Limites et continuité

1 Limites

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

1.1 Définition 1

On dit que f admet une limite ℓ en a ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Si I est un voisinage de $+\infty$: on dit que f admet une limite ℓ en $+\infty$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x > \alpha, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Si I est un voisinage de $-\infty$: on dit que f admet une limite ℓ en $-\infty$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x < -\alpha, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

1.2 Définition 2

Soit $b \in \mathbb{R}$ On dit que f tend vers $+\infty$ en a ssi :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x-b| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

De même on dit que f tend vers $-\infty$ en b ssi :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x-b| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$$

1.3 Opérations

Soient f et $g : I \longmapsto \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$ $\left(l, l' \in \overline{\mathbb{R}}\right)$

(i). Si $l + l'$ est bien définie, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + l'$

(ii). Si ll' est bien définie, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ll'$

(iii). Si $\dfrac{l}{l'}$ est bien définie, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l}{l'}$

(iv). Si $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$, alors $l \leqslant l'$.

1.4 Calcul pratique

1.4.1 Fractions rationnelles

Soient $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ deux fcts polynômes. Alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n}{a_m x^m}$$

1.4.2 Racines de polynômes

On reprend les 2 polynômes précédents, et on suppose que $a_n, b_m > 0$ (comme ça ils tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ et donc positifs en $+\infty$). On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{P(x)}+\sqrt{Q(x)}=+\infty$.

Maintenant calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}$

$\rightarrow$ Si $n\neq m$, on factorise par le plus grand degré et on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}=\infty$

$\rightarrow$ Si $n=m$, on écrit : $\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}=\dfrac{P(x)-Q(x)}{\sqrt{P(x)}+\sqrt{Q(x)}}$ puis on compare les degrés du numérateur et du dénominateur.

1.4.3 Fonctions trigonométriques

$\star$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(x)}{x}=1$

$\star$ Si on est dans un point autre que 0, et qu'on a une forme indéterminée, il faut utiliser les formules trigonométriques suivantes :

$\cos(-x)=\cos x$	$\sin(-x)=-\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
$\cos(\pi-x)=-\cos x$	$\sin(\pi-x)=\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
$\cos(\pi+x)=-\cos x$	$\sin(\pi+x)=-\sin x$		

Ou plus généralement :

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$	$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$	$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

De plus par 2π-périodicité on peut toujours se ramener à $[0,2\pi]$ ou $[-\pi,\pi]$.

2 Continuité

2.1 Définition 1

On dit que f est *continue* en a ssi : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
On dit que f est continue à droite en a ssi : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
On dit que f est continue à gauche en a ssi : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

2.2 Définition 2

On dit que f est continue sur $]a, b[$ ssi elle l'est en tout point de $]a, b[$.
On dit que f est continue sur $[a, b[$ ssi elle l'est en tout point de $]a, b[$ et à droite en a.
On dit que f est continue sur $]a, b]$ ssi elle l'est en tout point de $]a, b]$ et à gauche en b.
On dit que f est continue sur $[a, b]$ ssi elle l'est en tout point de $[a, b]$, à droite en a et à gauche en b.

Remarque : f est continue sur $[a, b]$ ssi son graphe sur $[a, b]$ "peut se tracer sans lever le crayon", c-à-d qu'il est un seul morceau.

2.3 Opérations

Soient f, g continues sur I. Alors :
$*$ $f + g$ et $f.g$ sont continues sur I.
$*$ Si de plus $\forall x \in I : g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to G$ continues. Alors $g \circ f$ est continue sur I.

2.4 Fonctions usuelles

Fonction	DC_f
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$
Polynômes	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+{}^*$ et $\mathbb{R}_-{}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+{}^*$ et $\mathbb{R}_-{}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

avec DC_f le domaine de continuité.

2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

1ère version : Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \longmapsto \mathbb{R}$ continue et $a, b \in I$ tel que $a < b$.
si $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

2ème version : Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une application continue . Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$
cad $\forall a, b \in I, \forall y \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))], \exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

2.6 Théorème de la bijection

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :
(i) $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto J$ est bijective
(ii) $f^{-1} : J \longmapsto I$ est continue sur J et strictement monotone et elle garde la même monotonie de f

2.7 La fonction arctan

On tan : $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective, on note alors arctan : $\mathbb{R} \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sa fonction réciproque. Elle vérifie :

(i). $\arctan(x) = -\arctan(-x)$
(ii). $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} = -\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x)$
(iii). arctan dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc elle est croissante.
(iv). $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
(v). $\frac{-\pi}{2} < \arctan < \frac{\pi}{2}$.
(vi). $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.