Une Grande généralisation du théorème de Fermat

Soit $p \in \mathbb{P}^+$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
On veut montrer que $x \wedge p = 1 \implies x^{p^{k-1}(p-1)} \equiv 1[p^k]$.
Soit alors $x \wedge p = 1$
1. Montrer que le résultat est vrai pour $k = 1$.
2. Montrer que $x^{p^{k+1}-p^k} - 1 = (x^{p^k-p^{k-1}} - 1)\sum_{i=0}^{p-1} x^{i(p^k-p^{k-1})}$
3. Montrer que $p \mid \sum_{i=0}^{p-1} x^{i(p^k-p^{k-1})}$.
4. Montrer par récurrence sur k que $x^{p^{k-1}(p-1)} \equiv 1[p^k]$.

On veut maintenant encore généraliser ce résultat !

Soit $n \geqslant 2$, on pose $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de n. On pose $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k}\left(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1}\right)$
On veut montrer que $x \wedge n = 1 \implies x^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.
5. Montrer que la cas $k = 1$ est vrai.
6. Montrer que $m \wedge n = 1 \implies \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

On suppose que le résultat est vrai pour $k \geqslant 1$. Soit $n = \prod_{i=1}^{k+1} p_i^{\alpha_i}$.

Soit $x \wedge n = 1$.
7. Montrer que $\varphi(n) = \left(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} - p_{k+1}^{\alpha_{k+1}-1}\right)\varphi(n')$ avec $n' = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$
8. Montrer que $x^{\varphi(n')} \wedge p_{k+1} = 1$. Déduire que $x^{\varphi(n)} \equiv 1[p_{k+1}]$.
9. Montrer que $x^{\varphi(n)} \equiv 1[n']$.
10. Observer que $n' \wedge p_{k+1} = 1$ et déduire que $x^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.