Fonctions ln exp

Je ne sais pas vraiment comment définir la fonction exp de telle façon qu'on peut montrer qu'elle est infiniment dérivable...

1 Définition

On note e un réel irrationnel qui vaut environ 2.718. On définie $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2 Proposition

- $*$ exp est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = e^x$.
- $*$ $\exp(u)' = u' \exp(u)$
- $*$ exp est strictement positive, strictement croissante.
- $*$ $\exp(-\infty) = 0$ et $\exp(+\infty) = +\infty$
- $*$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
- $*$ exp est bijective de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ on note ln sa bijection réciproque.
- $*$ $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $*$ $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$
- $*$ $\lim\limits_{x \to 0} x^m \ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^m}$ pour $m > 0$
- $*$ $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $*$ $\ln(1) = 0, \ln(\mathrm{e}) = 1, \ln(]0,1]) =]-\infty, 0], \ln([1, +\infty[) = [0, +\infty[$.
- $*$ Évidemment $\ln(\mathrm{e}^x) = x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$
- $*$ ln est concave, exp est convexe.
- $*$ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(1/a) = -\ln(a)$ et $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

⚠ **Un contre-exemple à une erreur naïve :** Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ alors on ne peut pas dire que $(u_n)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. En effet pour $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, on a $(u_n)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$, donc $(u_n)^n$ tend vers e.

3 Des inégalités classiques

En général, pour montrer que $f \leqslant g$ avec f et g dérivables, on pose $h = g - f$, puis on dérive h et on trace son tableau de variations et on conclue que $h \geqslant 0$. Dans certains cas on pourra avoir besoin de dériver plusieurs fois pour étudier le signe... Quand on verra les intégrales, on pourra faire mieux.
Parfois il est plus facile d'utiliser le TAF ou l'IAF, surtout si connaît un **dominant** de f'.
Voici quelques inégalités qu'on peut montrer par l'une de ces méthodes :

* $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant x+1$; $\quad \forall x \geqslant 0, \mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2} + x + 1$; $\quad \forall x \geqslant 0, 0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.
* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$; $\quad \forall x \in [0,1], x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

4 Les fonctions $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$

On se ramène toujours à : $a^x = \exp(x\ln(a))$ et on étudie la fonction comme d'habitude.

5 Dérivée logarithmique

Soient $f_1, f_2 \cdots f_n$ n fontions dérivables strictement positives sur $\mathbb{R}$. On pose $g = f_1.f_2 \cdots f_n$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour calculer sa dériver on procède comme suit : On pose $h = \ln(g)$ alors $h = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(f_k)$ et on a :

$$h' = \frac{g'}{g} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k} \implies g' = g\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}$$

Exemple : $g(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x-i)$ pour $x > n$. Alors $\forall x > n, g'(x) = g\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-i}$.