Série

Exercice 1 :
Déterminer le domaine de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x)=4x^3-5x^2+x-1 \quad f(x)=5x^3-\frac{1}{x}+3\sqrt{x}$$
$$f(x)=\left(x^2+1\right)\left(x^3-2x\right) \qquad f(x)=\frac{2x^2-3}{x^2+7}$$
$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1} \qquad f(x)=-x+2+\frac{2}{3x}$$
$$f(x)=\frac{1}{x+x^2} \qquad f(x)=(2x+1)^2$$
$$f(x)=\sqrt{x}(5x-3)$$

Exercice 2 :
Même question :

$$f(x)=\left(x^2-5\right)^4 \quad ; \quad g(x)=\tan(2x)$$
$$h(x)=\sqrt{x^2+5x-6} \quad ; \quad l(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$m(x)=\cos\left(x^2\right) \quad ; \quad n(x)=\cos^2 x$$
$$r(x)=\sin(3x)\cdot\cos(2x) \quad ; \quad s(x)=\sqrt{3+\cos^2 x}$$
$$a(x)=\frac{\sin(3x)}{x} \quad ; \quad b(x)=\frac{1}{(3x+6)^2}$$

Pour une fonction infiniment dérivable on définit $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n (dérivée n-ième) de f par :

$$f^{(0)}=f \quad f^{(1)}=f' \quad f^{(2)}=f''\cdots f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)'$$

On appelle ces fonctions les dérivées successives de f.

Vous n'en aurez pas besoin pour le national, c'est hors programme, mais c'est très utile pour s'entraîner aux calculs et bien maîtriser la récurrence.

Exercice 3 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Étude de f. Points d'inflexion.
2. Montrer que la dérivée n-ième s'écrit :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f^{(n)}(t)=\frac{P_n(t)}{\left(1+t^2\right)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

où P_n est un polynôme de degré n. Calculer a_n, le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que $P_n'=-n^2P_{n-1}$.

Exercice 4 :
Soit $F : x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels, de degré n, qu'on explicitera, tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$$

Exercice 5 :
Soit $a>0$ et f une fonction réelle continue sur $[0;a]$ et dérivable sur $]0;a]$. On suppose

$$f(0)=0 \text{ et } f(a)f'(a)<0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]0;a[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 6 :
Soit $a>0$ et $f:[0;a]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0)=f(a)=0 \text{ et } f'(0)=0.$$

1. Montrer que la dérivée de $x\mapsto f(x)/x$ s'annule sur $]0;a[$.
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

Exercice 7 :
Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $\sin x \leqslant x$ et pour tout $x\in\mathbb{R}, \cos x \geqslant 1-\dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 8 :
ON considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{1-u_n^3}{6}$.
1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0<u_n<1$.
2. (a) Montrer que l'équation $x^3+6x=1$ admet une solution unique $\alpha\in]0,1[$.
   (b) Montrer que $\alpha=\dfrac{1-\alpha^3}{6}$.
3. (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
   (b) Montrer que la suite est convergente et donner sa limite.

Exercice 9 :
On considère la fonction f définie par : $f(x)=\arctan(x)+1$ 1. Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution. unique β dans $[0,+\infty[$ et que $0<\beta<3$
   (b) Étudier le signe de $f(x)-x$.
   (c) Montrer que $f([\beta,+\infty[)\subset[\beta,+\infty[$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=f(u_n)$
   (a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n\geq\beta$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante
   (c) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite .

Exercice 10 :
On considère la fonction f définie par : $f(x)=2x-\dfrac{1}{\arctan(x)}$.
1. Montrer que f est une bijection de $]0,+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $\alpha>1$
   (b) Montrer que $(\forall x\in]0,+\infty[): f(x)<x \Leftrightarrow x<\alpha$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0\in]\alpha,+\infty[\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{array}\right.$
   (a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n>\alpha$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante .
   (c) montrer que $\lim u_n=+\infty$.
4. On considère les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\left\{\begin{array}{l} v_0\in]0,\alpha[\\ v_{n+1}=f^{-1}(v_n)\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} w_0\in]\alpha,+\infty[\\ w_{n+1}=f^{-1}(w_n)\end{array}\right.$
   (a) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}): 0<v_n<\alpha<w_n$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est croissante et (w_n) décroissante.
   (c) Montrer que $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\right): |f(x)-f(y)|\geq 2|x-y|$.

(d) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |w_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|w_n - v_n|$.
(e) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes puis calculer leur limite commune.

Exercice 11 :
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x-1}$
1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 4$
Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet exactement deux solutions a_n et b_n dans D_f et que $1 < a_n < 3 < b_n$.
3. Montrer que $(\forall n \geq 4) : b_n > n$, En déduire $\lim b_n$.
(a) Montrer que $(\forall n \geq 4) : \frac{1}{n} < a_n - 1 < \frac{3\sqrt{3}}{n}$.
(b) En déduire que la suite $(\ a_n\ )$ est convergente et préciser sa limite.
4. (a) Montrer que $(\forall n \geq 4) : n^2\left(a_n - 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{a_n^3}\left(a_n + \sqrt{a_n} + 1\right)}{\sqrt{a_n} + 1}$.
(b) En déduire $\lim n^2\left(a_n - 1 - \frac{1}{n}\right)$

Exercice 12 :
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arctan(\sqrt[3]{x}) + 2x - 1$
1. Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[0, +\infty[$ et que $0 < \alpha < 1$
(b) Étudier le signe $f(x) - x$ dans $\mathbb{R}^+$
(c) Montrer que $(\forall x \in [\alpha, +\infty[) : f^{-1}(x) \leq x$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > \alpha$ et $\quad u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$
(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \alpha$.
(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. On admet que $\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2\right) : |f(x) - f(y)| \geq 2|x - y|$.
(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 13 :
Soit $p \in]0, 1]$.
1. Établir que pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$(1 + t)^p \leqslant 1 + t^p.$$

2. En déduire que pour tout $x, y \geq 0$,

$$(x + y)^p \leq x^p + y^p.$$

Exercice 14 :
À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x + 1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$$

Exercice 15 :
Soit f une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde continue sur $[a; a + 2h]$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).
Montrer

$$\exists c \in]a; a + 2h\,[, f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

On pourra introduire $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$.

Exercice 16 :
Soit $f : x \mapsto \arctan x$.
1. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2).$$

2. En déduire les racines de $f^{(n)}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 17 :
Soit $a > 0$ et $f : [0; a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(a) = 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$

1. Montrer que la dérivée de $x \mapsto f(x)/x$ s'annule sur $]0, a[$.
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.