Construction des intégrales

On commence d'abord par définir l'intégrale d'une fonction en escalier, puis on étend cette définition au fonctions continues par un théorème d'approximation.

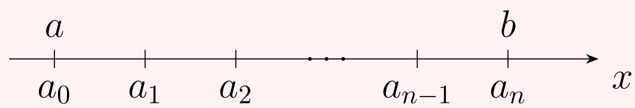
1 Fonctions en escaliers

1.1 Subdivision d'un segment

Définition 1

a) Une **subdivision** du segment $[a, b]$, est une famille $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de $[a, b]$ tels que $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$.

b) Le réel $\delta(\sigma) = \max\limits_{0 \leq i \leq n} |a_{i+1} - a_i|$ s'appelle le **pas** de subdivision σ.



$\longrightarrow$ ***Exemples :***

1. Si $\forall k \in [\![1, n]\!], a_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n}$ alors $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est dite une **subdivision à pas constant** ou aussi une **subdivision régulière** de $[a, b]$. Le pas est $\delta(\sigma) = \dfrac{b-a}{n}$ car $\forall k \in [\![0, n-1]\!], a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$.
2. En particulier pour $a = 0$ et $b = 1$, $\sigma = (k/n)_{0 \leq k \leq n}$ est la subdivision régulière de $[0, 1]$ de pas $\delta(\sigma) = 1/n$.

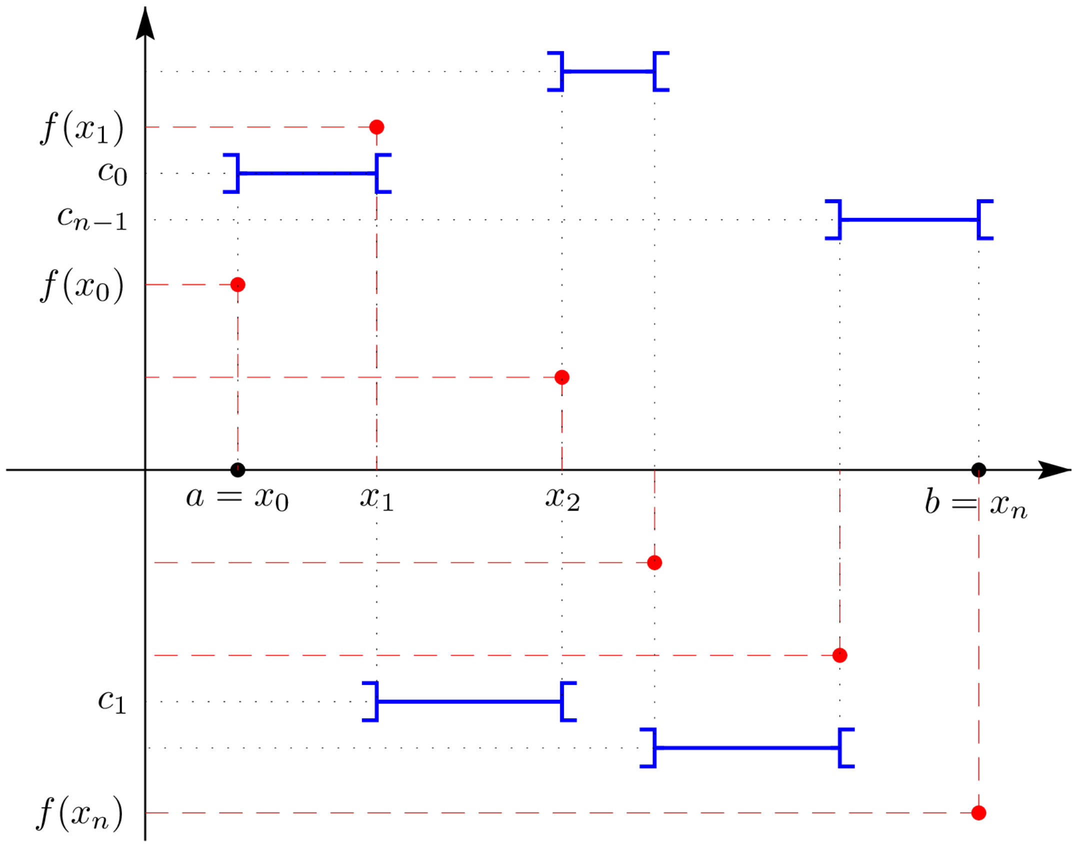
1.2 Fonctions en escaliers

Définition 2

Une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \exists c_k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \varphi|_{]a_k, a_{k+1}[} = c_k.$$

On note par $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ ou tout simplement $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.



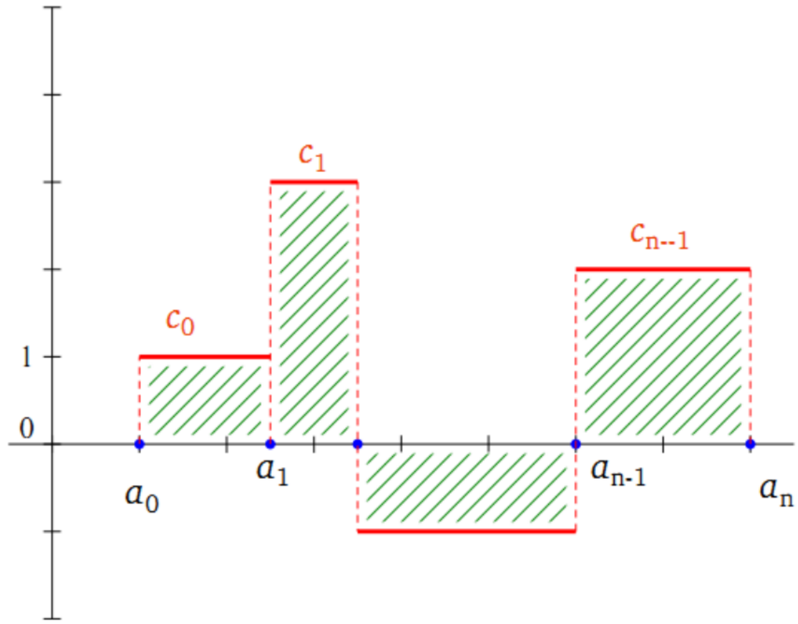
Définition 3

Soit $\sigma' = (b_k)_{0 \leq k \leq m}$ une subdivision de $[a, b]$ et $\varphi \in \mathcal{E}$. On dit que σ' est **adaptée** à φ si $\forall k \in [\![0, m-1]\!], \exists d_k \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi|_{[b_k, b_{k+1}[} = d_k$.

1.3 Intégrales des fonctions en escaliers

Proposition et définition

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\sigma = (a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision adaptée, et $c_k = \varphi|_{[a_k, a_{k+1}[}$. Alors le réel $I = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(a_{k+1} - a_k)$ est indépendant du choix de σ et on l'appelle intégrale de φ sur $[a, b]$ et on le note $\int_a^b \varphi(t)dt$ ou $\int_a^b \varphi$.



L'intégrale est en effet la somme des aires de ces rectangles avec "*signe*".
De cette définition découlent toutes les propriétés sur les intégrales vues en cours : Chasles, linéarité, positivité (l'intégrale d'une fonction positive est $\geqslant 0$.

2 Intégrales des fonctions continues

2.1 Approximation

Théorème

Soit f continue de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Alors $\exists(\varphi_n) \in (\mathcal{E}([a, b]))^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers sur $[a, b]$, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)| = 0$$

2.2 Extension de la fonction intégrale

Définition et proposition

Soit f continue de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et (φ_n) une suite de fonction en escalier qui vérifie le théorème précédant. Alors le réel $I_f = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt$ existe et ne dépend que de f c'est-à-dire indépendant du choix de la suite (φ_n) et s'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$ et se note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)dt$

Il y a d'autres façons, sur le net, de définir l'intégrale mais je vois que c'est la manière la plus simple.