# BAC BLANC 10

## Exercice 1 :

### Partie I :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$ et $I_n > 0$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4. Donner une expression de $I_n$ à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$. Montrer que :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

### Partie II :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer $I_0$ et $I_1$.
2. Établir une relation liant $I_n$ et $I_{n+1}$.
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

4. Déterminer la limite puis un équivalent simple de $(I_n)$.
5. Soit $(u_n)$ une suite réelle définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n.$$

On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \to +\infty$.

**Exercice 2 :**

**Partie 1 :**

1. (a) Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}; \dfrac{t^3+t}{t+1} = t^2 - t + 2 - \dfrac{2}{t+1}$

(b) Calculer l'intégrale suivante : $\quad I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}\right) dx$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie ainsi :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad : \quad u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{\sqrt{n}+\sqrt{k}}\right)$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n)$

**Partie 2 :**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}e^{-t^2}\right) dt \quad ; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = \ln 2 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); x + 1 \leqslant e^x$

(b) En déduire que : $\forall t > 0; \left(\dfrac{1}{t} - t\right) \leq \left(\dfrac{1}{t}e^{-t^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{t}$

(c) Montrer que : $\forall x > 0 \quad ; \quad \left(\ln 2 - \dfrac{3}{2}x^2\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln 2$

(d) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ à droite en 0 .

2. (a) Montrer que $f$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Puis montrer que : $\forall x > 0 \quad ; \quad f'(x) = \dfrac{e^{-4x^2}}{x}\left(1 - e^{3x^2}\right)$

Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

3. (a) Montrer que $f$ est une bijection de $[0, +\infty[$ vers $J$ à déterminer.

(b) Construire les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dan s le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

---

**Exercice 3 :**

**Partie 1**

1. Soit : $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $m \wedge n = 1$.

(a) Montrer que : $\left(2m^2 + n^2\right) \not\equiv 0[5]$.

(b) En déduire que : $\left(2m^2+n^2\right)\wedge 5=1$.

2. Soit l'équation : (E) : $2x^3+x-5=0; x\in\mathbb{R}$

(a)Montrer que (E) admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $1<\alpha<2$

(b) On suppose que : $\alpha=\dfrac{m}{n}; m\wedge n=1; \quad (m,n)\in\mathbb{N}^2$

Vérifier que : $\left(2m^2+n^2\right)m=5n^3$. Puis montrer que $m=5$.

(c) En déduire que $\alpha$ est irrationnel.

**Partie 2**

Soit l'équation : $(E)$ : $16x-5y=65 \quad ; \quad (x,y)\in\mathbb{Z}^2$.

On désigne par $S$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).

1. Montrer l'implication suivante : $(x,y)\in S\Rightarrow x\equiv 0\ [5]$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$.

3.On pose : $x\wedge y=d; \forall(x,y)\in S$

(a) Déterminer les valeurs possibles de l'entier naturel $d$.

(b) Déterminer les éléments $(x,y)$ de $S$ vérifiant $d=5$.

4. Soit $N=\overline{abc}_{(10)}$ un entier naturel écrit dans le système de numération décimale (avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$ ), On pose : $R(N)=\overline{cba}_{(10)}$.

(a) Montrer l'implication : $R(N)=4N-9 \quad\Rightarrow\quad 133a+10b=32c+3$

(b) En déduire que : $a=1$.

(c) Déterminer les entiers naturels N pour lesquels : $R(N)=4N-9$

---

**Exercice 4 :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

Soit l'équation $(E)$ : $(1-i)z^2-2(a+1)z+(1+i)\left(1+a^2\right)=0$

Avec : $z\in\mathbb{C}; a\in\mathbb{C}\backslash\{i,-i\}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

Soient : $A(a) \quad ; \quad B(\beta) \quad ; \quad C(\alpha); \alpha=a+i \quad ; \quad \beta=1+ai$

2. On suppose dans cette question que $a=e^{i\theta}; \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

Écrire $\alpha$ et $\beta$ sous la forme trigonométrique.

3. (a) Montrer l'équivalence suivante : $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad |a|=1$

(b) Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels on ait : les points $0; B; C$ soient alignés.

4. On suppose dans cette question que :

$$|a|=1 \quad \text{et} \quad a^2+a(2i-1)-1\neq 0$$

Montrer que : $\left(\dfrac{\alpha^2}{a}\right)\in i\mathbb{R}^*$

(b) Montrer qu'il existe un nombre complexe $\omega$ tel que :

$$\frac{\alpha^2-\omega}{a-\omega}=i \quad \text{et} \quad \omega \neq 0$$

(c) Montrer que les points $\mathcal{O};\Omega;D;A$ sont cocycliques, $\Omega(\omega);D\left(\alpha^2\right)$

(d) Soit (C) le cercle circonscrit au quadrilatère $\Omega DAO$.

Soit $R=$ rotation $\left(\Omega,\dfrac{\pi}{2}\right)$, Montrer que $R(A)=D$, en déduire le rayon de $(C)$.

---

**Exercice 5 :**

Soient $\quad E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x+y \end{pmatrix};(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \quad ; \quad J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Vérifier que : $I\in E$ et $J\in E$
   (b) Montrer que $E$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.
2. (a) Vérifier que : $J^2=J-I$
   En déduire que $E$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
3. Montrer que $(E,+,x)$ est un anneau commutatif et unitaire.
4. (a) Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+xy+y^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=y=0$
   (b) On pose : $\Delta=x^2+xy+y^2 \quad ; \quad (x,y)\in\mathbb{R}^{2*}$
   Calculer le produit matriciel suivant : $M(x,y)\times M\left(\dfrac{x+y}{\Delta};\dfrac{-y}{\Delta}\right)$
   (c) En déduire que $(E,+,x)$ est un corps commutatif.
5. On munit $F=\mathbb{R}^{2*}$ par la loi de composition interne ainsi proposée :

$$\forall(x,y),(a,b)\in F \quad ; \quad (x,y)\mathrm{T}(a,b)=(ax-by;ay+bx+by)$$

   On considère l'application $\varphi$ définie par :

$$\begin{aligned}\varphi:(F,\ \mathrm{T}) &\mapsto (E,\times)\\ (x,y) &\mapsto M(x,y)\end{aligned}$$

   (a) Montrer que l'application $\varphi$ est un isomorphisme de $(F,T)$ vers $(E,\times)$
   (b) En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(F,\ \mathrm{T})$.