Cours : Les complexes

1 Généralités

Chaque complexe non nul s'écrit sous la forme : $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ mais on peut se limiter à $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$ par périodicité.
$r = |z|$ est appelé module de z et $\theta = arg(z)$ appelé argument de z.
Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls.
Alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(arg(z)) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(arg(z)) = \dfrac{b}{|z|}$.
Donc $\tan(arg(z)) = \dfrac{b}{a}$ éventuellement ∞.
On peut voir $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2$: le plan complexe.
$\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Inégalité triangulaire :
$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ et $|z + z'| = |z| + |z'|$ ssi $arg(z) \equiv arg(z')[2\pi]$.
$\overline{\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right)} \equiv arg\left(\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right)[2\pi]$

2 Propositions

- **Demi-arc :** $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$

  de même on a : $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$

  $z\overline{z} = |z|^2$

- Si on a la forme algébrique de z et on veut celle de $\dfrac{1}{z}$, on écrit : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. En effet on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} : \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

- $|Re(z)|, |Im(z)| \leqslant |z|$.

3 Racines n-ième de l'unité

On admet que chaque polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet n racines dans $\mathbb{C}$ (avec multiplicités). On admet encore que $X^n - 1$ admet exactement n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

3.1 Définition

On appelle racine n-ième de 1 tout complexe tel que $z^n = 1$. Les racines n-ièmes de 1 sont exactement les $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \{1, \cdots, n\}$. Ils sont exactement n.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1.

3.2 Propriétés

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k = 0$ (somme des termes d'une suite géométrique)
- $z^n = 1 \implies |z| = 1$, mais attention on n'a pas l'implication réciproque, contre-exemple : e^i n'est pas une racine n-ième de 1 car π est irrationnel.
- $z^n = 1 \implies \overline{z}^n = 1$.
- On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. j est une racine 3-ième de 1, et on a : $1 + j + j^2 = 0$
- $\overline{j} = j^2$.

4 Transformations du plan

Soient $\overrightarrow{u}(a)$ un vecteur non nul, $\Omega(\omega) \in P$, $k \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Soient $M(z)$ et $M(z')$ deux points de P. Alors

1. $T_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \iff z' = z + a$ (translation de vecteur $\vec{u}$)
2. $h(\Omega(\omega), k)(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \iff z' - \omega = k(z - \omega)$ (homothétie de centre Ω de facteur k.)
3. $r(\Omega(\omega), \theta)(M) = M' \iff z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ (rotation de centre Ω d'angle θ)
4. $S_\Omega(M) = M' \iff \omega = \dfrac{z + z'}{2} \iff z' = 2\omega - z$ symétrie centrale de centre Ω.
5. $S_{\mathrm{OX}}(M) = M' \iff z' = \overline{z}$. (symétrie axiale, d'axe OX)
6. $S_{\mathrm{OY}}(M) = M' \iff z' = -\overline{z}$. (symétrie axiale, d'axe OY.)

5 Équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$

On calcule le discriminant de (E) : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on distingue ces deux cas :

1. Si $\Delta \geqslant 0$, (E) admet deux solutions réelles, éventuellement égales :
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
2. Si $-\Delta \geqslant 0$, alors $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$, et (E) admet deux solutions, éventuellement égales :
$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On ne considère que le cas $a \neq 0$.

6 Points alignés et points cocycliques

6.1 Points alignés

Soient $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3) \in \mathcal{P}$ deux à deux distincts. On dit que M_1, M_2 et M_3 sont **alignés** ssi :
$$\overline{\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}\right)} \equiv 0[\pi]$$
C'est aussi équivalent à :
$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$$

6.2 Points cocycliques

Soient A,B,C et D quatre points deux à deux distincts du plan complexe. Alors on a :
$$\text{A, B , C et D sont cocyclique ou alignés} \iff \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \times \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$$

7 Application aux calculs des $\cos, \sin$

Les nombres complexes sont souvent utiles pour calculer les valeurs de quelques cos ou sin de certains angles. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
e^{in\theta} &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\\
&= (cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin(\theta))^k \cos(\theta)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} (-1)^k (\sin(\theta))^{2k} \cos\theta^{n-2k} + i \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k+1} (-1)^k (\sin(\theta))^{2k+1} (\cos\theta)^{n-2k-1}
\end{aligned}$$

Puis on identifie partie réelle et partie imaginaire.

On peut de cette égalité voir aussi que $\cos n\theta$ est un polynôme de degré n en $\cos\theta$ vu que : $\sin^2 = 1 - \cos^2$.

Vous verrez dans les exercices d'autres méthodes de calcul par exemples en utilisant les racines n-ièmes de 1.