BAC BLANC 8

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction P_n définie sur $[0,+\infty[$:
$P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k x^k}{k}$.

Première partie :

1) Montrer que $(\forall x \geqslant 0) P_n'(x)=\dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$

2) Étudier les variations de P_n et dresser le tableau de variation

3) Montrer que $P_n(1)<0$

4) a) vérifier que $P_{n+1}(x)=P_n(x)+x^{2n+1}\left(\dfrac{x}{2n+2}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ P_n(2) \geqslant 0$

5) Montrer que l'équation $P_n(x)=0$ admet dans $[1,+\infty[$ une solution x_n et $1<x_n \leqslant 2$

Deuxième partie :

1. Montrer que $(\forall x \geqslant 0) P_n(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt$

2. Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt=\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1} dt$

3. Montrer que $(\forall t \geqslant 1) t^{2n}-1 \geqslant n\left(t^2-1\right)$

4. a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt \geqslant \frac{n}{2}\left(x_n-1\right)^2$

b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leqslant x_n-1 \leqslant \sqrt{\dfrac{2 \ln 2}{n}}$ et calculer $\displaystyle\lim_{n \rightarrow+\infty} x_n$

Troisième partie :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{-\dfrac{1}{x}} \text{ si } x>0 \\ f(x)=\dfrac{x}{1+x}+\ln(x+1) \text{ si } -1<x \leq 0\end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $D_f=]-1 ;+\infty[$.
2. Étudier les branches infinies de (C_f).
3. Étudier la continuité de f en 0.

4. Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement vos résultats.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer (C_f)

Soit α un nombre réel tel que $\alpha \in]-1;0[$.

7. Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha}^{0} \ln(x+1)dx = -\alpha\ln(\alpha+1)+\alpha-\ln(\alpha+1)$
8. En déduire l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$.
9. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} A(\alpha)$

Exercice 2 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{g}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$. On désigne par C la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$.

1. (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{3}{2}}}$.

   (b) Dresser le tableau de variation de g.
2. (a) Dresser le tableau de variation de g'.

   (b) En déduire que pour tout réel $x, 0 \leqslant g'(x) \leqslant \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

   (c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha \in]0.9,1[$.
3. Construire C.
4. (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

   (b) Montrer que pour tout x de $]0,1[, g^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$.

   (c) Tracer dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe C' de g^{-1}.

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

Soit $(E) : z^2-(2-\sqrt{3}+i)mz+2(i-\sqrt{3})m^2=0 \quad ; \quad m\in\mathbb{C}^* \quad ; \quad z\in\mathbb{C}$

1. (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=(2+\sqrt{3}-i)^2m^2$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

   Soient $z_1;z_2$ les solutions de (E)

(c) Écrire le nombre complexe $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ sous la forme exponentielle.

2. Soit F l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} F : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z') \\ z' &= e^{\left(\frac{5i\pi}{6}\right)} z \end{aligned}$$

(a) Déterminer la nature et les caractéristiques de l'application F.
(b) Déterminer l'image du cercle.
(c) de centre $\Omega(1+i)$ et de rayon 2 .

3. On considère la suite de points $(M_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} M_{n+1} = F(M_n)\,; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{aff}(M_0) = i = z_0 \end{cases}$$

(a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)}$
(b) Montrer que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad ; \quad M_n = M_p \Leftrightarrow n \equiv p[12]$
(c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (F) suivante : $(F) : 12x - 5y = 3$
(d) En déduire les valeurs de n pour lesquels on ait $M_n \in$ (l'axe réel)

4. Soit le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 0[12] \\ x \equiv 3[5] \end{cases}$ et soit (k_0, l_0) une solution de (F)

(a) Montrer que le nombre $x_0 = 12k_0 = 5l_0 + 3$ est une solution de (S)
(b) Montrer que : $x = \text{solution}(S) \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv x_0[60]$
(c) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ le système (S).

5. Déterminer l'ensemble $R_n = \{n \in \mathbb{N}; M_n = M_0 \quad ; \quad n \equiv 3[5]\}$

Exercice 4 :

Partie I

p est un nombre premier tel que : $p \geqslant 7$ On pose : $N = p^4 - 1$

1. (a) Montrer que : $p^4 \equiv 1[3]$
(b) En remarquant que p est un nombre impair, Montrer que : $p^4 \equiv 1[16]$

2. En déduire que le nombre 240 divise N

3. Existe-t-il des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que L'entier naturel $n = (p_1)^4 + (p_2)^4 + \cdots + (p_{15})^4$ soit un nombre premier.

Partie II

p et q sont deux nombres premier positifs tels que : $p \neq q$

1. Montrer que : $p^{q-1} \equiv 1[q]$ et $q^{p-1} \equiv 1[p]$
2. Montrer que : $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1[pq]$
3. En déduire que l'équation (E) : $\left(p^{q-1} + q^{p-1}\right) x + pqy = x + 1$ n'a pas de solutions Dans $\mathbb{Z}$
4. Soit $a \in \mathbb{Z}^*$ tel que : $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$
   (a) Montrer que : $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[pq]$
   (b) En déduire que : 4331 divise $27^{4200} - 1$

Exercice 5 :

Partie 1 :

Soit $M = \left\{ A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$

1. Montrer M est un ensemble non vide.
2. Montrer que M est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.
3. Déterminer l'élément neutre de la loi $\times$ dans M.
4. La loi $\times$ est-elle commutative sur l'ensemble M ?
5. Calculer $(A_m)^n ; \forall m, n \in \mathbb{R}$, en déduire $(A_2)^3$.

Partie 2 :

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad ; \quad a^2 + b^2 = 1 \quad ; \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. (a) Vérifier que : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ; M(a,b) \times M(c,d) = M(ac - bd, ad + bc)$
   (b) Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$
2. Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$, Rappelant que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif.
   On considère l'application f définie ainsi :

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{U}, \times) &\to (E, \times) \\ x + iy &\mapsto M(x,y) \end{aligned}$$

   (a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{U}, \times)$ vers $(E, \times)$.
   (b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.
3. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \quad A^{n+1} = A^n \times A \quad ; \quad A^1 = A \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix}$

   Écrire A^n en fonction de n.
4. Résoudre dans E l'équation $X^4 = A$.