Bac Blanc 14

Exercice 1 :

Partie A

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 2e^x + 2 & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \\ 1 + x\ln(1+x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Étudier les branches infinies de (C).
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
   (c) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que la partie de la courbe (C) correspondant à l'intervalle $]-\infty; 0]$ admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique a et que $1 < a < 2$.
   (b) Tracer la droite $(D) : y = 2$ et la courbe (C).
4. Soit λ un réel strictement négatif.
   (a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine du plan limité par la courbe (C) la droite (D) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0]$.

1. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle K que l'on précisera.
2. Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Sur quel intervalle g^{-1} est-elle dérivable ?
4. Montrer que pour tout $x \in [1, 2[$ on a : $g^{-1}(x) = \ln(1 - \sqrt{2 - x})$.
5. Montrer que :

$$\int_{g^{-1}(x)}^{0} g^2(t)dt = \frac{5\ln 2}{4} - A(-\ln 2).$$

Partie C

Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$.

1.(a) Vérifier que pour tout $x \in [0;1]$ on a :

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

puis calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$.

(b) En déduire que $I_1 = \frac{1}{4}$.

2. Calculer l'aire A du domaine du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

3.(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

(b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 2 :

Soit $r \in]0,1[$, pour $t \in]0,+\infty[$, on pose $f(t) = t^r + 1(1+t)^r$.

1. Étudier la continuité, la dérivabilité et la monotonie de f.
2. Déduire que $\forall x, y > 0, \quad (x+y)^r \leqslant x^r + y^r$.
3. Montrer que si $r \geqslant 1$, alors $\forall x, y > 0, \quad (x+y)^r \geqslant x^r + y^r$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|$.
5. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$$

Exercice 3 :

Partie A

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

1. Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell.$$

(multiplier les deux côtés par $1 - z$)

2. Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.
3. En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Partie B

On note E l'équation à valeurs dans $\mathbb{C}$: $z + \overline{z} = |z|$.

1. Montrer que pour résoudre E, il suffit de déterminer $\theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 1$.
2. Déterminer les solutions de cette dernière équation.
3. Déduire que

$$\mathcal{S}_E = \left\{ re^{i\theta} \,|r > 0 \,, \theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \right\}$$

Partie C

Soient $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

1. Montrer que $iA_n + B_n = (1 + e^{ix})^n$
2. Déduire les expressions de A_n et B_n.

Exercice 4 :

Partie A

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q

1. (a) Montrer que p divise $r^{p-1} - 1$ et que q divise $r^{q-1} - 1$
   (b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$
   (c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2025^{192}x \equiv 3[221]$ (On donne : $221 = 13 \times 17$ et $2025 = 3^4 \times 5^2$)

Partie B

On donne : 1013 est premier.

1. Montrer que $a \wedge 1013 = 1 \implies a^{2024} \equiv 1[1013]$.
2. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^{2023} \equiv 2[1013]$. Soit x une solution de (E).
   (a) Montrer que $x \wedge 1013 = 1$.
   (b) Déduire les solutions de (E).

Partie C

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

1. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, a_n est impair.
   (b) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 8 de 5^n.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1[8]$.
2. (a) Montrer que si

$$\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$$

alors $x \equiv 257[1000]$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_n \equiv 257[1000]$.
   (c) Quels sont les trois derniers chiffres de

$$\left(2 \times 5^{2020} + 7\right) \times \left(2 \times 5^{2021} + 7\right)?$$

3. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.
   (b) Soit d le PGCD de a_{2n} et a_{2n+1}. Montrer que d est différent de 7.
   (c) Trouver alors d.
4. Soit p un nombre premier, déterminer la valeur de p pour que a_p soit divisible par p.

Exercice 5 :

Soit m un nombre réel. On pose $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M_{(x;y)} = \begin{pmatrix} x & -my \\ y & x \end{pmatrix} \Big/ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. (a) Vérifier que $J^2 + mI = O$ et que $\forall M_{(x;y)} \in E$, $M_{(x;y)} = xI + yJ$.
   (b) Montrer que E est une partie stable dans $(M_2(\mathbb{R}); \times)$.
   (c) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire.
   (d) Montrer que si $m \leqslant 0$ alors l'anneau $(E; +; \times)$ n'est pas intègre.
2. On suppose dans cette partie que $m > 0$ et on pose $\omega = \mathrm{i}\sqrt{m}$.
   (a) Montrer que $(1; \omega)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}; +; \cdot)$.
   (b) Soient $E^* = E \setminus \{O\}$ et l'application

$$h : \mathbb{C}^* \to E^* \quad \text{où} \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2$$

$$x + \omega y \mapsto M_{(x;y)}$$

Montrer que h est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ vers $(E^*; \times)$ puis en déduire la structure de $(E^*; \times)$.
   (c) En utilisant les questions précédentes, montrer que $(E; +; \times)$ est un corps $\iff$ $m > 0$.

3. On suppose dans cette partie que $m = 1$. (a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n en fonction de n où $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Résoudre dans $(E; +; \times)$ l'équation $X^3 = -I$.