Bac Blanc 13

Exercice 1 :

Partie 1 : Soit la fonction g définie sur $]0;1]$ par $g(x)=\sqrt{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

1. (a) Étudier la dérivabilité de g à gauche en 1.
   (b) Montrer que g est dérivable sur $]0;1]$, puis dresser le tableau de variation de g.
   (c) Construire la courbe $\mathcal{C}_g$ de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
2. (a) Justifier que g réalise une bijection de $]0;1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.
   (c) Tracer dans le même repère la courbe $\mathcal{C}_{g^{-1}}$.

Partie 2 : On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.
3. (a) Vérifier que : $\forall t\in[2;+\infty[$, on a : $e^{-t^2}\leqslant e^{-2t}$.
   (b) En déduire que pour tout $x\geqslant 2$, $F(x)\leqslant \dfrac{1-e^{-4-2x}}{2e^4}+\displaystyle\int_2^x e^{-t^2}\,dt$.
4. Prouver que pour tout $x\geqslant 2$, $F(x)\leqslant \dfrac{1}{2e^4}+\displaystyle\int_2^x e^{-t^2}\,dt$.
5. Montrer que F est majorée sur $\mathbb{R}$ et que F possède une limite finie ℓ en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite).

Partie 3 :

1. Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $G(x)=F(x\sqrt{n})$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que G est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer $G'(x)$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$.
2. (a) Montrer que : $\forall t\in\mathbb{R}$, on a : $e^t\geqslant 1+t$ et que pour tout $t\geqslant 0$, on a : $\dfrac{1}{e^t}\leqslant\dfrac{1}{1+t}$.
   (b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt\geqslant \sqrt{n}\int_0^1(1-x^2)^n dx$ et $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}dt\leqslant\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$.

Partie 4 :

1. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$ et $v_n=(n+1)u_{n+1}$.
   (a) Calculer u_1 et u_2. Déterminer la monotonie de (u_n).
   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}u_n$.

2. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \leqslant 1$$

et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$.

3. (a) Vérifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sqrt{n} u_n = \sqrt{\frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot v_{n-1}}.$$

(b) En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} u_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

4. Montrer que :

$$u_{2n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2n-2} x dx.$$

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sqrt{n} u_{2n+1} \leqslant G(1) \leqslant \sqrt{n} u_{2n-2}.$$

6. Montrer alors que :

$$\lim_{n \to +\infty} G(1) = l = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2 :

Pour $x \geqslant 1$, on considère : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

1. (a) Soient $x, y \in [1, +\infty[$, montrer que $|f(x) - f(y)| \leqslant \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.
   (b) Déduire que f est continue sur $[1, +\infty[$.
2. Calculer $f(1)$.
3. Déterminer la monotonie de f.
4. Calculer $f(x+1) - f(x)$ pour $x \geqslant 1$.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
6. (a) Montrer que $\forall x \geqslant 1, f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{(t+1)^2} dt$.
   (b) Montrer que $\left| \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{(t+1)^2} dt \right| \leqslant \dfrac{1}{x+1}$.
   (c) Déduire que $2x f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 3 :

Les parties I et II sont indépendantes et $\theta \in \left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$.

I

Soient z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(E) : z^2 + 2iz - 1 + ie^{2i\theta} = 0.$$

1. Sans résoudre l'équation (E), montrer que :

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4} \ [2\pi].$$

2. Déterminer la valeur de θ pour laquelle $1 - i$ est solution de (E).

   Dans ce cas, écrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique.

3. Déterminer en fonction de θ les solutions de l'équation (E).

II

$ABCD$ est un trapèze isocèle dont les bases sont $[BC]$ et $[AD]$. On considère la rotation R de centre C et d'angle θ et on pose :

$$A' = R(A) \quad \text{et} \quad B' = R(B).$$

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AD]$ et $[B'C]$.
On munit le plan complexe du repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$ tel que :

$$\text{aff}(C) = a \quad \text{et} \quad \text{aff}(D) = b + ic \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Vérifier que :

$$\text{aff}(B) = -a \quad \text{et} \quad \text{aff}(A) = -b + ic.$$

2. Montrer que :

$$\text{aff}(A') = a(1 - e^{i\theta}) + (-b + ic)e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \text{aff}(B') = a(1 - 2e^{i\theta}).$$

3. Prouver que :

$$\frac{z_J - z_I}{z_K - z_I} = \frac{a + b}{2a} + \frac{ic}{2a} \times \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}},$$

   puis en déduire que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 4 :

Partie 1 :

On ordonne l'ensemble des premiers positifs et on note p_n le n-ème nombre premier dans $\mathbb{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe au moins un nombre premier entre n et $n! + 1$.
2. Montrer que $p_n \leqslant p_1 \cdots p_{n-1} + 1$.
3. Déduire que $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

Partie 2 :

Soit l'équation : $(E) : x^2(x+y) = y^2(x-y)^2; (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Soit (x,y) une solution de l'équation (E). On pose : $d = x \wedge y$; $x = ad$; $y = bd$.

1. (a) Vérifier que : $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.
   (b) En déduire que : $b = 1$.
   (c) Montrer que $a \neq 1$ et que le nombre $(a-1)$ divise $(a+1)$.
   (d) En déduire que : $a = 2$, ou $a = 3$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).

Exercice 5 :

Soit $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la transposée de M par : ${}^tM = (a_{ji})$.

On définit également le produit matriciel de deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ par : $[A \times B]_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

On note finalement $Tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ et on l'appelle trace de A. (C'est la somme des éléments de la diagonale de A.)

1. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB \times {}^tA$.
2. Montrer que $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$ et que $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$.
3. Montrer $Tr({}^tA) = Tr(A)$.
4. (a) Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
   (b) Déduire qu'il n'existe pas de couple (A,B) vérifiant $AB - BA = I_n$.
5. Montrer que ${}^t({}^tA) = A$.
6. Montrer que ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et que ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^tA$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = A$. (matrices symétriques).

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA = -A$. (matrices antisymétriques).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7. Montrer que ${}^tAA$, ${}^tA + A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
8. On suppose que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.