3 manières de voir une suite ...

On considère $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la suite harmonique que vous avez rencontré dans plusieurs occasions précédentes. Vous savez bien que : $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$, donc évidement $H_n \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$ car sinon, puisqu'elle est croissante, elle sera convergente vers un certain ℓ et donc $\ell - \ell \geqslant 1/2$ ce qui est absurde. Dans cet exercice on veut s'approcher plus de (H_n) à l'aide d'une suite usuelle.

1. Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une intégrale, que :

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

2. Déduire la limite de $\frac{H_n}{\ln(n)}$.
3. On pose $u_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) Montrer que $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
   (b) Déduire la monotonie de (u_n).
   (c) Conclure que (u_n) converge vers un réel $\gamma > 0$.

γ est appelée la constante d'Euler.

Application

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. On va déterminer la limite de cette suite de 3 manières différentes.

1. (a) En changeant l'indice à l'intérieur de la somme, montrer que : $S_n = H_{2n} - H_n$.
   (b) Montrer que : $S_n = H_{2n} - \ln(2n) - (H_n - \ln(n)) + \ln(2)$. Déduire la limite de (S_n).
2. Montrer que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$. Retrouver la limite de (S_n) à l'aide du théorème de Riemann.
3. En comparant avec une intégrale, montrer que

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant S_n \leqslant \ln(2).$$

Déduire la limite de (S_n).