BAC BLANC 2

Consignes :

- L'épreuve dure 4 heures.
- L'exercice 1 se comporte sur l'analyse ;
- L'exercice 2 se comporte sur les nombres complexes ;
- L'exercice 3 se comporte sur l'arithmétique ;
- L'exercice 4 se comporte sur les structures algébriques.

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

L'utilisation de la couleur rouge n'est pas autorisée.

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur D_f par : $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$, $f(0) = 1$ et $f(1) = \sqrt{e}$.

Partie I

1. Montrer que $D_f = \mathbb{R}_+$.
2. Préciser les limites de f en 0,en1 et en $+\infty$.
3. En déduire la continuité de f en 0 et en 1.
4. (a) Indiquer l'allure de C_f au voisinage de 0.
   (b) Montrer que C_f admet une tangente de pente $\frac{\sqrt{e}}{2}$ au point $(1, f(1))$.
   (c) Montrer que $(\Delta) : y = x$ est une asymptote à C_f au voisnage de $+\infty$.
5. Étudier la dérivabilité de f sur $D_f \backslash \{0, 1\}$.
6. (a) Montrer que $\forall x \in D_f \backslash \{0, 1\}, f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^2-1)^2}.xf(x)$. où $g(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1$.
   (b) Dresser le tableau de variations de g et déduire son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Déduire les variations de f et tracer son tableau de variations.
7. Tracer C_f.

Partie II

On considère la fonction h définie sur $[1, +\infty[$ par : $h(x) = (x-1)\ln(f(x))$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution α sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que $3 < \alpha < 4$. On donne $3\ln(3) = -0.7$ et $4\ln(4) - 5 = 0.55$

   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \alpha + 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \alpha + 1$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
5. Montrer que $h([\alpha, +\infty[) \subset [\alpha, +\infty[$.
6. Montrer par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n - 5$.
7. (a) Trouver c tel que $c = 2c - 5$.
   (b) Montrer que $(v_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et préciser sa raison.
   (c) Trouver le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III

On considère la fontcion F définie sur $[e, +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_e^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\forall x \in [e, +\infty[, F(x) \geq \dfrac{x^2 - e^2}{2}$.
2. Déduire la nature de la branche infinie de C_F.
3. Montrer que F est dérivable sur $[e, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variations de F.
5. Tracer C_F.
6. Calculer $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{x^2 - 2\ln(x) - 1}{(x^2-1)^2}.xf(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie *IV*

On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définies par : $\forall n \geq 1, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1. Déterminer la monotonie de $(S_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que $\forall k \geq 2, \displaystyle\int_{k-1}^{k} ln(t)\,\mathrm{d}t \leq ln(k) \leq \int_k^{k+1} ln(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Déduire que $\forall n \geq 1, \displaystyle\int_1^n ln(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_1^n ln(t)\,\mathrm{d}t + ln(n)$.
4. Par une intégration par parties montrer que : $\forall n \geq 1, \displaystyle\int_1^n ln(t)\,\mathrm{d}t = nln(n) - n + 1$.
5. Déduire que $\forall n \geq 1, e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 2 :

$I-$

1. Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$.
2. Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z| - |z'| \leq |z + z'|$. (Remarquer que $|z| = |z + z' - z'|$).
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire 1 sous forme de combinaision linéaire de ces racines $n - imes$.
5. Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n = a^n$.
6. Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow arg(z) \equiv arg(z')[2\pi]$.

$II-$

On cosidère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2iz - (1 + a^2) = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$.

1. (a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. On note z_1,z_2 les solutions de (E).
   (b) Montrer que $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^*$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé on donne les points A, B, M et N d'affixes respectives $1, -1 + 2i, i + a$ et $i - a$.
   (a) Montrer que Met N sont symétriques par rapport à un point I que l'on précisèra.
   (b) Lorque M n'appartient pas à la droite (AB), donner la nature de $AMBN$.

3. On suppose que $a = e^{i\theta} - 2i$ où $\theta \in [0, 2\pi]$.
   (a) Montrer que M décrit un cercle fixe (C) que l'on précisera.
   (b) En déduire l'ensemble (C') des points N.

Exercice 3 :

Partie I

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante : $(E) : 13x - 337y = 1$.

1. Vérifier que $(26, 1)$ est une solution particulière de l'équation (E).
2. Résoudre (E).
3. Montrer que 337 est premier.

Partie II

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F) : x^{335} \equiv 13[2022]$.

1. Montrer que $(F) \Leftrightarrow x^{335} \equiv 13[337]$ et $x^{335} \equiv 1[6]$
2. Soit x une solution de (F).
   (a) Montrer que 337 et x sont premiers entre eux, en déduire que $x^{336} \equiv 1[337]$.
   (b) Montrer que $13x \equiv 1[337]$,en déduire que $x \equiv 26[337]$.
   (c) Montrer que 6 et x sont premiers entre eux, en déduire que $x^{334} \equiv 1[6]$.
   (d) En déduire que $x \equiv 1[6]$.
3. Montrer que $(F) \Leftrightarrow x \equiv 26[337]$et $x \equiv 1[6]$.
4. Donner l'ensemble de solutions de (F) sachant que -311 en est une solution.

Partie III

On considère dans $\mathbb{Q}$ l'équation $(\varepsilon) : x^3 - x^2 + x + 1 = 0$.

1. Soit $x \in \mathbb{Q}$ une solution de (ε). On pose $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}^*$ et $a \in \mathbb{N}^*$ et a et b premiers entre eux.
   (a) Montrer que b divise a.
   (b) Déduire que a est aussi solution de (ε).
   (c) Montrer que a divise 1.
2. Donner l'ensemble des solutions de (ε).

Exercice 4 :

Partie I

Soient a, b et c trois nombres réels. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible $\Leftrightarrow ab \neq 0$ et que dans ce cas $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{ab} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.
3. On pose $B = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.
   Montrer que B est inversible $\Leftrightarrow abc \neq 0$ et donner son inverse dans ce cas.
4. On suppose que $a = b = c = 0$. Calculer B^3.

Partie II

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

1. En utilisant la première partie calculer B^3.
2. Déduire la valeur de A^3.

$* * * * * \mathcal{FIN} * * * **$