page
1 / 4
G.S.T
∑

امتحان تجريبي للبكالوريا

السنة الدراسية 2023-2024

ES-02

Pr. Abdellah Belkhatir

Royaume du maroc
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
Ministère de l'Education Nationale
du préscolaire & des sports
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⴼⵜ
Groupe Scolaire Tazi
Direction Anfa-Grand Casa

4	مدة الإنجاز	الرياضيات			المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)			الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit;
- L'éléve peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des réponses est à éviter;
- La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies;
- Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

COMPOSANTES DU SUJET

Le sujet se compose de trois exercices et un problème,
tous indépendants et répartis comme suit :

Exercice 1	*Les strucutres algèbriques*	*3 points*
Exercice 2	*Les nombres complexes*	*4 points*
Exercice 3	*Arithmétiques*	*3 points*
Problème	*Problème de synthèse d'analyse*	*10 points*

Exercice 1: 3 points

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère le sous-ensemble:

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a^2+b^2=1 \right\}.$$

0,25 **1)** **a)** *Vérifier que :* $\left(\forall (a,b,x,y) \in \mathbb{R}^4\right)$; $M(a,b) \times M(x,y) = M(ax-by, ay+bx)$.

0,25 **b)** *En déduire que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.*

2) *On pose :* $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

0,50 *Montrer que Γ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

3) *Pour tout $a+ib \in \Gamma$, On pose :* $f(a+ib) = M(a,b)$.

0,50 **a)** *Montrer que f est un isomorphisme de $(\Gamma, \times)$ vers $(E, \times)$.*

0,50 **b)** *En déduire la structure de $(E, \times)$ en précisant l'inverse de tout $M(a,b) \in E$.*

4) *On pose :* $A = M\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

0,50 *Déterminer l'inverse de la matrice A^{2024} dans E, où* $A^{2024} = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{2024 \textit{ fois}}$.

5) *On considère les matrices $I = M(1,0)$ et $J = M(0,1)$.*

0,50 *Résoudre dans E, l'équation $J \times X^3 = I$.*

Exercice 2: 4 points

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + (4-3i)z + 1 - 7i = 0$.

0,25 **1)** **a)** *Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3+4i$.*

0,50 **b)** *En déduire les solutions a et b de l'équation (E) telles que* $\mathrm{Re}(b) < \mathrm{Re}(a)$.

2) *Soient α un argument de a et β un argument de b.*

0,25 **a)** *Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $c = 1 - 7i$ en fonction de α et β.*

0,50 **b)** *Déterminer sous forme exponentielle et en fonction de α et β, chacune des solutions de l'équation* $(F) : z^4 + (4-3i)z^2 + 1 - 7i = 0$.

Partie II :

Le plan complexe (P) *est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*
On considère les points A et B d'affixes respectives a et b. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et H l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$. On pose $F = R \circ H$.

0,25 **1)** **a)** *Montrer que l'écriture complexe de la transformation F est :* $z' = (1+i).z$.

0,25 **b)** *Justifier que :* $F(A) = B$.

2) *On pose $M_0 = A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:* $M_{n+1} = F(M_n)$. *Et on désigne par z_n l'affixe du point M_n.*

0,50 *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $z_n = (1+i)^n.(-1+2i)$.

0,50 **3)** **a)** *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et isocèle.*

0,50 **b)** *Déterminer tous les entiers naturels n pour que les points O, A et M_n soient alignés.*

0,50 **c)** *Montrer qu'il n'existe aucun point M_n appartenant à l'axe réel.*

Exercice 3: 3 points

*Pour tout **entier naturel premier et impair p**, On pose :* $N_p = 7p + 3^p - 4$.

0,50 **1)** *Montrer que :* $N_p \equiv -1[p]$.

2) *On suppose qu'il existe un entier naturel* m *tel que :* $N_p = m^2$.

0,25 **a)** *Montrer que :* $m^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$.

0,50 **b)** *En utilisant le théorème de Bézout, montrer que :* $m \wedge p = 1$. *Puis en déduire que :* $m^{p-1} \equiv 1[p]$.

0,50 **c)** *Montrer que :* $p \equiv 1[4]$.

0,50 **d)** *Prouver que :* $m^2 \equiv 2[4]$.

0,50 **3)** *Soit* $a \in \mathbb{N}$, *quels sont les restes possibles de la division de* a^2 *par* 4 *?*

0,25 **4)** *En déduire de ce qui précède, que* N_p *n'est jamais un carré parfait.*

Problème 1: 10 points

Partie I :

Soit g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = x \cdot e^{-x}$.
Et soit (C_g) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,50 **1)** **a)** *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. *Puis interpréter géométriquement le résultat.*

0,75 **b)** *Calculer* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x}$. *Puis en déduire que* (C_g) *admet au voisinage de* $-\infty$ *une branche parabolique dont on précisera la direction.*

0,50 **2)** *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}); \quad g'(x) = (1-x).e^{-x}$ *et dresser le tableau de variation de* g *en justifiant la réponse.*

0,50 **3)** *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}); \quad g''(x) = (x-2).e^{-x}$ *puis étudier la concavité de* (C_g) *et déterminer son point d'inflexion.*

0,75 **4)** *Construire* (C_g) *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, *on pose :* $A(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda g(x)dx$.

0,50 **a)** *Vérifier que :* $(\forall x \in \mathbb{R}); \quad g(x) + 2g'(x) + g''(x) = 0$. *Puis en déduire qu'une primitive de* g *sur* $\mathbb{R}$ *est la fonction* $G : x \mapsto -2g(x) - g'(x)$.

0,50 **b)** *Exprimer* $A(\lambda)$ *en fonction de* λ, *puis calculer* $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$ *et interpréter le résultat géométriquement.*

6) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :* $S_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} k \cdot \sqrt[2n]{e^{-k}}$.

0,50 *Vérifier que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; \quad S_n = \dfrac{2}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} g\left(\dfrac{k}{2n}\right)$. *Puis en déduire que la suite* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est convergente en précisant sa limite.*

Partie II :
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(0)=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad F(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{g(t)}{1+e^{-t}}dt; \quad \text{si } x\neq 0.$$

1) **a)** *En utilisant une intégration par changement de variable, montrer que :*

0,25 $$(\forall x\in\mathbb{R}^*)\,; \quad \int_0^{-x}\frac{g(t)}{1+e^{-t}}dt=\int_0^x\frac{u}{1+e^{-u}}du.$$

0,25 **b)** *En déduire que :* $(\forall x\in\mathbb{R});\quad F(-x)=1-F(x)$.

2) **a)** *Vérifier que :* $(\forall t\in\mathbb{R}_+)\,;\quad 0\leq g(t)\leq e^{-1}$*. Puis en déduire que :*

0,25 $$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\quad 0\leq F(x)\leq\frac{2e^{-1}}{x}.$$

0,50 **b)** *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$*. Puis en déduire* $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ *en justifiant la réponse.*

3) *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :*

0,50 $$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\quad F'(x)=\frac{2}{x}\left(\frac{1}{1+e^x}-F(x)\right).$$

4) **a)** *Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, en utilisant une intégration par parties, montrer que :*

0,25 $$F(x)=\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{x^2}\int_0^x\left(\frac{t}{1+e^t}\right)^2 e^t\,dt.$$

0,25 **b)** *En déduire que :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\quad F'(x)=\dfrac{-2}{x^3}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{h(t)}\right)^2dt.$
Où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(t)=e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}$.

0,50 **5)** **a)** *Montrer que :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\quad \dfrac{x^3}{3(h(x))^2}\leq\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{h(t)}\right)^2dt\leq\frac{x^3}{12}.$
(Ind.: Remarquez que h est croissante sur $\mathbb{R}_+$).

0,25 **b)** *En déduire que :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\quad \dfrac{-1}{6}\leq F'(x)\leq\dfrac{-2}{3(h(x))^2}.$

0,25 **6)** **a)** *Montrer que :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\quad \dfrac{1}{1+e^x}\leq F(x)\leq\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{x}{3}.$
(Ind.: Utiliser la question 4) a) de la partie II).

0,25 **b)** *En déduire que F est continue à droite en 0.*

0,50 **7)** *Montrer que F est dérivable en 0 et que :* $F'(0)=\dfrac{-1}{6}$.
(Ind. : On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à F.)

8) *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $F(x)=n.x$, admet une solution unique a_n dans $\mathbb{R}$ et*
0,75 *justifier que :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\quad a_n>0$.

0,50 **9)** *Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, puis montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

0,50 **10)** *Montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot a_n=\dfrac{1}{2}$*. Puis en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(n\cdot a_n-\dfrac{1}{2}\right)$.