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. On pose $U_n = \frac{2^n}{n!} I_n$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq \dfrac{2e^2}{n+1}$.

(c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = U_n - \dfrac{2^n}{(n+1)!}$

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \dfrac{1}{2}\left(e^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{2^n}{k!}\right)$

(c) Déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{2^n}{k!}$

VI/

1. Montrer que $\forall x \geq 0 : e^x \geq 1 + x$.
2. Montrer que $\forall x \geq 0 : e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$
3. Montrer que $\forall x \geq 0 : e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

Exercice 3 :

I/ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que le nombre **premier** 173 divise $a^3 + b^3$.

1. Montrer que : $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$. (171=57×3)
2. Montrer que 173 divise a si et seulement si 173 divise b.
3. On suppose que 173 divise a. Montrer que 173 divise $a + b$.
4. On suppose que 173 ne divise pas a.
   (a) Montrer que $a^{172} \equiv -b^{172}[173]$.
   (b) Montrer que $a^{171}(a + b) \equiv 0[173]$.
   (c) Déduire que 173 divise $a + b$.

II/ On considère dans $\mathbb{N}^*2$ l'équation :

$$(E) : x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$$

Soit (x, y) une solution de (E),

1. Montrer que 173 divise $x + y$.
   On pose $x + y = 173k$.
2. Vérifier que $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$
3. Montrer que $k = 1$ puis résoudre (E).

III/ Pour $n > 1$ on note : $(\mathcal{R})$: $3^n - 2^n \equiv 0[n]$.

1. On suppose que n vérifie $(\mathcal{R})$ et soit p **le plus petit diviseur premier de** n.
   (a) Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$, en déduire que $p \geq 5$.
   (b) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$
   (c) Montrer que $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$
   (d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$: $a = q(p-1) + r$ avec $0 < p-1$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que : $rn = 1 + k(p-1)$.
2. En déduire que $(\mathcal{R})$ n'admet pas de solution.

IV/ Soient p, q deux entiers naturels non nuls premiers tels que :

$$p \leq q \text{ et } 10^{p+q-1} \equiv 1[pq].$$

1. (a) Montrer que $p \wedge 10 = 1$.
   (b) En déduire que : $10^{p-1} \equiv 1[p]$ et $10^q \equiv 1[p]$.
2. (a) Montrer que : $(p-1) \wedge q = 1$.
   (b) Prouver que : $p = 3$, puis en déduire que $10^{q+2} \equiv 1[q]$.
3. Décomposer $10^3 - 1$ en facteurs premiers, puis montrer que $q = 3$ ou $q = 37$.

Exercice 3 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $a^2 = b^2 + c^2$ et soit $\theta \in]0, 2\pi[$.

I/ On pose $p = a\cos\theta + bi\sin\theta$ et on considère l'équation : (E) : $z^2 - 2pz + c^2 = 0$

1. Vérifier que $p^2 - c^2 = (b\cos\theta + ia\sin\theta)^2$, et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1, z_2 les solutions de (E).
2. Soient $M_1(z_1), M_2(z_2), F(c)$ et $F'(-c)$ les points d'affixes respectivement $z_1, z_2, c, -c$.
   Montrer que $\dfrac{z_2 + c}{z_2 - c} = -\dfrac{z_1 + c}{z_1 - c}$ en déduire que les points sont alignés.

II/ Dans cette partie on considère les points $B(-a), C(a)$ et $D(b + ic)$ et A le symétrique de D par rapport à l'axe imaginaire.

1. Montrer que $z_A = -b + ic$.
2. Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre C et d'angle θ, on pose $A' = \mathcal{R}(A)$ et $B' = \mathcal{R}(B)$.
   Montrer que $z_{A'} = a(1 - e^{i\theta}) + (-b + ic)e^{i\theta}$ et $z_{B'} = a(1 - 2e^{i\theta})$
3. On note par I et J les mileix respectifs de $[A'D]$ et $[B'C]$.
   (a) Montrer que $\dfrac{z_I}{z_J} = \dfrac{a+b}{2a} + i\dfrac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.\dfrac{c}{2a}$.
   (b) Déduire que $O \in (IJ)$.

Exercice 5 :

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E = \{M(a,b) / a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
2. Calculer J^2 avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis déduire que E n'est pas stable par $\times$.
3. On définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi $*$ par :

$$A * B = A \times N \times B \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On considère l'application : $\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{C}^* & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ a + ib & \mapsto & M(a,b) \end{array}$

   (a) Montrer que Φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$.

   (b) Montrer que $\Phi(\mathbb{C}^*) = E^*$

   (c) Montrer que $(E^*, *)$ est un groupe.
4. Montrer que $*$ est distributive par rapport à $+$.
5. Montrer que $(E, +, *)$ est un corps commutatif.

$$* * * * \mathcal{FIN} * * * *$$