Série

Exercice 1 :
Écrire sous forme algébrique

$$a=(1+i)^2, \quad b=(3-2i)(1-i)-(2+i)^2, \quad c=\frac{3-2i}{2+5i}, \quad d=\frac{4+i}{1-i}+\frac{2-i}{3-i}, \quad e=\left(\frac{1+i}{i}\right)^3.$$

Exercice 2 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer i^n.

Exercice 3 :
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du premier degré $2iz+4=z-4i$.

Exercice 4 :
Soit $z=\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Calculer z^3

Exercice 5 :
Déterminer module et argument de

$$z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Exercice 6 :
Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|z+z'|=|z|+|z'| \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z'=\lambda.z.$$

Exercice 7 :
Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $\omega=\exp(2i\pi/n)$. 1. Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-\omega^k\right)=\sum_{\ell=0}^{n-1} z^{\ell}$$

2. Justifier que l'égalité reste valable pour $z=1$.
3. En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 8 :
1. En utilisant la somme des racines 5-ièmes de 1, montrer que : $1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0$
2. En regardant que $\cos 2a=2\cos^2(a)-1$, trouver une équation de degré 2 vérifiée par $\cos\frac{2\pi}{5}$
3. Déduire que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Exercice 9 :
Soit ω une racine n-ième de l'unité différente de 1 . On pose

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

Exercice 10 :
Simplifier :
(a) $j(j+1)$ (b) $\dfrac{j}{j^2+1}$ (c) $\dfrac{j+1}{j-1}$

Exercice 11 : (encore des suites croisées)
On défini $(x_n),(y_n)$ deux suites réelles par :

$$x_0, y_0 \in \mathbb{R},\ \text{et } x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}, y_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{2}$$

On considère $z_n = x_n + iy_n$
1. Montrer que (z_n) est une suite géométrique et déduire son terme général.
2. Déduire l'expression de x_n et de y_n.

Exercice 12 :
On considère (z_n) la suite complexe définit par :

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

1.

Exercice 13 :
Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ et n un entier positif.
1. En remarquant que : $\cos(2ka) = \dfrac{e^{2iak}+e^{-2iak}}{2}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2ka) = \frac{\sin((n+1)a)\cos(na)}{\sin(a)}$
2. Trouver la valeur de cette somme si $a \in \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 14 :
Trouver l'ensemble des complexes z tq : $\dfrac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$

Les exercices qui suivent sont pris des sujets nationaux qu'il faut forcément faire.

Exercice 15 : normale 2023
On considère le nombre complexe : $u = 1 + (2-\sqrt{3})i$
1. (a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1-i$ et $1+\sqrt{3}i$
   (b) Montrer que : $\dfrac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$
   (c) En déduire que : $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$
   (d) Montrer que : $u = (\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$
2. On considère les deux suites numériques (x_n)et (y_n) définies par :
   $x_0 = 1, \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2-\sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_n + iy_n = u^n$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_n = \dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe u^n

(a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points O, A_0 et A_n sont alignés.
(b) Montrer que pour tout entier n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

Exercice 16 : Ratt 2023

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

Partie I

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant : $(S) : \begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{12}{5} \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

1- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S). On pose : $z=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

(a) Montrer que : $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i$

(b) Montrer que : $z^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z+1=0$, en déduire les valeurs possibles de z

(On remarque que : $\dfrac{28}{25}+\dfrac{96}{25}i=\left(\dfrac{2}{5}(4+3i)\right)^2$)

(c) En déduire les valeurs du couple (x, y)

2. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S)

PARTIE II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ Soit (U) le cercle de centre O et de rayon 1 et $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle (U) deux à deux distincts.

1. Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}); \quad |z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

2.(a) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$

Montrer que : $p=\dfrac{bc}{a}$

(b) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$.

Montrer que : $q=-p$

(c) La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$

Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires.

Exercice 17 : normale 2022

Soit m un nombre complexe non nul donné et $j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I- On considère dans l'ensemble l'équation d'inconnue z

$$(E_m) : z^2+mj^2z+m^2j=0$$

1. Vérifier que : $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$ 2.(a) Calculer le discriminant de l'équation (E_m)

(b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

3. Dans cette question, on suppose que : $m=1+i$

Montrer que $(z_1+z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit π la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z'=(1+j)z$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application ϕ

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2 et on note $A'(a')$ $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application j et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA'], [CB']$ et $[AC']$.

(a) Montrer que : $a'=-mj^2, \quad b'=-m$ et $c'=-mj$

(b) Montrer que : $\quad p+qj+rj^2=0$

(c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 18 : normale 2019

Soit m un nombre complexe non réel

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b) Déterminer z_1 et z_2, les deux solutions de l'équation (E)

2- On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$

b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points suivants : A le point d'affixe $a = 1+i, B$ le point d'affixe $b = (1+i)m, C$ le point d'affixe $c = 1-i, D$ l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

1- a) Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$

b) Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$

c) En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$

2- La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

a) Montrer que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

b) En déduire h en fonction de m

Exercice 18 : Ratt 2019

Soit α un nombre complexe non nul. I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$$

1- a- Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

2- Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}(\lambda \in \mathbb{R})$, mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

II- On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points Ω, M_1 et M_2 d'affixes respectivement $\alpha, z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

1- a-Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

b- En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux.

2- a- Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

b-Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

c- En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange .

3- Montrer que pour tout réel θ, le nombre : $Z = \dfrac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \dfrac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

Exercice 19 : normale 2018

Soit m un nombre complexe.

I- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2 + (im+2)z + im + 2 - m = 0$$

1- a) Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)
b) Donner, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)
2- Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectifs $a = -1 - i, \omega = i$, m et $m' = -im - 1 + i$
1- Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'
a) Vérifier que Ω est le centre de R
b) Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que : $A = R(B)$
2- a) Vérifier que : $m' - a = \dfrac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$
b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques .
c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés
Est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 20 : normale 2016
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.
Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et soit M le point dont l'affixe z vérifie la relation :

$$z = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}$$

1. a) Montrer que :

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$$

   b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2.
2. Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.
3. On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α où α est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.
   a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α.
   b) Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.
4. Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0, \pi[$.
   On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation :

$$6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$$

   a) Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que :

$$z = 2\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$$

   b) Donner en fonction de θ, la forme trigonométrique du nombre complexe z.