Série 2 : pour aller plus loin

Les exercices suivants dépassent largement le niveau de maths en bac, donc pas la peine d'y passer trop de temps. Par contre, ils pourront vous aider à réfléchir profondément et à comprendre mieux votre cours. Bon courage !

Exercice 1 :

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} \ell \geqslant 0$

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$ (par la définition de la limite.)
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $u_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$
3. Que peut-on dire si $\ell = 1$?
4. Calculer la limite de $\dfrac{a^n}{n!}$ pour $a > 0$.

Exercice 2 :

On note $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Soit $n \geqslant 2$

1. Montrer que $\forall\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$.
2. Déduire que $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exercice 3 :

Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur n que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$$

Exercice 4 :

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_j b_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.
2. Soient $(c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$., avec $m \leqslant n$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{m} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} c_{i,j}$$

Exercice 5 :

Soit (u_n) une suite à termes >0. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. On suppose que (S_n) converge.

1. Donner la limite de (u_n). (écrire u_n en fonction de S_n)
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$ et $\Delta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$

   Montrer que (Δ_n) converge et a la même limite que (S_n). (utiliser l'exercice 4 pour permuter les sommes).

Exercice 6 :

Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 7 :

Soit (u_n) une suite réelle tq $u_{2n} \underset{+\infty}{\to} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{+\infty}{\to} \ell$

Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\to} \ell$.

Exercice 8 :

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
À l'aide de la définition de la limite, montrer que (u_n) est stationnaire, c'est-à-dire :

$$\exists N \geqslant 0, \forall n \geqslant N : u_n = u_N$$

Exercice 9 :

1. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
2. Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$