BAC BLANC 3

Exercice 1 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ des nombres réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2$.

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) \geq 0$.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,, f(x) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^2$.
3. Soit Δ les descriminant de f.
   Montrer que $\Delta \leq 0$.
4. Montrer que $\Delta = 4\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$.
5. Déduire que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.
6. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{i^3}\right)^2 \leq n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{2i^3}$.

Exercice 2 :

Partie I :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x(x+2)}$.

1. Montrer que f est définie sur $I =]-\infty, -2] \cup [-2, 0] \cup [0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur I.
3. Montrer que f est dérivable sur $I \setminus \{-2, 0\}$.
4. Indiquer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
5. Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = -2$ et au voisinage de $x = 0$.
6. (a) Montrer que $(\forall x \in I \setminus \{-2, 0\}) : f'(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2(x+2)} f(x)$.

   (b) Etudier le sens de variations de f.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
7. (a) Préciser la nature de l'asymptote de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
   (b) Donner l'emplacement de C_f par rapport à ces asymptotes.
8. (a) Etudier la concavité de f.
   (b) Préciser les points d'inflexion de C_f.
9. Tracer C_f.

Partie II :

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$.

On pose $P(x) = \displaystyle\int_a^b (f(t)x + g(t))^2 dt$.

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : P(x) \geq 0$.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : P(x) = \left(\displaystyle\int_a^b f^2(t)dt\right) x^2 + 2\left(\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt\right) x + \displaystyle\int_a^b g^2(t)dt$.
3. Calculer le discriminant Δ de P.
   En déduire que : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\displaystyle\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt}$
4. **Application :** Soit $x \in [2\pi, 3\pi]$.
   Montrer que $\displaystyle\int_{2\pi}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt \leq \sqrt{x - \cos x \sin x}$.

Partie III :

On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\int_{\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$.

1. Remarquer que $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin t$ garde le même signe sur $[k\pi, (k+1)\pi]$.
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \left|\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x dx\right|$.
2. Déduire que $I_n \geq \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$.
3. On admet que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.
   Montrer que (I_n) diverge vers $+\infty$.

Partie IV :

On pose $\forall x \geq \pi, F(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$.

1. Montrer que $\forall x \geq \pi, F(x) = -\dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{1}{\pi} - \displaystyle\int_{\pi}^{x} \dfrac{\cos t}{t^2} dt$.
2. Montrer que $\forall x \geq \pi, \left| \displaystyle\int_{\pi}^{x} \dfrac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \left| \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{x} \right|$.
3. Montrer que F est majorée.
   On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = F(n\pi)$.
4. Montrer que (J_n) ne peut pas diverger vers $+\infty$.

Exercice 3 : (Les deux parties sont indépendantes.) **Partie I** :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

1. (a) Montrer que $arctan(\alpha)$ est un argument de $1 + i\alpha$.
   (b) Soit z un nombre complexe non imaginaire pur. Montrer qu'un argument de z est $\arctan \dfrac{Im(z)}{Re(z)}$ si $0 < Re(z)$,et $\arctan \dfrac{Im(z)}{Re(z)} + \pi$ si $Re(z) < 0$.
2. (a) Soient θ un réel non congru à $\frac{\pi}{2}[\pi]$, et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Donner un argument de $(1 + i\tan(\theta))^n$.
   (b) On suppose que $(1 + i\tan(\theta))^n$ n'est pas un imaginaire pur.
   On pose : $P_n(X) = (1 + iX)^n$.
   Montrer que $\tan(n\theta) = \dfrac{Im(P_n(\tan(\theta)))}{Re(P_n(\tan(\theta)))}$
   Pour tout réel x tel que $Re(P_n(x)) \neq 0$ on pose : $F_n(x) = \dfrac{Im(P_n(x))}{Re(P_n(x))}$
   (c) Soit $\phi \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\tan(\phi)$ et $F_n(\tan(\phi))$ sont bien définis, alors $F_n(\tan(\phi)) = \tan(n\phi)$.
   (d) Donner le domaine de définition de F_5.
   (e) En déduire $\tan(\dfrac{\pi}{10})$.
   (f) Calculer $F_5(x)$ pour tout x dans son le domaine de définition.

Partie II :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$. On veut montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$.

1. (a) Montrer que $\sin(\beta) = -\sin(\alpha)$
   (b) Déduire que $e^{i\alpha} = e^{-i\beta}$ ou $e^{i\alpha} = -e^{i\beta}$.
2. Montrer que $e^{i\alpha} \neq -e^{i\beta}$.

3. Montrer que $e^{i\alpha}$ est solution de $1+z+z^2=0$
4. Trouver les valeurs possibles du couple $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$.
5. Déduire que $1+e^{2i\alpha}+e^{2i\beta}=0$.
6. En donnant des valeurs convenables à α et β déduire finalement que $e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}=0$.

Exercice 4 : (Les trois parties sont indépendantes.) **Partie I :**

Soient $a, b, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \equiv b[n]$.

1. Montrer que $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$.

   Si $b \notin \{0, a\}$, trouver une démonstration, autre que la réccurence, à cette question.
2. Déduire que $a^n \equiv b^n[n^2]$.

Partie II :

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers premiers. On sait que $\mathbb{P}$ est infini. Ici on montre que E est infini, où $E = \{p \in \mathbb{P}/p \equiv 1[4]\}$.

1. Soient $x \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{P}^+$ impair tel que $x^2+1 \equiv 0[p]$.
   Montrer que $p \in E$.
   (Discuter les quatres cas de congruence modulo 4).
2. On suppose que E est fini. On pose alors $E = \{p_1, ..., p_n\}$.
   (a) On considère $N = (2p_1...p_n)^2 + 1$. Soit p un diviseur premier de N.
   Montrer que p n'est pas dans E.
   (b) Trouver une contradiction. (Utiliser la question1).
3. Conclure.

Partie III :

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n-$ièmes de 1.

1. Montrer que $(\forall m, n \in \mathbb{N}^*)$: $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m \Leftrightarrow n$ divise m
2. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$,
   (a) Montrer que $\mathbb{U}_{n\wedge m} \subset \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$.
   En utilisant Bezout montrer que $z \in \mathbb{U}_{n\wedge m}$.
   (c) Déduire que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{n\wedge m}$.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I :

1. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
2. On suppose que $n \in \mathbb{P}^*$,
   Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \left\{\overline{0}\right\}, \times)$ est un groupe.
3. Déduire que $\forall p \in \mathbb{P}^*, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un coprs.

Partie II : On pose $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère la famille $\beta = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ et la matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $\mathcal{A} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$.
3. Montrer que β est libre.
4. Déduire la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On note $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Montrer que $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.

$\mathcal{FIN}$