Série

Exercice 1 :
Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}-3}}{x^5\ln(x)}$
2. $f(x)=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln(x)}$
3. $f(x)=\dfrac{\ln(\operatorname{ch}(x))}{x^\alpha}, \alpha>0$
4. $f(x)=\dfrac{\ln\left(\dfrac{x^3-1}{x^2+1}\right)}{\sqrt{x}-\ln(x)}$
5. $f(x)=\dfrac{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}{x^2+1}$
6. $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2-1}{x+1}}-\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)}}$
7. $f(x)=\dfrac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)}{\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)}$
8. $f(x)=\mathrm{e}^{x+\dfrac{1}{x}}-\mathrm{e}^x$
9. $f(x)=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{x}-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)}{\sqrt{x}}$
10. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)}\right)$

Avec :

$$\operatorname{ch}(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Exercice 2 :
Étudier la limite en 0 (ou 0^+) de :
1. $f_1(x)=\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{\ln(1+\sqrt{x})^2}$
2. $f_2(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^x}{x}$
3. $f_3(x)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\sin(x)\right)}{1-\sqrt{\cos(\sqrt{x})}}$

Exercice 3 :
Déterminer la limite en $+\infty$ des suites suivantes :

$$u_n=n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)};\ u_n=\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n;\ u_n=\frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}};\ u_n=\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n;\ u_n=(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3})^n.$$

Exercice 4 :
1. Exprimer les dérivées successives de $f: x\mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{3}\cdot x)$ et $g: x\mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(\sqrt{3}\cdot x)$
2. Donner la dérivée d'ordre n de $x\mapsto \mathrm{e}^x\cos(x)$.

Exercice 5 :
1. Montrer que l'équation $x\ln x=1$ admet une unique solution sur $]\,1,+\infty\,[$, notée x_0
2. Étudier les variations de $f: x\mapsto \dfrac{e^x}{\ln x}$ sur $]1,+\infty\,[$, et montrer que f admet en x_0 un minimum, dont on notera la valeur y_0 (ne pas chercher à expliciter y_0).

3. Montrer que pour tout $x \geqslant y_0$, il existe un unique réel de $]1, x_0]$, noté $g(x)$, tel que $\mathrm{e}^{g(x)} = x \ln g(x)$, et qu'il existe un unique réel de $[x_0, +\infty[$, noté $h(x)$, tel que $\mathrm{e}^{h(x)} = x \ln h(x)$.
4. En se servant des variations de f, justifier que g est décroissante sur $[y_0, +\infty[$, et que h est croissante sur $[y_0, +\infty[$. Déterminer la limite de g et h en $+\infty$.

Exercice 6 :
1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0, f_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x > 0, \quad f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. En déduire l'expression de la dérivée n-ième des fonctions $g_n : x \mapsto x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et $h_n : x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7
À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$$

Exercice 8
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable s'annulant en a et b.
1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) + \alpha f(c) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) + c f(c) = 0$.

Exercice 9 :
1. À l'aide du TAF, montrer que :

$$\forall x > 0 : \frac{1}{x+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2. Montrer que $\forall x \in [0, 1], x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
3. Montrer que $\forall x > -1 : \ln(1+x) \leqslant x$, en déduire que $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{x}{x+1}$.
4. Montrer que $\forall x \geqslant 0, 0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.
5.

Exercice 10 :
Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. À l'aide de Rolle, montrer que :

$$\exists\, c \in]0, 1[, g'(c) = -g(c).$$

Exercice 11

(a) Montrer que, pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leqslant x$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 12 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{ et } \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

1. Établir que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$.
2. Justifier que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Exercice 13 :
On étudie ici la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Établir que pour tout $t > -1, \ln(1+t) \leqslant t$ et en déduire

$$\ln(1+t) \geqslant \frac{t}{t+1}$$

2. Observer que

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln n + 1$$

et en déduire un équivalent simple de S_n.
3. Montrer que la suite $u_n = S_n - \ln n$ est convergente. Sa limite est appelée constante d'Euler et est usuellement notée γ.

Exercice 14 :
Soit $0 < a \leq b$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étudier la monotonie de f et en déduire que $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$.

Exercice 15 :
Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.
1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent simple de la suite (x_n).

Exercice 16 :
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^n + \ln x = 0$ possède une unique solution $x_n > 0$.
2. Déterminer la limite de x_n. (Vous avez déjà vu la démarche dans les exos du cours de continuité)
3. On pose $u_n = 1 - x_n$. Justifier que $nu_n \sim -\ln u_n$ puis déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 17 :
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{g}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.
On désigne par C la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1. (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{3}{2}}}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de g.
2. (a) Dresser le tableau de variation de g'.
   (b) En déduire que pour tout réel $x, 0 \leqslant g'(x) \leqslant \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha \in]0.9, 1[$.
3. Construire C.
4. (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
   (b) Montrer que pour tout x de $]0,1[, g^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$.

(c) Tracer dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe C' de g^{-1}.

Exercice 18 :

Soit n est un élément de $\mathbb{N}$ différent de 1, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f_n(x)=-x^2+2+n\ln(x)$

1) a- Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

b- Étudier les variations de f_n.

2) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x\ln x+2-x$

3) (a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$; puis étudier les variations de g.

b- En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right); g(x)>0$

4) a- Montrer que : $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)>0$

b- En déduire que l'équation $f_n(x)=0$ admet deux solutions u_n et v_n dans $\mathbb{R}_+^*$ (On suppose que : $u_n<v_n$).

c- Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

5) a- Montrer que : $(\forall n\geq 2); u_n\leq 1$

b- Vérifier que : $(\forall n\geq 2); f_{n+1}\left(u_n\right)=\ln\left(u_n\right)$

c- Montrer que $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ est croissante et convergente.

d- Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 19 :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right); x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a-Montrer que la fonction f est continue à droite en $x_0=0$.

b- Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0=0$, et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) Soit u et v les fonctions définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$u(t)=t-\ln(1+t)$ et $v(t)=t^2$

a- Montrer que : $(\forall t>0); (\exists c\in]0;t[); \dfrac{u(t)}{v(t)}=\dfrac{u'(c)}{v'(c)}$ Appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[0;t](t>0)$ à la fonction : $\varphi: x\mapsto u(t)v(x)-u(x)v(t)$

b- En déduire que : $\lim\limits_{t-0^+}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\dfrac{1}{2}$

3) Montrer que la droite d'équation : $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

4) a- Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

et que : $(\forall x\in]0;+\infty[); f'(x)=x\left(2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right)$

b- Montrer que : $(\forall x>0); \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{1+x}$

En déduire que : $f'(x)>0$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$. c - Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5) a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $\ln(2)$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)$.

c- Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f^{-1}(x)}{x} = +\infty$

d-Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f^{-1}(x) > x$

6) Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe (C) et la courbe (C') de f^{-1}.

Exercice 20 :

A/1) Montrer que :

$$(\forall x > -1); x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

B/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}; x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \text{ et } f(-1) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a-Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

b- Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Montrer que la fonction f est dérivable en 0 , puis déterminer une équation de tangente à la courbe (C) au point $A(0;1)$.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

b-Montrer que la fonction f est dérivable sur les intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

3) a- Montrer que : $(\forall x > -1); (x+1)\ln(x+1) - x \geqslant 0$

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c- Tracer la courbe (C).

4) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = e \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > e - 1$

b- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = e - 1$.

Exercice 21 :

Soient f, g dérivables sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$