Bac blanc 6

Exercice 1 :

I- Soit φ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$\varphi(x) = (2-x)e^x - 2$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$
2. Étudier la monotonie de φ puis dresser son tableau de variations
3. Montrer que : $\exists!\alpha \in [1,+\infty[\quad \varphi(\alpha) = 0$ et que $1,59 < \alpha < 1,60$

II- Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \quad ; \quad \forall x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.

1. Étudier la continuité de la fonction f en zéro.
2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. (a) Étudier la dérivabilité de la fonction f en zéro.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que on ait :
   $$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \, ; \quad f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$$
   (c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$, dresser le tableau de variations de f
4. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
5. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$

III-
On pose : $G(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t} dt \quad ; \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt; \quad \forall x \geq 0.$

1. Calculer $G(x)$ en fonction de x puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$.
2. Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. (a) Montrer que : $\forall t \in \left[\ln 2; +\infty\right[\quad ; \quad f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$

(b) En déduire que la fonction F est une fonction majorée sur $\mathbb{R}^+$.

IV- On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = L \in \mathbb{R}$

1. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x \in \mathbb{R}^*); \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} e^{-px}$

   (b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x \in \mathbb{R}^*); 0 \leq \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq \dfrac{\alpha(2-\alpha)}{n}$

   (c) Calculer l'intégrale suivante : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad I_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 e^{-nt}dt$

   (d) Déterminer la limite suivante : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \lim\limits_{x \to +\infty} I_n(x)$

2. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x \in \mathbb{R}^+); \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-nt}dt = F(x) - \sum_{p=1}^{n} I_p(x)$

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*; \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-nt}dt := L_n \in \mathbb{R}$

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad L - L_n = 2\left(1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3}\right)$

   (d) Montrer que la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente

   (e) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right)$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{L}{2}$.

Exercice 2 :

Partie 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $(E) : z^3 + (4\cos\theta - 2)z^2 + (4 - 8\cos\theta)z - 8 = 0; z \in \mathbb{C}; \theta \in]0, \pi[$
1. (a) Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle indépendante de θ.
(b) Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.
2. Soient les points : $A(2); B\left(-2e^{-i\theta}\right); C\left(-2e^{i\theta}\right)$.
(a) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$.
(b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle ABC soit un triangle équilatéral direct.

(c) Déterminer z_E et z_F affixes des points E et F respectivement, milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.

(d) Montrer que : $\left(\frac{z_E}{z_F} \times \frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) \in \mathbb{R}$. Puis en déduire que les points $A; \mathcal{O}; E\,;\ F$ sont cocycliques.

Partie 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On pose : $f(z) = z + \frac{4}{z} \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

1. Déterminer $z_1; z_2$ les solutions de l'équation $(E) : f(z) = -2$.
2. (a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique avec $Im\,(z_1) > Im\,(z_2)$
   (b) Montrer que : $z_1^{2016} + z_2^{2016} = 2^{2017}$.
3. Soient les points : $A(\alpha); B\,(z_1)\,; C\,(z_2)\,; \alpha \in \mathbb{R}^+$.
   (a) Déterminer la valeur de α pour laquelle ABC soit équilatéral.
   (b) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$: $\quad f(z) = \overline{f(z)} \quad \Leftrightarrow \quad (z - \bar{z})(z\bar{z} - 4) = 0$
   (c) En déduire (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$
   (d) Vérifier que les points A, B, C appartiennent à (Γ)

Exercice 3 :

Partie 1

1. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3. Soit l'équation $(E) : ax \equiv 1[p] \quad ; \quad x \in \mathbb{Z}; a \in A_p = \{1, 2, \cdots, (p-1)\}$.
   (a) Montrer que le nombre a^{p-2} est une solution de l'équation (E).
   (b) Soit r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p.
   Montrer que $r \in A_p$ et que r est la solution de (E) dans A_p.
2. Dans ce qui suit, on prend $p = 31$.
   (a) Déterminer les valeurs de r pour lesquelles on ait : $a = 2$ puis $a = 3$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations : $(F_1) : 2x \equiv 1[31]; (F_2) : 3x \equiv 1[31]$
   (c) En dédurie la résolution de l'équation $(F) : 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0\ [31]$

Partie 2

On se propose de déterminer les couples $(n, m) \in \mathbb{N}^{2*}$ vérifiant la relation suivante : $(F) : 7^n - 3 \times 2^m = 1$

1. Montrer qu'il y a exactement deux couples de solutions pour $m \leq 4$.
2. On suppose maintenant que : $m \geq 5$.
   (a) Montrer que si le couple (n, m) vérifie (F) alors $7^n \equiv 1[32]$.
   (b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7 , montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   (c) En déduire que si (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1[5]$.
   (d) Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) ?
3. Résoudre ainsi dans $\mathbb{N}^{2*}$ l'équation (F)

Exercice 4 :

Partie 1

Soit $G = [0, 1[$, Et on considère l'application définie par :

$$\forall (a, b) \in G^2 \quad ; \quad a * b = a + b - E(a + b)$$

$E(x)$ est la partie entière du nombre réel x.

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur G.
2. Montrer que la loi $*$ est commutative et associative sur G.
3. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera
4. Déterminer le symétrique d'un élément a de G par la loi $*$.
5. Résoudre dans G l'équation (F) : $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois le } x} = \frac{1}{n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$

Partie 2

Rappel : $(\mathbb{R}, +, x)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0; 1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On pose : $\forall x, y \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{1}{2} \right\} : x * y = x + y - xy$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

2. Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.
3. Montrer que $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\};*\right)$ est un groupe commutatif.

   Soit $\mathcal{A}=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}\quad;\quad x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$
4. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
5. On considère l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} f:\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\};*\right) &\mapsto (\mathcal{A},\times)\\ x &\mapsto M(x)\end{aligned}$$

   (a) Montrer que l'application f est un isomorphisme.

   (b) En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(\mathcal{A},\times)$