Dérivabilité

On considère f une fonction définie sur I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1 Définition

On dit que f est dérivable en a ssi $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe et est finie. Dans ce cas on note $f'(a) = \lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ la dérivée de f en a.
Sous condition d'existence et de finitude, on note aussi :
$\star f'_g(a) = \lim\limits_{t \to a^-} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ la dérivée de f à gauche en a.
$\star f'_d(a) = \lim\limits_{t \to a^+} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ la dérivée de f à droite en a.
f est dérivable en a ssi $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$.
On défini la dérivabilité sur I comme on a définit la continuité sur I.

2 Proposition

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f, g dérivables sur I, alors on a :
(i). fg, $f + g$ $f - g$ dérivables sur I, et $(fg)' = f'g + fg'$.
(ii). Si de plus g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
En particulier $\dfrac{1}{g}$ dérivable et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-1}{g^2}$.

4 Composée

Soient $f : I \to J$ et $g : E \to F$ dérivables tq : $f(I) \subset E$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

5 Dérivabilité de la fonction réciproque

Soit $f : I \to f(I)$ dérivable. Si on a :
(i). f est bijective
(ii). f' ne s'annule pas sur I,
Alors f^{-1} dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$\forall x \in I : (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

6 Fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalles de dérivabilité
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^{\mathrm{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}(n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	selon les valeurs α
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$

7 Théorème de Rolle

Si on a :
(i). f continue sur $[a, b]$
(ii). f dérivable sur $]a, b[$
(iii). $f(a) = f(b)$,
Alors
$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0.$$

8 Théorème des accroissements finis (TAF)

Si on a :
(i). f continue sur $[a, b]$
(ii). f dérivable sur $]a, b[$
Alors :
$$\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

9 Inégalité des accroissements finis (IAF)

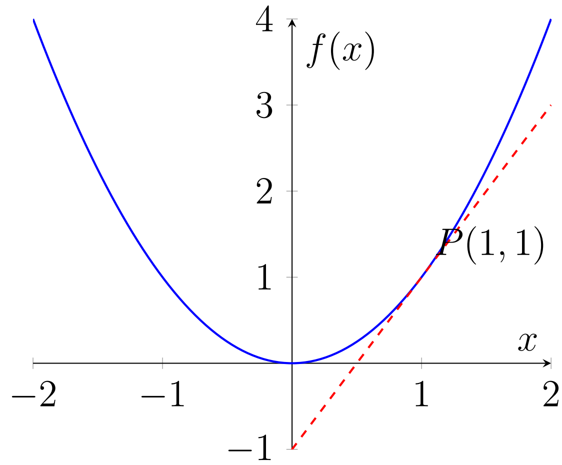
Si on a :
(i). f continue sur $[a, b]$
(ii). f dérivable sur $]a, b[$
(iii). $\forall x \in]a, b[, |f(x)| \leqslant M$,
Alors
$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b - a).$$

10 Tangente à une courbe

Soit f une fonction dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente Δ en $(x_0, f(x_0))$ d'équation :

$$\Delta : \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Voici un exemple d'une représentation géométrique :

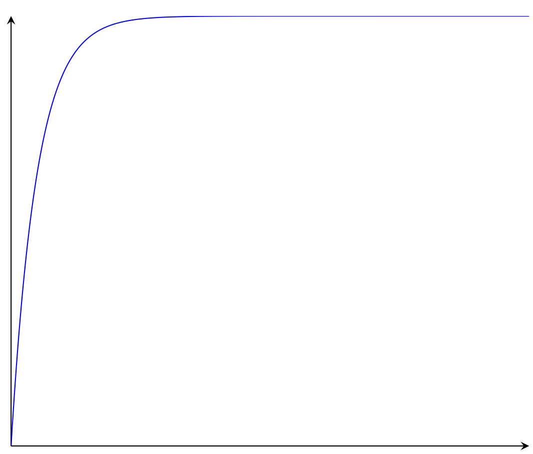


On peut de même définir une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche.

11 Branches infinies

1. Si $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$:

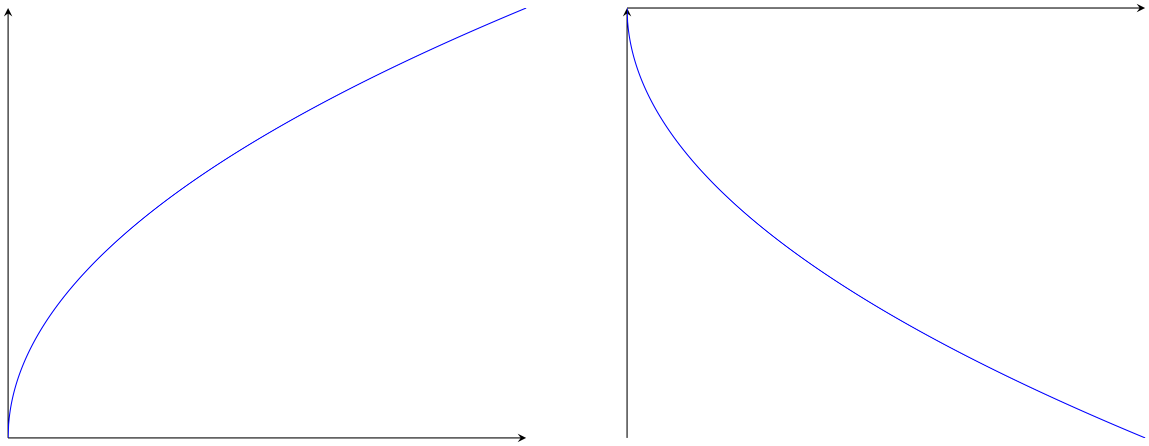
Alors f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$.



2. Si $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \infty$:

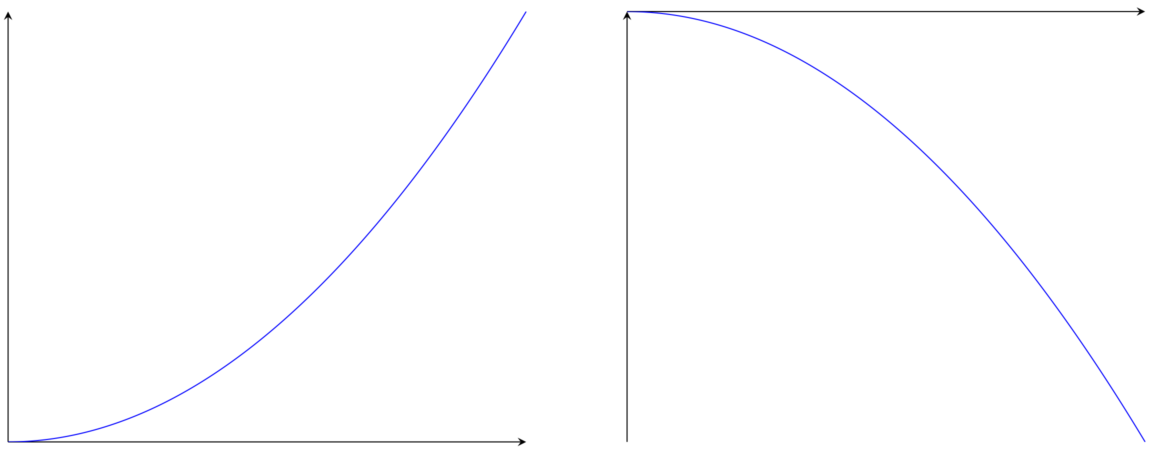
(a). Si $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

Alors f admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$



(b). Si $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +/-\infty$:

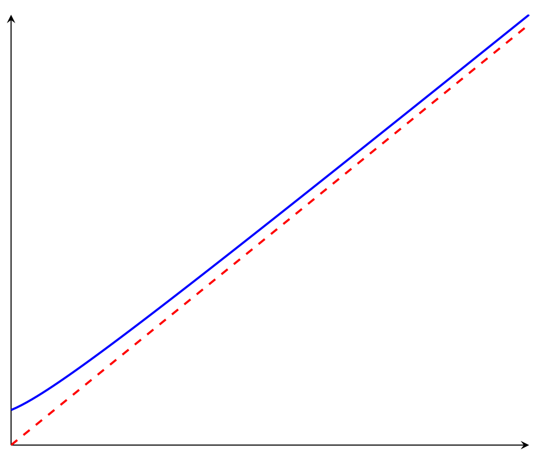
Alors f admet une branche parabolique de direction Oy en $+\infty$.



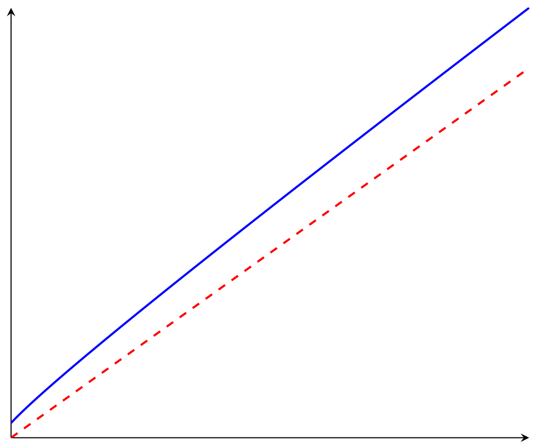
(c). Si $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^*$:

i. Si $f(x) - \ell x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}$:

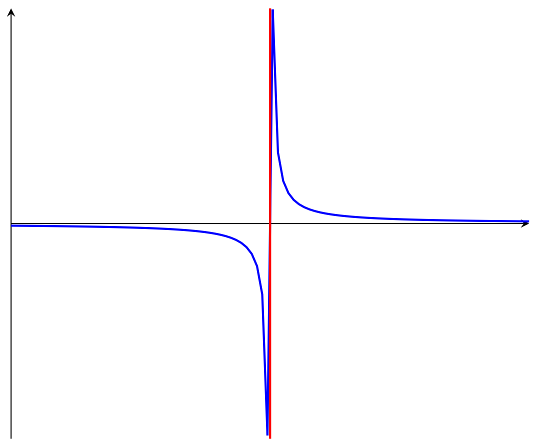
Alors f admet une asymptote d'équation : $y = \ell x + a$ en $+\infty$



ii. Si $f(x) - \ell x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$:
Alors f admet une branche parabolique de direction $y = \ell x$ en $+\infty$.



3. Si $f \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$:
Alors f admet un asymptote verticale d'équation $x = x_0$ en x_0.



12 Convexité

12.1 Définition

On que f est convexe ssi :

$$\forall x, y \in D_f, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Remarque : en général, la convexité n'a pas de lien avec la dérivée seconde ni avec les tangentes car elles n'existent toujours, mais en bac on se limite au deux résultats suivants :

12.2 Théorème 1 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
Alors f est convexe ssi $\forall x \in I, f''(x) \geqslant 0$.
Et f est convexe ssi $\forall x \in I, f''(x) \leqslant 0$.

12.3 Théorème 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors f est convexe ssi $\mathcal{C}_f$ est au **dessus** de toutes ses tangentes.
Autrement dit, f est convexe ssi $\forall x, x_0 \in I, f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
De même f est concave ssi $\mathcal{C}_f$ est au **dessous** de toutes ses tangentes.
Autrement dit, f est concave ssi $\forall x, x_0 \in I, f(x) \leqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

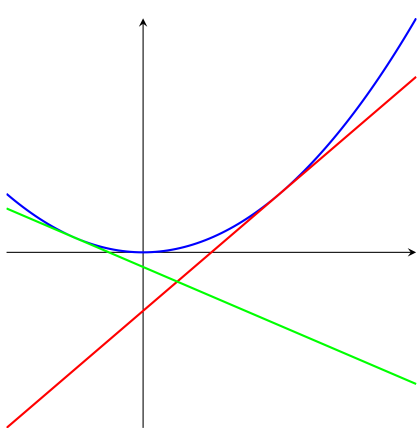
12.4 Petit résultat hors programme

Soit f convexe sur I, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Alors on a :

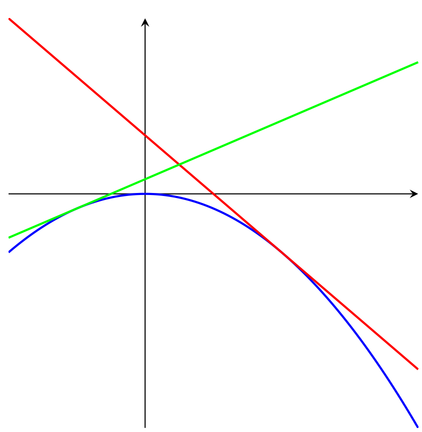
$$\forall x_1, \cdots, x_n \in I, \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

12.5 Géométriquement

Convexe



Concave



13 Point d'inflexion

Soit f dérivable deux fois sur I et $x_0 \in I$.
On dit que $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ ssi f'' s'annule et change de signe strictement en x_0.