Série 1

On note $E(x)$ la partie entière de x, l'unique entier tel que : $x-1 < E(x) \leqslant x$ ou encore $E(x) \leqslant x < E(x)+1$.

Exercice 1 :

Calculer les limites en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes si elles existent.

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}, \frac{E(x)}{x}, xE\left(\frac{1}{x}\right), x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 2 :

Soit $a, b > 0$. Donner la limite en 0 des expressions suivantes :

$$\frac{\tan(ax)}{\tan(bx)}, (1+ax)^{\frac{b}{x}}, \sqrt{a+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}$$

Exercice 3 :

Calculer les limites des fonctions définies par les expressions en ci-dessous en a :

$$\frac{\cos(\pi x)}{2x^2+x-1}\left(a=\frac{1}{2}\right), \frac{\sin(4\pi x)}{\tan(\pi x)}\left(a=\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2+\cos x}-\sqrt{3}}{x^2}; x \neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $x_0=0$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); |f(x)| \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}$;

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2};+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin x\cdot\cos x}; x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[\\ f(x)=\dfrac{3\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}; x \in [0;+\infty[\end{cases}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to \frac{-\pi}{2}^+} f(x)$
2. Étudier la continuité de la fonction f au point $x_0=0$

Exercice 6 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=2x+\dfrac{x^2-5x+6}{|x^2-9|-|x-3|}$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité au point $x_0 = 3$?

Exercice 7 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\cos(4x)}$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f

2. (a) Soit h un élément de l'ensemble $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[- \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$;

Montrer que : $f\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right) = \dfrac{2\tan^2 h}{(1-\tan h)^2 \cdot \sin^2(2h)}$

(b) Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 8 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$par : $f(x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{1+\dfrac{\sin x}{2}}}{x}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 9 :

1. Montrer que l'équation : $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

2. Montrer que l'équation : $\sin x = 1 - x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{6}\right[$.

3. Montrer que la courbe de la fonction f telle que : $f(x) = x^5 + 3x^3 + 4x - 5$ coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse a tel que $0 < a < 1$.

Exercice

Soit $f : [0;\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x$$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

Exercice 10 :

Soit λ et $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que : $f(0) \neq f(1)$.

Montrer que : $\exists \quad x_0 \in]0;1[, \quad \lambda f(0) + \gamma f(1) = (\lambda+\gamma) f(x_0)$

Exercice 11 :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)| \neq 0.$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 12 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.

Exercice 13 :

Calculer :

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+2\sin x}{2\tan 3x-x}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x-\sin 2x}{x+\tan 3x}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x+\cos 3x-2}{x^2}$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2\cos x}{x^2+1}$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3\sin x}{2\cos 3x-5x}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

Un résultat à connaître : *Toute suite réelle monotone bornée est convergente (a une limite finie). De plus, toute suite monotone admet une limite.*

Exercice 14 : (*classique*)
On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0,1[$.
2. Montrer que, pour tout $n > 0$, $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$
   En déduire que (x_n) est strictement croissante.
3. Montrer que (x_n) converge vers une limite ℓ et que $0 < \ell \leqslant 1$.
4. Montrer que $\forall n > 0, x_n \leqslant \ell$.
5. Montrer par l'absurde que $\ell = 1$.

Exercice 15 :
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.
1. Étudier la fonction f_n.
2. Montrer que pour tout $n > 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n.
3. Montrer que $\forall n > 0, 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Exercice 16 :
On considère pour $n > 0$ la fonction : $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$.
1. Montrer que f_n admet un unique zéro x_n dans $\mathbb{R}_+^*$, et que $x_n \leqslant 1$.
2. Montrer que $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_n(x_n)$.
   Déduire que (x_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Montrer que $\ell = 1$.

Exercice 17 :
Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.
1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$, notée x_n.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$ et montrer sa convergence.
3. Justifier que : $\forall n \geq 2, 0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
4. Déterminer la limite de (x_n^n). Déduire la limite de (nx_n).

Exercice 18 :
On considère, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + nx + n$.
1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
4. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

5. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n(u_n+1)=1$ et que $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(u_n+1-\frac{1}{n}\right)=-3$.

Exercice 19 :
1. Montrer que l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left]n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, qu'on notera u_n (on supposera $n\in\mathbb{N}$ pour la suite).
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Montrer que $\arctan(u_n)=u_n-n\pi$, déduire la limite de $(u_n-n\pi)$.
4. Trouver la limite de $\left(n\left(u_n-n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Exercice 20 :
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
Montrer que f admet une racine sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$.
Montrer que f est continue en $a \Leftrightarrow \forall (x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ si $\lim_{n\to+\infty} x_n=a$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f(a)$.

Exercice 22 :
Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction P_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $P_n(x)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k x^k}{k}$

1- Montrer que $(\forall x\geqslant 0) P_n'(x)=\frac{x^{2n}-1}{x+1}$
2- Étudier les variations de P_n et dresser le tableau de variation
3- Montrer que $P_n(1)<0$
4- (a) Vérifier que $P_{n+1}(x)=P_n(x)+x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}\right)$
(b) Déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\, P_n(2)\geqslant 0$.
5- Montrer que l'équation $P_n(x)=0$ admet dans $[1,+\infty[$ une solution x_n et $1<x_n\leqslant 2$.

Exercice 23 :
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P_n par : $\forall x\in\mathbb{R}, P_n(x)=-1+\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $P_n(x)=0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$, et que $0<x_n\leqslant 1$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge. On note ℓ sa limite.
3. Montrer que $\ell=\frac{1}{2}$.
4. Montrer que $2^{n+2}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Exercice 24 :
Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$.
1. Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=x^{k+1}+x^k-n=0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$
2. Étudier les variations de x_n.
3. Étudier la limite éventuelle de (x_n).