Encore de l'analyse !

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x\ln^n(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm).

Partie A

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.
   (c) Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x > 0$.
2. (a) Dresser le tableau de variation de f_n, on distinguera deux cas suivant la parité de n.
   (b) Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par trois points fixes : l'origine du repère et deux autres points A et B tels que $0 < x_A < x_B$.
3. (a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et construire ces deux courbes dans le même repère.
   (b) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Partie B

On pose $F_n(\alpha) = \int_\alpha^1 f_n(x)dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0;1]$.

1. (a) Sans calculer $F_n(\alpha)$, prouver que $F_n(\alpha)$ admet une limite finie u_n lorsque α tend vers 0^+.
   (b) Calculer $F_1(\alpha)$, en déduire que $u_1 = -\dfrac{1}{4}$.
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall \alpha \in]0;1], \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } F_{n+1}(\alpha) = \frac{-\alpha^2}{2}\ln^{n+1}(\alpha) - \frac{n+1}{2}F_n(\alpha).$$

   (b) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}u_n$.
3. Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

(a) Montrer que : $\mathcal{A}_1 = 4|u_1|\, cm^2$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathcal{A}_n = \dfrac{n!}{2^n - 1}$.

(c) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $\mathcal{A}_{n+1} \geqslant 2\mathcal{A}_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n$.

Partie C

On pose $G(x) = \int_e^x t\ln(t)dt$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Sans calculer $G(x)$, montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.
   (b) Déterminer le sens de variation de G.
2. (a) Calculer $G(x)$ en fonction de x.
   (b) Dresser le tableau de variation de G.

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = \int_0^{\ln 2} 1dx$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad U_n = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}\right)^n dx$$

1. Calculer U_0 et U_1.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \ln 2]$:

$$\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = -1 + \frac{2}{1 + e^{-2x}}.$$

   (b) Montrer que pour tout $x \in [0, \ln 2]$:

$$0 \leqslant \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \leqslant \frac{3}{5}.$$

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant U_n \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^n \ln 2.$$

   (d) Déterminer alors la limite de la suite (U_n) en $+\infty$.

Exercice 3 :

On considère les deux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ définies par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{n}\right)$$

et

$$b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \left(\arctan\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2$$

1. calculer $\int_0^1 \arctan(t)dt$ (utiliser une intégration par parties)
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$
4. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\arctan\left(\frac{k}{n}\right)\right)$
   (a) Montrer que : $(\forall x \geqslant 0) : x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
   (b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : a_n - \frac{1}{2}b_n \leqslant \ln(P_n) \leqslant a_n$
   (c) Déduire la limite de la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$