Série : Les intégrales

Les exercices que je vous propose ici engendrent complètement toutes les techniques qu'il faut avoir pour être à l'aise avec les intégrales, MAIS ils ne sont pas forcément faisables par tout le monde, il vaut mieux donc bien maîtriser le cours et les exercices du prof avant de se plonger dans ces exercices qui nécessitent un peu de recule. Bon courage !

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^2}$
2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{1+t^2}$
3. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt$
5. $\displaystyle\int_1^e \ln(t)dt$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))dt$
8. $\displaystyle\int_0^1 te^{t^2}dt$
9. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt$
10. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t\ln(t)}$
11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin(t)dt$
12. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(t)dt$
13. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(t)dt$
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}dt$
15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}dt$
16. $\displaystyle\int_0^1 e^t\cos(t)dt$
17. $\displaystyle\int_0^1 t\sin(t)e^t dt$
18. $\displaystyle\int_1^e t\ln(t)dt$
19. $\displaystyle\int_0^1 t\arctan(t)dt$
20. $\displaystyle\int_0^1 (t^2-t+1)e^{-t}dt$
21. $\displaystyle\int_0^1 (t-1)\sin(t)dt$
22. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$
23. $\displaystyle\int_0^{e^\pi} \sin(\ln(t))dt$
24. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}dt$
25. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t+t(\ln(t))^2}$
26. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}}{1+e^t}dt$
27. $\displaystyle\int_1^e t^3\ln(t)dt$
28. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}dt.$

Exercice 2 :(changements de variables)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}dt$
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2}dt$
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}dt$
4. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)+1}}$
5. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$
6. $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt$
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$
8. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln(t)}{t^2}dt$

Exercice 3 :

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions g suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

1. $\displaystyle g(x)=\int_{2x}^{x^2} f(t)dt$
2. $\displaystyle g(x)=\int_0^x xf(t)dt$
3. $\displaystyle g(x)=\int_0^x f(x+t)dt$

Exercice 4 :

On considère $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   On pose $\displaystyle F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt.$
2. Trouver la parité de F.
3. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variations de F.

Exercice 5 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable, de dérivée continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $\displaystyle x\neq 0, F(x)=\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt.$

1. Montrer que F est prolongeable par continuité en 0 et calculer $F(0)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} F'(x) = 0$

Exercice 6 :

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ pour $0 < x < 1$.
1. Par la méthode des intégrales, calculer la limite de f en 0^+.
2. Montrer que : $\forall 0 < x < 1$: $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t\ln(t)} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x dt}{t\ln(t)}$.
En déduire $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
3. Déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx$.

Exercice 7 :

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$ pour $x > 0$.
1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En s'inspirant de la qst 2. de l'exo 6, déterminer la limite de f en 0^+.

Exercice 8 :

Soit

$$f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t + e^{-t}}{2t}\, dt.$$

1. Étudier la parité de f. On étudie désormais f sur $]0;+\infty[$.
2. Prolonger f par continuité en 0. Montrer que $f(0) = \ln(2)$.
(vous pouvez étudier la monotonie de $x \mapsto e^x + e^{-x}$ sur $]0;+\infty[$)

Exercice 9 :

Soit f une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

Vous l'avez vu dans plusieurs occasions, mais je vous rappelle encore que : $f^{(0)} = f$ et $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.
2. Par un changement de variable, montrer que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)du$$

(pour x non nul).
3. On suppose que $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant M$
Soit $x > 0$. Montrer que :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}M \quad (1)$$

4. En appliquant l'inégalité (1) à la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 10 :

Soit f une fonction réelle positive, décroissante, dérivable de dérivée continue sur $I = [a;b]$.
Soit g une fonction continue sur I. On définit $G : I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt.$$

1. Montrer qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$G([a;b]) = [m;M].$$

2. Montrer que

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\, dt.$$

3. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = f(a) \int_a^c g(t)dt$$

Exercice 11 :

1. Soit f continue sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$,
montrer que f s'annule sur $[a,b]$. (utiliser la moyenne ou le théorème de Rolle)
2. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On pose

$$\varphi(x) = f(x) \int_a^b g(t)dt - g(x) \int_a^b f(t)dt$$

Calculer $\displaystyle\int_a^b \varphi$ et déduire que $\exists c \in [a,b], \quad f(c) \displaystyle\int_a^b g(t)dt = g(c) \int_a^b f(t)dt.$

Exercice 12 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\, dt.$$

1. Calculer I_1.
2. Déterminer le minimum de $\dfrac{1}{1+e^t}$ pour $t \in [0,1]$. En déduire une minoration de I_n et la limite de $(I_n)_{n \geq 0}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
4. Calculer I_0 et I_2.
5. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
6. Déduire des questions 3. et 5. la limite de la suite $(e^{-n} I_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 13 :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n \, dt.$$

1. Calculer I_1.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le signe de I_n.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$
4. Déduire des questions 2. et 3. la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
5. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
6. Déterminer la limite de la suite $(nI_n)_{n\geq 1}$. (déduire des questions précédentes un encadrement de I_n.)

Exercice 14 :
Soit f continue sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leqslant M$. On pose $I_n = \displaystyle\int_a^b t^n f(t)dt$.

Déterminer la limite de (I_n).

Exercice 15 :
Soit f continue sur $[a,b]$.
1. Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$.
2. On suppose dans cette question que f est à signe constant. Montrer qu'on a égalité dans l'inégalité précédente.

Théorème admis (*Hors programme*)

Si f est ***continue positive*** sur $[a,b]$, telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$,
alors $\forall x \in [a,b], f(x) = 0$.

3. On suppose que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$.
Montrer que : $\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant 0$ ou $\forall x \in [a,b], \quad f(x) \geqslant 0$

Exercice 16 :
En utilisant la méthode des rectangles (cours), montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Indication : on pourra remarquer que $\ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k)$ *puis appliquer la méthode des rectangles sur cette somme...*

Exercice 17 :
En se ramenant à une somme de Riemann, montrer que :
$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{e}$$

Exercice 18 :

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$
$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx.$$

1. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. Montrer que
$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}.$$
3. En déduire que
$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 19 :

1. Calculer
$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}.$$
2. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \, dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$
3. Montrer que :
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2} dt.$$
4. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 20 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2.
2. Déterminer la monotonie de (u_n).
3. Montrer $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Déduire la limite de (u_n).
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.
5. Par une inégalité que vous connaissez sur la fonction ln, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
6. Déduire la limite de $n(u_n - 1)$.

Exercice 21 :

1. À l'aide des intégrales, montrer que $\sin(x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.
2. Déduire la limite de : $\displaystyle\int_0^1 (\sin(t))^n dt$.