Tout en un problème : Analyse

Partie 1 : *une petite étude de fonction pour s'échauffer*

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), u(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

1. (a) Montrer que la fonction u est impaire.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.
2. (a) Montrer que u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_u) au point d'abscisse 0 .
3. Montrer que u admet une bijection réciproque de u^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
4. (a) Tracer dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_u) et $(C_{u^{-1}})$.
   (b) Calculer en cm^2 la surface du secteur (Δ) tel que :

$$(\Delta) = \left\{M(x,y) \in (\mathrm{P}) / (x,y) \in [0, \ln 2]^2 \text{ et } u(x) \leqslant y \leqslant u^{-1}(x)\right\}$$

Soit f fonction numérique définie par :

$$f(0) = 1 \text{ et } f(x) = \frac{2x}{x+u(x)}, x \neq 0$$

5. (a) Justifier que : $D_f = \mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que la fonction f est paire, puis déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
6. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
7. (a) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^+), u'(t) = 1 - (u(t))^2$, puis en déduire que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), x - \frac{x^3}{3} \leqslant u(x) \leqslant x$$

   (b) Vérifier que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right), \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{x-u(x)}{2x^2}.f(x)$, puis en déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
8. Pour chaque entier naturel n non nul on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$ et on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$
   (a) Vérifier que $u_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$ en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant u_n - S_n \leqslant \dfrac{1}{3n^2}$ en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$
   (c) Construire dans le même repère la tangente T et les courbes (C_u) et $(C_{u^{-1}})$

Soit $\lambda \in]0,1[$. On note S_λ l'aire en cm^2 du domaine

$$D_\lambda = \left\{M(x,y) \in P / x \in [0,\lambda], y \in [0,\lambda], u(x) \leqslant y \leqslant u^{-1}(x)\right\}$$

(d) Montrer que la fonction $x \to \ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive de u sur $\mathbb{R}$

(e) Déduire $S_\lambda = \lambda^2 - 2\ln\left(\dfrac{e^\lambda+e^{-\lambda}}{2}\right)$ cm^2

9. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right), f'(x) = 2 \cdot \frac{u(x) - x \cdot u'(x)}{(x+u(x))^2}$$

(b) En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right), u(x) - x \cdot u'(x) > 0$$

(c) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis déterminer $f(\mathbb{R})$.

Soit F la fonction numérique définie par :

$$F(0) = 0 \text{ et } F(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x \ln(f(t))dt, x \neq 0$$

10. (a) Justifier soigneusement que : $D_F = \mathbb{R}$.

(b) Montrer que est paire (Utiliser une intégration par changement de variable).

11. (a) En utilisant le théorème de la moyenne, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*), 0 \leqslant F(x) \leqslant \ln(f(x))$$

(b) En déduire que F est continue en 0 .

(c) Montrer que F est dérivable à droite en 0 et donner $F'_d(0)$.

12. (a) Vérifier que : $(\forall t \in \mathbb{R}^{*+}), \dfrac{2.t}{1+t} \leqslant f(t) \leqslant 2$.

(b) En déduire que , pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{x} \cdot \left(\int_0^1 \ln(f(t))dt + \int_1^x \ln\left(\frac{2\cdot t}{1+t}\right)dt\right) \leqslant F(x) \leqslant \ln 2$$

(c) Montrer que : $(\forall x \in [1, +\infty[), \displaystyle\int_1^x \ln\left(\frac{2\cdot t}{1+t}\right)dt = (x+1)\cdot\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \ln x$.

d)- En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

13. (a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right), F'(x) = \frac{\ln(f(x)) - F(x)}{x}$$

(b) Dresser le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Partie 2 : ***Suites implicites ?***

Pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on considère la fonction numérique f_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n\ln x}{x^2}$$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to 0} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2 (a) Calculer $f_n'(x), \forall x \in]0;+\infty[$, puis vérifier que $f_n'(w_n) = 0$, tel que : $w_n = e^{\frac{n-2}{2n}}$.

(b) Dresser le tableau de variations de f_n.

(c) Montrer que la fonction f_n admet une valeur maximale au point $w_n = e^{\frac{n-2}{2n}}$

3 Étudier la position relative des deux courbes (C_n) et (C_{n+1}).

4 Tracer dans le même repère les deux courbes (C_2) et (C_3).

On suppose que : $n \geqslant 3$.

5. Vérifier que $w_n \geqslant 1$ et que $f_n(w_n) \geqslant 1$.

6. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]1,+\infty[$ et que $\alpha_n > w_n$.

7. Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante.

8. (a) Montrer que $\ln\alpha_n > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \quad (\forall n \geqslant 3)$.

(b) Déduire que : $\alpha_n > \sqrt{\dfrac{n}{2}} \quad (\forall n \geqslant 3)$, puis déduire que la suite (α_n) est divergente.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et la fonction F définies par :

$$(\forall x \in]0;+\infty[); \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt \quad \text{et} \quad u_n = \int_1^e f_n(x)dx$$

9 (a) À l'aide de l'intégration par parties, calculer $I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ pour tout x de $[1;+\infty[$.

(b) Calculer le produit P_n en fonction de n. tel que : $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} e^{u_k}$.

2 Étudier les variations de la fonction F.

3 (a) Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

(b) Montrer que : $(\forall x \geqslant 1) \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt - F(x) \leqslant I(x)$.

(c) En déduire la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{\ln^2 x}$

Partie 3 : *Free-style*

Soit la fonction f par $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. (a) Préciser l'ensemble de définition D_f de f

(b) Montrer que f est continue en 0 .

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $h(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln|1+x|$

(a) Calculer $h'(x)$

(b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α autre que 0 et que $-4,6 < \alpha < -4,5$

(c) Donner alors le signe de $h(x)$

3. (a) Calculer $f'(x)$

(b) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha}$ et donner le tableau de variation de f.

4. Construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe C_f de f.
On prend $f(\alpha) = -0,28$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$ par : $\begin{cases} g(x) = |1+x|^{\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ g(0) = \mathrm{e} \end{cases}$

5. (a) Dresser le tableau de variation de g

(b) Construire dans un autre repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ la courbe C_g

6. Soient les suite (u_n) et (v_n). (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et (v_n) définie sur $\mathrm{N} \setminus \{0;1\}$ par $v_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

7. Montrer que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

8. Montrer que pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, on a $x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

9. Soit $A(n) = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A(n) = \mathrm{e}$

10. Soit la suite B définie par $B(n) = \left(1+\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n^3}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^3}}\right)\cdots\left(1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}\right)$

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

(b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} B(n) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$

Partie 4 : *Un peu plus de théorie*

Soient $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec f décroissante et positive.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_k\right) \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)\mathrm{d}t \text{ avec } a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}$$

Montrer que

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

2. On introduit G la primitive de g s'annulant en a.
Montrer que

$$f(a) \min_{[a;b]} G \leqslant S_n \leqslant f(a) \max_{[a;b]} G$$

3. En déduire qu'il existe $c \in [a; b]$ vérifiant

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\mathrm{d}t$$

4. Soient $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ continues avec f monotone.
Montrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\mathrm{d}t + f(b) \int_c^b g(t)\mathrm{d}t$$

Bon voici un petit résultat similaire mais dans un cas très particulier :
Soit f une fonction positive et décroissante, dérivable de dérivée continue sur $I = [a; b]$.
Soit g une fonction continue sur I. On définit $G : I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

5. Montrer qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$G([a; b]) = [m; M]$$

6. Montrer que

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\mathrm{d}t$$

7. En déduire qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\mathrm{d}t$.

Partie 5 : ***Le saviez-vous ?***

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\,; \quad \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

2. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < e^n < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; \left(\dfrac{n+1}{n}\right)e^{-1} < u_n < \sqrt[n]{n+1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)e^{-1}$

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

On pourra montrer un résultat mille fois plus fort : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$ mais je préfère vous le laisser pour un autre problème.

$\star\star\star$ $\mathcal{FIN}$ $\star\star\star$