BAC BLANC 1

Exercice 1 :

Soient $m,n \geq 2$ deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que $\exists(u,v)\in \mathbb{Z}^2$, $nu+mv=1$.
2. En utilisant la division euclidienne de m par u, montrer que:
   $\exists(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^2, nu_0 - mv_0 = 1$ tel que $u_0 < m$ et $v_0 < n$.
3. Montrer par l'absurde que (u_0,v_0) est unique.
   (Considérer un autre couple qui vérifie les mêmes conditions et trouver une contradiction)

Exercice 2 :

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$,

1. Montrer que M est inversible $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$
2. On suppose que $ad - bc \neq 0$; On pose $M' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
   Montrer que $\dfrac{1}{ad-bc}M'$ est l'inverse de M.
3. Application: on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que A est inversible et donner son inverse.
   (b) B est-elle inversible?
4. On pose $E = \left\{a + b\sqrt{2}/(a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$
   (a) Montrer que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
   (b) Montrer que $(1, \sqrt{2})$ est une base de E.
   (c) Déduire la dimension de E.

Exercice 3:

Partie I

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E) : z^4 + 2 = 0$$

1. Montrer que $(E) \Leftrightarrow z^2 - i\sqrt{2} = 0$ ou $z^2 + i\sqrt{2} = 0$.
2. Déduire l'ensemble de solutions de (E).

Partie II

Soit $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$,

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$
2. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z
$$(E_n) : z^n - n = 0$$
On pose S_n l'ensemble des solutions de (E_n).
Trouver S_n en fonction de ω et n et préciser le nombre de solutions.

Exercice 4:

Partie A

Pour entier naturel n,on considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < x_n \leq 1$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
On note l la limite de $(x_n)_{n\geq 1}$
4. Montrer que $0 < l < 1$.
5. Monter que la limite de $(x_n)^n$ est 0.
6. Déduire que $l = \frac{1}{2}$.
7. Caluler $\displaystyle\int_0^{x_n} P_n(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout $n \geq 2$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} f(x) = (1 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

$\mathbb{I}$/

1. (a) Étudier la continuité de f en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. (a) Étudier les varitions de f.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.

$\mathbb{III}$/ On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{-3x^2}^{-x^2} f(t)\,\mathrm{d}t, x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

Soit C_F la courbe représentative de F.

1. Étudier la parité de F.
2. (a) Soit $0 < x$, Montrer que $\exists c \in [-3x^2, -x^2], F(x) = 2xf(c)$.
   (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^*{}_+, 2xf(-x^2) \leq F(x) \leq 2xf(-3x^2)$.
   (c) Étudier la continuité et la dérivabilité de F en 0.
3. Calculer les limites de F aux bornes de D_F.
4. Déduire les branches infinies de C_F.
5. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, F'(x) = \dfrac{-F(x)}{x} - 2f(-x^2) + 6f(-3x^2)$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, F'(x) \geq 4f(-3x^2) - 2f(-x^2)$.
   (c) Dresser le tableau de variations de F.
   (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, F'(x) \leq 2x$.
6. Tracer C_F.