Relations Fonction-Primitive

Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. On suppose que $f \underset{+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leqslant M$.
   (b) Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |F(x)| \leqslant Mx$.

2. Déterminer $\lim\limits_{0^+} \dfrac{F(x)}{x}$.

3. On suppose que $f > 0$ décroissante et que F est bornée.
   (a) Montrer que $\forall x \geqslant 0, 2xf(2x) \leqslant 2(F(2x) - F(x))$
   (b) Déduire que $xf(x) \underset{+\infty}{\to} 0$.

4. On suppose encore que $f > 0$ et F bornée. On suppose de plus que $f \to \ell \geqslant 0$. On veut montrer que $\ell = 0$. On suppose par absurde que $\ell > 0$.
   (a) Montrer que $\exists A > 0, \forall x \geqslant A, f(x) \geqslant \ell/2$.
   (b) Déduire que $F \to +\infty$.
   (c) Conclure que $\ell = 0$.

5. On suppose que $F(1) = 1/2$. Montrons que f admet un point fixe sur $[0, 1]$.
   (a) Montrer que $\int_0^1 (f(x) - x)dx = 0$. On pose $g(x) = f(x) - x$.

   (b) On suppose par absurde que $g > 0$ sur $[0, 1]$. On pose $g(x_0) = \min\limits_{[0,1]} g(x) > 0$.
Montrer que $g \geqslant g(x_0)/2$ sur $[0, 1]$.
   (c) Déduire que $\int_0^1 g(x)dx = 0 \geqslant g(x_0)/2 > 0$. Déduire une absurdité.
On peut de même montrer que le cas $g < 0$ est impossible en considérant sans maximum.
   (d) Conclure.

6. On suppose maintenant que $f > 0$, F est bornée par un réel $M > 0$, et que $\exists g$ dérivable et décroissante sur $[0, +\infty[$ telle que $g \underset{+\infty}{\to} 0$. On pose $H(x) = \int_0^x g(t)f(t)dt$.
   (a) Montrer que : $H(x) = F(x)g(x) + \int_0^x F(t)(-g'(t))dt$.
   (b) Montrer que $x \mapsto \int_0^x F(t)(-g'(t))dt$ est croissante bornée. Elle admet donc une limite finie en $+\infty$ qu'on note ℓ.
   (c) Montrer que $F(x)g(x) \underset{+\infty}{\to} 0$.
   (d) Déduire que $H(x) \underset{+\infty}{\to} \ell$.