Révision : suites, intégrales

Partie 1 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$
   (a) Montrer que :
$$\frac{1}{x+1} \leqslant 1 - x + x^2, \text{ et que } \frac{1}{x+1} \leqslant 1.$$
   (b) Montrer que :
$$\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \text{ et que } \ln(1+x) \leqslant x.$$
2. On pose $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$.
   (b) Déduire la limite de (x_n).
3. On pose $y_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   (a) Montrer que $\forall k \in \{2, \cdots, n\}, \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
   (b) Déduire que (y_n) est convergente.

Partie 2 :

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite numérique définie par :
$$u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

1. Calculer $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
2. À l'aide de la partie 1, montrer que :
$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \leqslant -\frac{x}{2(n+1)} + \frac{x^2}{3(n+1)^2}.$$
3. Déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) \leqslant -\frac{x}{2}(x_{n+1} - 1) + \frac{x^2}{3}(y_{n+1} - 1)$$
4. Montrer que : $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.