

Problème

Soit λ un nombre réel strictement positif.

Soit f l'application définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + \lambda \left(\frac{1}{8} - x^3 \right).$$

Soit a un réel. On définit une suite u par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Si la suite u est convergente dans \mathbb{R} , quelle est sa seule limite possible ?
 (b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \geq x$ et $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq x$.
2. Dans les questions 2, 3, 4, on suppose $0 < \lambda \leq \frac{4}{7}$, et $0 \leq a \leq 1$.
 (a) Montrer que $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x)$.
 (b) Préciser la monotonie et la limite de la suite u , suivant les valeurs de a .
3. (a) Montrer que si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ alors $0 \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right) f' \left(\frac{1}{2}\right)$.
 (b) En déduire que si $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)^n$.
4. (a) Montrer que si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ alors $0 \leq \frac{1}{2} - f(x) \leq \left(\frac{1}{2} - x\right) f'(x)$.
 (b) En déduire que si $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{2} - u_n \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{n-1}$.
5. Dans cette question, on suppose que $\frac{4}{7} < \lambda \leq \frac{8}{7}$, et toujours $0 \leq a \leq 1$.
 (a) Effectuer une étude soignée des variations de l'application f sur $[0, 1]$.
 On précisera notamment les réels β, γ tels que $\frac{1}{2} < \beta < \gamma, f'(\beta) = 0$ et $f(\gamma) = \frac{1}{2}$.
 (b) Montrer que tous les termes u_n de la suite u appartiennent au segment $[0, 1]$.
 (c) Étudier la suite u suivant les valeurs de $u_0 = a$. On précisera en particulier si la suite u est monotone, éventuellement à partir d'un certain rang.
6. Dans cette question, on suppose que $\frac{8}{7} < \lambda < \frac{4}{3}$, et toujours $0 \leq a \leq 1$.
 On pourra réutiliser les calculs de la question (5), et notamment les notations β et γ .
 (a) Étudier les variations de f sur le segment $\left[-\frac{1}{6}, 1\right]$.
 On notera δ (sans chercher à le calculer) le réel de $]\gamma, 1[$ tel que $f(\delta) = 0$.
 (b) Étudier la suite u suivant les valeurs de $u_0 = a$.
7. En supposant toujours $0 \leq a \leq 1$, étudier la suite u quand $\lambda = \frac{4}{3}$.
 On illustrera graphiquement la convergence pour une valeur donnée de $u_0 = a$.