Problèmes théoriques : Les intégrales

Problème 1 :

Dans la série d'exercices on a admis le résultat suivant :

Théorème

Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $f \geqslant 0$. Alors on a :

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \implies f = 0$$

On se propose alors de démontrer ce théorème.
Soit f une telle fonction. On suppose par l'absurde que $\exists x_0 \in [a, b], \quad f(x_0) > 0$

1. Si $x_0 \in]a, b[$:

(a) En utilisant la continuité de f en x_0, montrer que :

$$\exists \alpha > 0, [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset [a, b], \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}.$$

(b) Déduire que $\displaystyle\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(x) \geqslant \alpha f(x_0) > 0$.

(c) Trouver la contradiction. Conclure.

2. On a montré que f est nulle sur $]a, b[$. Déduire que $f = 0$ sur $[a, b]$.
3. **Application :**

(a) Soit P un polynôme réel tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 x^k P(x)dx = 0$.
Montrer que P est nul sur $\mathbb{R}$

(b) Soit f continue sur $[0, 1]$. On note $M = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = M$.
Que peut-on dire de f ?

Problème 2 :

Soit f, g deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$. On se propose de montrer que :

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

1. On pose $P(x) = \displaystyle\int_a^b (f(t) - xg(t))^2 dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) Développer P et calculer son discriminent.

(b) Déterminer le signe de ce discriminent.

(c) Déduire que

$$\int_a^b f(t)g(t) \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$$

2. En élevant au carré l'inégalité demandée, et en utilisant la question 1, conclure.

Problème 3 : On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ***continue convexe*** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f(x)\,dx$$

Remarquez que cette inégalité est analogue à l'inégalité de convexité : *inégalité de Jensen* vue en cours de dérivabilité, en remplaçant la somme discrète par une somme continue : une intégrale.

On se limite au cas : $a = 0$ et $b = 1$.

On note $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ la suite de sommes de Riemann associée à f.

1. Montrer que

$$g(S_n) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

2. En utilisant la continuité de g, déduire que :

$$g\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \leqslant \int_0^1 g\circ f(x)\,dx$$

En effet cette inégalité reste vraie même si g n'est pas continue, mais vous n'avez encore les outils pour le prouver.

Problème 4 :

Soit (a_n) une suite strictement positive telle que la suite $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ converge. On se propose de montrer que : $\left(\Delta_n = \sum_{k=1}^{n}(a_1.a_2\cdots a_k)^{1/k}\right)$ converge et que :

$$\lim_{n\to+\infty}\Delta_n \leqslant e \lim_{n\to+\infty} S_n$$

1. En utilisant la méthode des rectangles, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{n+1}{(n!)^{1/n}} \leq e.$$

2. Montrer que : $a_1a_2\cdots a_n = \dfrac{a_1\cdot 2a_2\cdots\cdot na_n}{n!}$, en déduire que :

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\cdot\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}.$$

(appliquer l'inégalité arithmético-géométrique, voir problèmes ln-exp.)

3. Montrer que, pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{N+1}\sum_{n=1}^{N} na_n.$$

4. Vérifier que : $\dfrac{1}{N+1}\sum_{n=1}^{N} na_n = \dfrac{1}{N+1}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N} \dfrac{a_n}{N+1} \leqslant \dfrac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} R_k$.

   Avec $R_k = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=k}^{N} a_n$.

5. Montrer que $R_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. À l'aide de la définition de la limite, montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} R_k = 0$

7. Conclure.