Série 2 : corrigé

Exercice 1 :

1. On a $\ell < 1$ donc $\exists \ell < a < 1$. Donc $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant N, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a$,

Donc $\displaystyle\prod_{k=N}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant a^{n-N}$ donc $0 < u_{n+1} \leqslant a^{n-N} u_N$, d'où le résultat.

2. On a $\ell > 1$ donc $\exists 1 < a < \ell$, donc $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant N : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$. On conclut comme dans la 1ère question.

3. On pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n$.

Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \to 1$ et pourtant les 2 suites n'ont pas la même limite. Donc on ne peut rien dire.

4. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{n+1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

Exercice 2 :

1.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!}\left(\frac{1}{(n-k)(n-k-1)!} + \frac{1}{(k+1)(n-k-1)!}\right) \\
&= \frac{n!}{k!} \times \frac{(k+1+(n-k))}{(k+1)(n-k-1)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

2. Facile par récurrence.

Exercice 3 :

Par récurrence :

-) $n = 1$: facile.

-) Si le résultat est vrai pour n,

on a :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k\\ &\overset{H.R}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} a_i a_j.\end{aligned}$$

Exercice 4 :

1. On a : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j.$

2. Il suffit de montrer le résultat pour $n = m$ car :

$$\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{j=i}^{m} c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=i}^{m} c_{i,j}$$

On procède alors par récurrence sur m.

-) $m = 1$: ok

-) Si le résultat est vrai pour m, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=i}^{m+1} c_{i,j} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m+1} c_{i,j} + c_{m+1,m+1}\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m} c_{i,j} + \sum_{i=1}^{m} c_{i,m+1} + c_{m+1,m+1}\\ &\overset{\text{HR}}{=} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j} c_{i,j} + \sum_{i=1}^{m+1} c_{i,m+1}\\ &= \sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=1}^{j} c_{i,j}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 5 :

On note S la limite de (S_n)

1. $u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k \\
&= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{N} k u_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{car } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N} k u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right) \\
&= S_N - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} k u_k = S_N - w_N \leqslant S.
\end{aligned}$$

À ce stade on peut conclure que (Δ_n) est convergente car croissante majorée. Reste à montrer que $w_N \to 0$:

$$\begin{aligned}
w_N &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} u_n \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=k}^{N} u_n \\
&\leqslant \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} R_k
\end{aligned}$$

Avec $R_k = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=k}^{N} u_n$. Alors $R_k = S - S_{k-1}$ donc $R_k \to 0$.
Soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N : R_n < \varepsilon/2$,
donc $\sum_{k=N}^{n} R_k < (n-N)\varepsilon/2$ donc $w_n < \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{N-1} R_k + \varepsilon/2$

Or pour n assez grand on a : $\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{N-1} R_k < \varepsilon/2$ car cette suite tend vers 0.
D'où $\exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N', w_n < \varepsilon$.

Finalement $\Delta_n \to S$

Exercice 6 :
Pour $k \geqslant 2$ on a :$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$

La suite est croissante majorée par 3 donc convergente.

Exercice 7 :
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1 : |u_{2n} - \ell| < \varepsilon$ et $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2 : |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$
On pose $N = \max(2N_1 + 1, 2N_2 + 1)$, soit $n \leqslant N$.

(i). Si $n = 2k+1$ alors $k \geqslant N_2$ donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$

(ii). Si $n = 2k$ alors $k \geqslant N_1$ donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$

Donc $\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon$. D'où le résultat.

Exercice 8 :

Pour $\varepsilon = 1/4$, on a $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < 1/4$ et $|u_{n+1} - \ell| < 1/4$.

Donc $|u_n - u_{n+1}| = |u_n - \ell - (u_{n+1} - \ell)| \overset{IT}{\leqslant} |u_n - \ell| + |u_{n+1} - \ell| < 1/2$

Or $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{Z}$ donc $u_n = u_{n+1}$, car sinon $|u_n - u_{n+1}| \geqslant 1$, donc (u_n) est stationnaire à partir de N.

(IT=inégalité triangulaire : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$)

Exercice 9 :

1.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

2. On écrit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k-1}$.

On conclut par récurrence simple.