BAC BLANC 9

Exercice 1 :

Partie I :

Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, on note :

$$f^{(0)} = f \text{ et } f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$

   On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que : $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}.$
3. On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. On pose $u_n = \frac{|x|^n}{n}$ pour $n \geqslant |x| + 1$.
   (a) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1}$, en déduire la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant|x|+1}$.
   (b) Conclure.
4. Montrer que :

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et que : } \ln(x+1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}, \text{pour } -1 < x < 1.$$

5. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \forall n \geqslant 0 : e^x \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Partie II :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2.
2. Montrer que (u_n) est une suite croissante.
3. Montrer que $u_n \to 1$.
4. Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

5. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x=0$$
(On pourra effectuer le changement de variable : $t=x^n$ et utiliser le fait que $\ln(1+t)\leqslant t$).

6. Déduire la limite de $\left(\dfrac{n(u_n-1)}{\ln 2}\right)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 2 :

Partie I :

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1,+\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{\dfrac{\ln(x+1)}{x}} \quad ; \quad x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ f(-1)=1 \quad ; \quad f(0)=e \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$ cm.

(a) Montrer que : $\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[\quad ; \quad f(x)=\exp\left(\dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}\right)$.

(b) Étudier la continuité de la fonction f en zéro et à droite en -1.

2. (a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(b) Montrer que : $\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[; f(x)-x=x\left(e^{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}-1\right)+e^{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}$.

En déduire la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3. Calculer puis interpréter la limite : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right)$

4. (a) Montrer que : $\forall x\geqslant\dfrac{-1}{2}; \displaystyle\int_0^x\left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$.

(b) Montrer que : $\forall t\in\left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right[; \quad \dfrac{t^2}{1+t}\leqslant 2t^2$

(c) Montrer que : $\forall x\in\left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right[; \quad \left|\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt\right|\leqslant\frac{2}{3}|x|^3$

(d) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)=\dfrac{-1}{2}$

En déduire que la fonction f est dérivable en zéro et que $f'(0) = \dfrac{e}{2}$.

5. (a) Étudier la monotonie de g définie ainsi : $g(x) = x - \ln(1+x)$.
   Puis En déduire que : $\forall x > -1; g(x) \geq 0$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[; f'(x) = \dfrac{(x+1)g(x)}{x^2}.e^{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}$.
   (c) En déduire le sens de variations de la fonction f.
6. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie II :

Soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ ainsi : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$.

1. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+; f(x) \geqslant x$.
   (b) En déduire que : $\forall x \geqslant 0; F(x) \geqslant \dfrac{x}{2}$.
   Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
2. (a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[; F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   (b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   Puis montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[, F'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - F(x))$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [0,+\infty[; \quad e \leqslant F(x) \leqslant f(x)$.
   (d) En déduire que F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie III :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{t}{n}\right)dt$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   (b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; u_n \geqslant e$.
2. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = n\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt$.
   (b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad : \quad u_n \leqslant f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   (c) Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 :

1. Montrer que le nombre 251 est un nombre premier qui divise 2008
2. Soit l'équation $(E) : 2008x + 120y = 8 \quad ; \quad (x,y) \in \mathbb{Z}^2$
   (a) Montrer que l'équation (E) est solvable dans $\mathbb{Z}^2$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \underbrace{888\cdots 88}_{n \text{ fois } 8}$

(a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad u_n = \frac{8}{9}(10^n - 1)$

(b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \,; u_n \equiv 0[2008] \quad \Leftrightarrow \quad 10^n \equiv 1[251]$

(c) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}); \quad 10^k \equiv 1[251]$

(d) En déduire que 2008 admet un multiple sous la forme $888\cdots 8$

Exercice 4 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit l'équation (E) : $\frac{1}{2}z^3 - (1+i)z^2 + 2(1+i)z - 4i = 0; z \in \mathbb{C}$

1. (a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. On considère les points : $A(1+i\sqrt{3}); B(1-i\sqrt{3}); C(2i)$

(a) Montrer que : $OA = OB$

(b) Soit $D =$ milieu $[AC]$, Déterminer : $aff(D)$ et arg $\left(\overline{\vec{u}, \overrightarrow{OD}}\right)$

(c) En déduire les valeurs de cos $\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et sin $\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3. Soient : $\mathcal{R}_1 =$ rotation $\left(A, \frac{-\pi}{2}\right)$; $\mathcal{R}_2 =$ rotation $\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$

Soient : $\mathcal{R}_1(\mathcal{O}) = \mathcal{O}'$ et $\mathcal{R}_2(B) = B'$

(a) Déterminer les affixes des points $\mathcal{O}'$ et B'.

(b) Soit $I =$ milieu $[OB]$,

Montrer que (AI) est une hauteur de $AO'B'$.

Exercice 5 :

On rappel que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

2. On pose : $I = M(1,0)$ et $J = M(0,1)$.

Montrer que (I, J) est une base de $(E, +, \cdot)$, puis en déduire $\dim(E)$.

3. Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$, $J^k = (-3)^k \cdot I$, puis en déduire les coordonnées de la matrice

$S_n = I + J + J^2 + \ldots + J^{2n}$ dans la base (I, J) où $n \in \mathbb{N}^*$.

4. (a) Montrer que :

$$\left(\forall (a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4\right), M(a, b) \times M(x, y) = M(ax - 3ay, ay + bx).$$

(b) En déduire E que est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

5. (a) Montrer que $(1, i\sqrt{3})$ une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

(b) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(a + ib\sqrt{3}) = M(a, b)$.

Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$ vers $(E, \times)$, puis en déduire la structure de $(E^*, \times)$ ou $E^* = E - \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

6. Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

7. On considère la matrice $A = \dfrac{1}{2} \cdot (I + J)$.

Déterminer tous le entiers naturels p tel que : $A^p = I$.