Bac Blanc 16

Exercice 1

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On rappelle aussi que $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ est le groupe des inversibles de $M_2(\mathbb{R})$.
On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = I_2 \right\}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

1. (a) Montrer que $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$

   (b) Montrer que $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = \cos(\alpha) \\ b = \pm \sin(\alpha) \\ c = \sin(\beta) \\ d = \pm \cos(\beta) \end{cases}$

   (c) Déduire que $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

   (d) Vérifier finalement que

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \Big/ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

On note dans la suite $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ et $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que $R_{\alpha+\alpha'} = R_\alpha R_{\alpha'}$, $R_{\alpha-\alpha'} = S_\alpha S_{\alpha'}$, $R_\alpha S_{\alpha'} = S_{\alpha+\alpha'}$ et $S_\alpha R_{\alpha'} = S_{\alpha-\alpha'}$.

   (b) Montrer que $(E, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ R_\alpha^n = R_{n\alpha}$.

   (b) On suppose que $\exists\, n \in \mathbb{N}^*, R_\alpha^n = I_2$. Montrer que $\dfrac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$.

   (c) Montrer que $\dfrac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q} \implies \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ R_\alpha^n = I_2$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{N}$ et p un diviseur premier de $a^2 + a + 1$ distinct de 3.

1. Démontrer que a et p sont premiers entre eux.
2. On note x la classe de a dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Démontrer que $x^3 = 1$.
3. Démontrer que $x \neq 1$.
4. En déduire que p est congru à 1 modulo 3.
5. En prenant a sous la forme $N!$, démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 6.
6. Démontrer que, pour $n \geqslant 3$, $N! - 1$ a au moins un diviseur premier congru à 5 modulo 6. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Exercice 3

Partie A

On considère la suite $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. (a) Calculer $1 - u_n$.
   (b) Déduire que $u_n \to 0$.
2. Montrer que $1 - u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.
3. Montrer que $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
4. Montrer que $n(1-u_n) \to \ln(2)$.

Partie B

On considère les deux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ définies par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{n}\right)$$

et

$$b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \left(\arctan\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2$$

1. calculer $\int_0^1 \arctan(t)dt$ (utiliser une intégration par parties)
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$
4. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n}\arctan\left(\frac{k}{n}\right)\right)$
   (a) Montrer que : $(\forall x \geqslant 0)$: $x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

(b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_n - \frac{1}{2}b_n \leqslant \ln(P_n) \leqslant a_n$

(c) Déduire la limite de la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie C

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \ln(1+e^{-t})dt, \; x \neq 0 \\ F(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1. Justifier que $D_F = \mathbb{R}$.
2. Justifier que $\forall t \in \mathbb{R} : \ln(1+e^t) = t + \ln(1+e^{-t})$ en déduire à l'aide d'une intégration par changement de variable que
$$\forall x \in \mathbb{R} : F(-x) = \frac{x}{2} + F(x)$$
3. En utilisant la formule de la moyenne montrer $\forall x > 0 : \ln(1+e^{-x}) \leqslant F(x) \leqslant \ln(2)$.
4. Déduire que F est continue en 0.
5. Montrer que $\forall u > 0 : \ln(1+u) \leqslant u$ en déduire :
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$
6. En utilisant la question 2 et 5 montrer que la droite $(D) : y = -\frac{x}{2}$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_F)$ au voisinage de $-\infty$.
7. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ vérifier que
$$\frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{1}{x^2}\int_0^x \ln\left(\frac{1+e^{-t}}{2}\right)dt$$
8. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$G(x) = \int_0^x \ln\left(\frac{1+e^{-t}}{2}\right)dt$$
   (a) Montrer que G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $G(0) = G'(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$: $G''(x) = \frac{-1}{1+e^x}$.

   (b) Soit $x \geq 0$ considérons la fonction φ définie sur $[0,x]$ par $\varphi(t) = G(t) - \frac{1}{2}At^2$ où A est tel que $\varphi(x) = 0$.

   En appliquant Rolle à φ puis à φ' sur $[0,x]$ montrer que $\exists c \in]0,x[$: $G''(c) = A$.

(c) Déduire que $\exists c \in]0, x[: \dfrac{G(x)}{x^2} = \dfrac{-1}{2[e^c + 1]}$.

(d) Montrer que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = -\frac{1}{4}$.

9. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^* : xF'(x) = \ln(1 + e^{-x}) - F(x)$.

10. Donner le tableau de variation de F.

Exercice 4

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
1. Montrer que $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ et que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1$ et z_2 sont dans la même demi-droite (ont même argument mod 2π).
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^*$.
(a) Montrer par récurrence que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

On suppose que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \text{tous les } z_k \text{ sont sur la même demi-droite.}$$

Soit $z_{n+1} \in \mathbb{C}^*$ tel que $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$.
(b) Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}|.$$

(c) Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Déduire que $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, $\exists\, \lambda_k > 0$, $z_k = \lambda_k e^{i\theta}$.
(d) Montrer que $\exists\, \lambda > 0, z_{n+1} = \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) e^{i\theta}$.
(e) Conclure que tous les z_k sont la même demi-droite.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}, \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \text{tous les } z_k \text{ sont sur la même demi-droite.}$$

$\mathcal{FIN}$