3 manières de voir une suite : Corrigé

1. $\forall k \geqslant 2, \forall x \in [k-1, k], \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

On a $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ continue sur $[k-1, k]$ et $k-1 \leqslant k$ donc

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}.$$

On somme l'inégalité de 2 à n on obtient par télescopage :

$$H_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(n)$$

donc $H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

De la même façon on a : $\forall k \geqslant 1, \forall x \in [k, k+1], \dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{x}$, donc $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$, on somme encore on obtient : $H_n \geqslant \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$.

D'où

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

Remarque : on a séparé les deux inégalités car dans la première inégalité on avait besoin de $k \geqslant 2$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0.

2. Par gendarmes : $\dfrac{H_n}{\ln(n)} \to 1$.

3. (a) On a $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$.

Et on a : $\forall x \in [n, n+1], \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

On intègre l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dx}{n}$

Finalement on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

(b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant 0$.

(c) (u_n) décroissante positive. Montrons que $\gamma \neq 0$.

$\forall k \geqslant 2, \forall x \in [k, k+1], \dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{x}$, donc $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$, on somme encore on obtient : $H_n - 1 \geqslant \displaystyle\int_2^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(2) \implies u_n \geqslant 1 - \ln(2)$ en $+\infty$ on a :$\gamma \geqslant 1 - \ln(2) > 0$.

Application

1. (a) On par changement d'indice : $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n$.

(b) Il suffit de voir que $\ln(2) = \ln\left(\frac{2n}{n}\right)$.

Pour la limite on a $\lim_{n\to+\infty} H_{2n} - \ln(2n) = \lim_{n\to+\infty} H_n - \ln(n) = \gamma$. Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$.

2. Par Riemann on a : $S_n \to \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$.

3. On a

$$\forall k \in [1, n], \int_k^{k+1} \frac{dx}{n+x} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{n+x}.$$

Par télescopage on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x+n} \leqslant S_n \leqslant \int_0^n \frac{dx}{x+n}$$

Donc

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant S_n \leqslant \ln(2).$$

Gendarmes $\implies S_n \to \ln(2)$.