BAC BLANC 12

Exercice 1 :

Partie I : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x)=2\left(1-e^{-x}\right)-x$

1. (a) Étudier les variations de la fonction g .
   (b) Dresser le tableau de variations de g .
2. (a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in]\ln 4;\ln 6[$. (On prend $\ln 2 \approx 0.7$ et $\ln 3 \approx 1,1$)
   (b) Étudier le signe de $g(x)$ dans $\mathbb{R}_+$
1. On considère la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $U_0=1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1}=2\left(1-e^{-U_n}\right)$
   (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leqslant U_{\mathrm{n}} \leqslant \alpha$.
   (b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1}-U_n=g\left(U_n\right)$.
   (c) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.
   (d) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Partie II :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

($\mathcal{C}_{\mathrm{r}}$) est la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(\mathcal{O};\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. (a) Vérifier que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$
   (b) Montrer que $f'(x)=g(x)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de f .
3. Tracer la courbe (C_f). (On prend $\alpha \approx 1,5$)

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$F(0)=-\ln 2 \text{ et } (\forall x>0); F(x)=\int_x^{2x} \frac{1-\mathrm{e}^t}{\mathrm{t}^2}\mathrm{dt}$$

1. (a) En utilisant une intégration par parties montrer que :
   $(\forall x>0)\,;\, F(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt.$
   Montrer que : $(\forall x>0); \mathrm{e}^x \ln 2 \leqslant \displaystyle\int_{\mathrm{x}}^{2\mathrm{x}} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{t}}\mathrm{dt} \leqslant \mathrm{e}^{2x}\ln(2)$ ".

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ en déduire que la fonction est continue à droite en 0 .

2. (a) Montrer que : $(\forall x > 0); F(x) \leqslant \frac{1-e^x}{2x}$.

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

3. Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que : $F'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2$

4. (a) Soit x un élément de l'intervalle $]0, +\infty[$, Montrer qu'il existe un réel c de $]0, x[$ tel que : $F(x) - F(0) = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}$. (utiliser le TAF deux fois)

(b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$,

$$-\frac{1}{2}e^{2x} \leqslant \frac{F(x) - F(0)}{x} \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Exercice 2 :

Partie I :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$ (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}; \vec{i}; \vec{j})$ unité 1 cm .

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.

2. Calculer $f'(x)$. en déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie sur $]0, 1[$ par : $g_n(x) = f(x) - x^n$

(a) Montrer que g_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$,

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe $\alpha_n \in]0, 1[$ unique, tel que : $f_n(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$

(c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $g_n(\alpha_{\mathrm{n+1}}) < 0$.

(d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante . en déduire qu'elle est convergente. $n \leqslant s$,

4. On pose que : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

(a) Vérifier que : $0 < \alpha_1 \leqslant L \leqslant 1$

Montrer que : $L = 1$

(b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha_n)^n = 0$.

Partie II :

1. (a) Etudier le signe de l'intégrale $\int_x^1 f(t)dt$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

(b) En utilisant une intégration par parties montrer que :
$(\forall x>0); \int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln x$

(c) En déduire en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations respectives $x=1, x=e^2$ et $y=0$.

2. Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $\mathrm{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Montrer que pour tout entiers naturels n et k tels que : $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt$

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n = 4$

Exercice 3 :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) définie ainsi :

$$(\mathrm{E}) : x^2\left(x^2+7\right) = y(2x+y)$$

1. Soit (x,y) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $\delta = x \wedge y$.
On pose : $x = \delta a$ et $y = \delta b$.
On suppose que le couple (x,y) est une solution de l'équation (E).
(a) Vérifier que : $a^2\left(\delta^2 a^2 + 7\right) = b(2a+b)$
(b) En déduire l'existence d'un entier naturel k tel que :

$$2a + b = ka^2 \quad \text{et} \quad \delta^2 a^2 + 7 = kb$$

(c) En déduire que : $a = 1$.
(d) En déduire que : $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).

Exercice 4 :

Soient $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

2. Montrer que (I, J) est une base de l'espace E.
3. (a) Calculer J^2 puis déterminer J^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) Déterminer les coordonnées de la matrice $A = I + J + J^2 + \cdots + J^{2n}$ en fonction de n dans la base (I_2, J). 4. On considère l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi : (E, \times) &\mapsto (\mathbb{C}, \times) \\ M(a, b) &\mapsto a + ib\sqrt{2} \end{aligned}$$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.
(b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.
(c) Résoudre dans E l'équation : $(M(a, b))^3 = -\sqrt{2} \cdot I_2 + J$

Exercice 5 :

Parie I :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit l'équation (E_θ) : $z^2 - 2iz - \left(1 + e^{2i\theta}\right) = 0; \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[; z \in \mathbb{C}$

1. Montrer les identités suivantes pour tout x et y de $\mathbb{R}$.

$$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \quad ; \quad e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

2. Résoudre (E_θ) puis écrire les solutions sous la forme trigonométrique
3. Soient : $A(z_1); B(z_2); \{z_1, z_2\} = \text{solutions}\,(E_\theta)$
(a) Montrer que : $\{\mathcal{O}, A, B\}$ non-alignés et que $\mathcal{O}AB$ est un triangle rectangle
(b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle on ait $\mathcal{O}AB$ soit isocèle en $\mathcal{O}$

Partie II :

Soit maintenant : $A(a); B(b + i); r = \text{rotation}\left(A, \frac{\pi}{3}\right); (a, b) \in \mathbb{R}^2$

1. Donner l'écriture complexe de r puis calculer $aff\,(B'); B' = r(B)$
2. Montrer l'équivalence suivante : $B' \in (Oy) \quad \Leftrightarrow \quad a + b = \sqrt{3}$
Puis calculer, dans ce cas, $aff\ (B')$ en fonction de a.
3. Soit maintenant : $a = \sqrt{3}; b = 0; c = -i; d = 2 + \sqrt{3}(1 - 2i)$
Soient encore : $A(a); B(b); C(c); D(d)$.
(a) Quelle est la nature de chacun des triangles ABC et ACD ?
(b) Soient : $E = r(D); F = t(D); \quad t = \text{translation}(\overrightarrow{AC})$.
Calculer $aff(E), \quad aff(F)$, et montrer que BEF est équilatéral.

$\mathcal{FIN}$