Indications : Révision : suites, intégrales

Partie 1 :

1. Facile : on calcule la différence, on voit le signe (facile) puis on intègre de 0 à x.
2. (a) $\forall x \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$. On intègre de k à $k+1$ on obtient le résultat.
   (b) On somme l'inégalité de 1 à n on obtient :
$$x_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1).$$
3. (a) $k^2 \geqslant (k-1)k \implies \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1-k+k}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
   (b) $y_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$.
   (y_n) croissante majorée par 1 donc convergente.

Partie 2 :

1.
$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{n+1}{x}\right) + \ln\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right).$$
2. Par la 1ère inégalité on a
$$\begin{aligned}\ln\left(\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right) &\leqslant \ln\left(\frac{x}{n+1} - \frac{x^2}{2(n+1)^2} + \frac{x^3}{3(n+1)^3}\right)\\ &= -\ln\left(\frac{n+1}{x}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{2(n+1)} + \frac{x^2}{3(n+1)^2}\right)\end{aligned}$$
   Par la 2ème inégalité on a :
$$\ln\left(1 - \frac{x}{2(n+1)} + \frac{x^2}{3(n+1)^2}\right) \leqslant \frac{x}{2(n+1)} + \frac{x^2}{3(n+1)^2}$$
D'où l'inégalité demandée.
3. L'inégalité s'obtient encore par télescopage. On a donc $\ln(u_n) \to -\infty$.
   Puisque $u_n = e^{\ln(u_n)}$ on a $u_n \to 0$.

⚠ Ceci n'est absolument pas un corrigé, ce n'est que des indications qui mettent en valeur les idées clés pour résoudre l'exercice. Si vous rédigez comme çà la jour de l'examen on vous collera un *zéro* sans discussion ! Il faut bien rédiger le jour du national comme vous faites avec vos profs en classe.