

Exercice 1:

Partie I:

1)

Ilq T n'est pas commutative dans G

$$\text{on a } (2, 1) T (1, 3) = (2, 3\sqrt{2} + 1)$$

$$\text{et } (1, 3) T (2, 1) = (2, 1 + 3 \times 2) \\ = (2, 7)$$

$$\text{Donc } (2, 1) T (1, 3) \neq (1, 3) T (2, 1)$$

D'où T n'est pas commutative dans G

2)

Ilq T est associative;

$$\text{soit } ((x, y); (x', y'); (x'', y'')) \in G^3$$

$$\begin{aligned} \text{on a } [(x, y) T (x', y')] T (x'', y'') &= (xx', \sqrt{x} y' + y x') T (x'', y'') \\ &= ((xx') x'', \sqrt{xx'} y'' + (\sqrt{x} y' + y x') x'') \\ &= (xx'x'', \sqrt{xx'} y'' + \sqrt{x} x'' y' + y x' x'') \quad \left(\begin{array}{l} + \text{ est} \\ \text{associative} \\ \text{dans } \mathbb{R} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et on a } (x, y) T [(x', y') T (x'', y'')] &= (x, y) T (x'x'', \sqrt{x'} y'' + y' x'') \\ &= (x(x'x''), \sqrt{x} (\sqrt{x'} y'' + y' x'') + y x' x'') \\ &= (xx'x'', \sqrt{xx'} y'' + \sqrt{x} y' x'' + y x' x'') \\ &= (x, y) T (x', y') T (x'', y'') \end{aligned}$$

Donc T est associative dans G .

3)

Soit $(x, y) \in G$; supposons que $(1, 0)$ est neutre dans (G, T)

$$\text{donc } (\forall (x', y') \in G): (x, y) T (x', y') = (x', y')$$

$$\text{et } (1, 0) \in G, \text{ donc } (x, y) T (1, 0) = (1, 0)$$

$$\text{càd } (x, y) = (1, 0)$$

Réciproquement :

$$\text{on a : } a) (1, 0) \in G$$

$$*) \text{ Soit } (x, y) \in G$$

$$\text{on a } (x, y) T (1, 0) = (x, y)$$

$$\text{et } (1, 0) T (x, y) = (x, y)$$

$$\text{donc } (\forall (x, y) \in G): (1, 0) T (x, y) = (x, y) T (1, 0) = (x, y)$$

D'où $(1, 0)$ est l'élément neutre dans (G, T)

4)

$\pi_G(G, T)$ est un groupe non commutatif.

*) D'après qst 2) T n'est pas commutative dans G

+) D'après qst 2) T est associative dans G

a) D'après qst 3) : $(1, 0)$ est l'élément neutre dans (G, T)

*) Élément symétrisable

Soit $(x, y) \in G$

$$\text{Cherchons } (x', y') \in G \text{ tq } \begin{cases} (x, y) T (x', y') = (1, 0) \\ (x', y') T (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

$$\text{on a } \begin{cases} (x, y) T (x', y') = (1, 0) \\ (x', y') T (x, y) = (1, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xx'; \sqrt{x}y' + yx') = (1, 0) \\ (x'x; \sqrt{x'}y + y'x) = (1, 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ \sqrt{x}y' + yx' = 0 \\ (x'x; \sqrt{x'}y + y'x) = (1, 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} & (\text{car } x \neq 0) \\ \sqrt{x}y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 0 \\ (x'x; \sqrt{x'}y + y'x) = (1, 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = \frac{-y}{x\sqrt{x}} \\ (1, \frac{y}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}) = (1, 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = \frac{-y}{x\sqrt{x}} \\ (1, 0) = (1, 0) \quad (\text{vraie}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x', y') = \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x\sqrt{x}} \right)$$

et on a $x \in \mathbb{R}^*_{+}$ donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*_{+}$ et $\frac{-y}{x\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$

Donc $\left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x\sqrt{x}} \right) \in G$

D'où chaque élément $(x, y) \in G$ admet pour symétrique $(x', y') = \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x\sqrt{x}} \right) \in \text{dom}(G, I)$

Finalement (G, I) est un groupe non commutatif.

5)

a) $\pi_q (F, I)$ est un sous-groupe de (G, I)

a) $\pi_q F \subset G$

soit $(1, y) \in F$

$\pi_q (1, y) \in G$

on a $1 \in \mathbb{R}^*_{+}$; et $y \in \mathbb{Z}$ donc $y \in \mathbb{R}$

Donc $(1, y) \in G$

D'où $F \subset G$

a) $F \neq \emptyset$ (car $(1, 0) \in F$)

a) soit $((1, y); (1, y')) \in F^2$

$\pi_q (1, y) \cap (1, y')' \in F$

avec $(1, y')'$ le symétrique de $(1, y')$ dans (G, I)

D'après qst 4) : $(1, y')' = (1, -y')$

Donc $(1, y) \cdot (1, y') = (1, y) \cdot (1, -y')$

$$= (1, -y' + y)$$

$$= (1, y - y')$$

et on a $\begin{cases} y \in \mathbb{Z} \\ y' \in \mathbb{Z} \end{cases}$ donc $y - y' \in \mathbb{Z}$

D'où $(1, y) \cdot (1, y') \in F$

Par suite $(F, \cdot)$ est un sous-groupe de $(G, \cdot)$

*) Commutativité:

soit $((1, y), (1, y')) \in F^2$

on a $(1, y) \cdot (1, y') = (1, y' + y)$

$$= (1, y + y') \quad (\text{car } + \text{ est commutative dans } \mathbb{Z})$$

$$= (1, y') \cdot (1, y)$$

Donc $\cdot$ est commutative dans F

D'où $(F, \cdot)$ est un groupe commutatif.

Partie II:

1)

$\pi_0 D$ est stable dans $(\pi_0(\mathbb{R}), \times)$

on a *) $D \subset \pi_0(\mathbb{R})$

*) $D \neq \emptyset$ car $\pi_0(1, 0) \in D$ ($(1, 0) \in G$)

**) soit $(\pi_0(x, y), \pi_0(x', y')) \in D^2$

on a $\pi_0(x, y) \times \pi_0(x', y') = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{x'} & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{x} \sqrt{x'} & \sqrt{x} y' + y x' \\ 0 & x x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{x x'} & \sqrt{x} y' + y x' \\ 0 & x x' \end{pmatrix}$$

Donc $\pi_0(x, y) \times \pi_0(x', y') = \pi_0(x x', \sqrt{x} y' + y x')$

et on a $x \in \mathbb{R}^+; x' \in \mathbb{R}^+$ donc $x x' \in \mathbb{R}^+$

et $(\sqrt{x} y' + y x') \in \mathbb{R}$

donc $(x x', \sqrt{x} y' + y x') \in G$

D'où $\pi_0(x, y) \times \pi_0(x', y') \in D$

Donc D est stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

2) a)

*) Morphisme :

Soit $((x, y), (x', y')) \in G^2$

$$\forall q \quad \varphi((x, y) \tau (x', y')) = \varphi(x, y) \times \varphi(x', y')$$

$$\text{on a } \varphi((x, y) \tau (x', y')) = \varphi((xx', \sqrt{x}y' + yx'))$$

$$= \varphi(xx', \sqrt{x}y' + yx')$$

$$= \varphi(x, y) \times \varphi(x', y') \quad (\text{qst 1})$$

$$= \varphi(x, y) \times \varphi(x', y')$$

Donc φ est un morphisme de (G, τ) vers $(D, \times)$

*) Bijectivité :

•) Surjectivité :

Soit $\eta(x, y) \in D$

$$\text{on a } \eta(x, y) = \varphi(x, y)$$

et $(x, y) \in G$

Donc chaque élément $\eta(x, y) \in D$ admet au moins un antécédant dans G

Donc φ est surjective.

•) Injectivité :

Soit $((x, y), (x', y')) \in G^2 \quad \forall q \quad \varphi(x, y) = \varphi(x', y')$

$$\forall q \quad \eta(x, y) = \eta(x', y')$$

on a $\varphi((n,y)) = \varphi((n',y'))$

càd $\pi(n,y) = \pi(n',y')$

donc $\begin{pmatrix} \sqrt{n} & y \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{n'} & y' \\ 0 & n' \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} n = n' \\ y = y' \end{cases}$

donc $(n,y) = (n',y')$

D'où φ est injective.

Pour suite φ est bijective

Finalement φ est un isomorphisme de (G,T) vers (D,x)

b)

a) φ est un isomorphisme de (G,T) vers (D,x)

$\rightarrow (G,T)$ est un groupe non commutatif.

Donc (D,x) est un groupe.

$\rightarrow$ rq (D,x) n'est pas commutatif.

on a $\pi(2,1) \times \pi(1,3) = \pi(2,3\sqrt{2}+1)$

et $\pi(1,3) \times \pi(2,1) = \pi(2,7)$

Donc $\pi(2,1) \times \pi(1,3) \neq \pi(1,3) \times \pi(2,1)$

D'où x n'est pas commutative dans D

Par suite (D,x) est un groupe non commutatif.

* Déterminons l'inverse de $\pi(x,y)$

on a $\pi(n,y) = \varphi((n,y))$

Donc $(\pi(n,y))^{-1} = (\varphi((n,y)))^{-1}$

$= \varphi((n,y)^{-1})$ (car φ est un morphisme)

$= \varphi\left(\left(\frac{1}{n} \mid \frac{-y}{n\sqrt{n}}\right)\right)$ (qst 4 partie I)

Donc $(f(x,y))^{-1} = f\left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x\sqrt{x}}\right)$

3)

a)

On a $A^2 = -I + 2A$

on a $A^2 = A \times A = f(1,1) \times f(1,1)$

$= f(1; 1+1)$

$= f(1,2)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et on a $-I + 2A = 2f(1,1) - f(1,0)$ (car f est commutative dans $M_2(\mathbb{R})$)

$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 0 & 2-1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2$

Donc $A^2 = -I + 2A$

b)

on pose: $N(a,b) = aI + bJ$
 *) $M_2(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

*) $M_2(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

$(M_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif.

Donc il suffit de mg E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

$\rightarrow E \subset M_2(\mathbb{R})$

$\rightarrow E \neq \emptyset$ car $N(1,0) \in E$

$\rightarrow$ soit $(N(a,b), N(a',b')) \in E^2$

on a $N(a,b) - N(a',b') = (aI + bA) - (a'I + b'A)$

$= (a-a')I + (b-b')A$

$= N(a-a', b-b')$

et on a $(a-a', b-b') \in \mathbb{R}^2$

donc $N(a,b) - N(a',b') \in E$

Donc E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

Donc $(E, +)$ est groupe commutatif.

•) $\text{Ker}(E, \times)$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

$$\rightarrow E \subset M_2(\mathbb{R})$$

$$\rightarrow E \neq \emptyset$$

$$\rightarrow \text{soit } (N(a, b); N(a', b')) \in E^2$$

$$\begin{aligned} \text{on a } N(a, b) \times N(a', b') &= (aI + bA)(a'I + b'A) \\ &= aa'I^2 + ab'IA + ba'A'I + bb'A^2 \\ &= aa'I + ab'A + ba'A + bb'(-I + 2A) \\ &= aa'I - bb'I + ab'A + ba'A + 2bb'A \\ &= (aa' - bb')I + (ab' + ba' + 2bb')A \end{aligned}$$

$$\text{Donc } [N(a, b) \times N(a', b')] = N(aa' - bb'; ab' + ba' + 2bb')$$

$$\text{et on a } (aa' - bb'; ab' + ba' + 2bb') \in \mathbb{Z}^2$$

$$\text{Donc } N(a, b) \times N(a', b') \in E$$

Donc E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

•) $\times$ est associative dans $M_2(\mathbb{R})$; donc $\times$ est associative dans E

$\rightarrow E$ est stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ et $(M_2(\mathbb{R}), +)$

et $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $M_2(\mathbb{R})$

Donc $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans E

•) Commutativité:

$$\text{Soit } (N(a, b); N(a', b')) \in E^2$$

$$\text{on a } N(a, b) \times N(a', b') = N(aa' - bb'; ab' + ba' + 2bb')$$

$$\text{et } N(a', b') \times N(a, b) = N(a'a - b'b; a'b + b'a + 2b'b)$$

$$= N(a, b) \times N(a', b') \quad (\text{car } \times \text{ est commutative dans } \mathbb{R})$$

Donc x est commutative dans E

D'où $(E, +, x)$ est un anneau commutatif.

a) Est-il intègre ?

$$\text{on a } N(1, -1) \cdot N(-2, 2) = N(-2 + 2, 2 + 2 - 2 \times 2) \\ = N(0, 0)$$

$$= 0_2$$

$$\text{et on a } N(1, -1) = I - A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$$

$$\text{et } N(-2, 2) = -2I + 2A$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$$

Donc $N(1, -1)$ et $N(-2, 2)$ sont deux diviseurs de zéro

D'où $(E, +, x)$ n'est pas intègre.

Exercice 2c

Partie I :

$$1) \text{ a) on a } -1 + ie^{i2\theta} = e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} + e^{i\pi}$$

$$= e^{i(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} \left(e^{i(\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} \right)$$

$$= 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4})}$$

et on a $0 < \theta < \frac{3\pi}{4}$

donc $-\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

D'où $\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) > 0$

Par suite la forme exponentielle de $-1 + ie^{i2\theta}$ est.

$$-1 + ie^{i2\theta} = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4})}$$

*) on a $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2) \pmod{2\pi}$

$$= \arg(-1 + ie^{i2\theta}) \pmod{2\pi} \quad (z_1 z_2 = \frac{\epsilon}{\alpha})$$

$$= \arg\left(2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4})}\right) \pmod{2\pi}$$

$$= \theta + \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Donc $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta + \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$

2) $(1-i)$ solution de (E) $\Leftrightarrow (1-i)^2 + 2i(1-i) - 1 + ie^{i2\theta} = 0$

$$\Leftrightarrow -2i + 2i + 2 - 1 + ie^{i2\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} = -1$$

$$\Leftrightarrow e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow 2\theta + \frac{\pi}{2} = \pi \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Donc $(1-i)$ solution de (E) $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$3) \text{ on a } \Delta = (2i)^2 - 4(-1 + ie^{i2\theta})$$

$$= -4 + 4 - 4ie^{i2\theta}$$

$$= 4e^{i(2\theta - \frac{\pi}{2})} \quad (\text{car } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}})$$

$$= (2e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})})^2 \neq 0$$

donc (E) admet exactement deux solutions :

$$z_1 = \frac{-2i - 2e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}}{2} = -i - e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{et } z_2 = \frac{-2i + 2e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}}{2} = -i + e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$$

$$\text{donc } z_1 = -i - e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} \quad \text{et } z_2 = -i + e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$$

4)

sur pose $A(-i)$ on considère le point $A(-i)$

$$\begin{aligned} \text{on a } AM_1 &= |z_1 + i| \\ &= |-i - e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + i| \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $M_1 \in (\text{cercle } \mathcal{C}(A, 1))$

$$\begin{aligned} \text{et } AM_2 &= |z_2 + i| \\ &= |-i + e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + i| \\ &= |e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}| \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $M_2 \in \mathcal{C}(A, 1)$

et le cercle $\mathcal{C}$ ne dépend pas de la valeur de θ car $\mathcal{C}$ est fixe

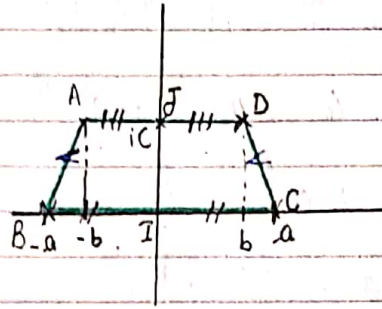
donc $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ varient sur le cercle $\mathcal{C}(A, 1)$

Partie II:

1)

D'après la représentation graphique de ABCD

on déduit que :
$$\begin{cases} z(B) = -a \\ z(A) = -b + ic \end{cases}$$



2)

*) $z_{A'} = ?$
on a $A' = R(A)$

donc
$$\begin{aligned} z_{A'} &= e^{i\theta} (z_A - z_C) + z_C \\ &= e^{i\theta} (-b + ic - a) + a \\ &= (-b + ic)e^{i\theta} + a - ae^{i\theta} \end{aligned}$$

d'où
$$z_{A'} = a(1 - e^{i\theta}) + (-b + ic)e^{i\theta}$$

*) $z_{B'} = ?$

on a $B' = R(B)$

donc
$$\begin{aligned} z_{B'} &= e^{i\theta} (z_B - z_C) + z_C \\ &= e^{i\theta} (-a - a) + a + ia \end{aligned}$$

Donc
$$z_{B'} = a(1 - 2e^{i\theta})$$

3)

on a J milieu de $[A'D]$ donc
$$z_J = \frac{z_{A'} + z_D}{2} = \frac{a(1 - 2e^{i\theta}) + (-b + ic)e^{i\theta} + b + ic}{2}$$

donc
$$\begin{aligned} z_J &= \frac{a(1 - 2e^{i\theta}) + b(1 - e^{i\theta}) + ic(1 + e^{i\theta})}{2} \\ &= \frac{(a+b)(1 - e^{i\theta}) + ic(1 + e^{i\theta})}{2} \end{aligned}$$

et on a

K milieu de $[B'C]$

donc
$$z_K = \frac{z_{B'} + z_C}{2} = \frac{a(1 - 2e^{i\theta}) + a}{2} = \frac{a(2 - 2e^{i\theta})}{2}$$

$$\text{donc } \frac{z_J - z_I}{z_K - z_I} = \frac{z_J}{z_K} \quad (z_I = 0)$$

$$= \frac{(a+b)(1+e^{i\theta}) + ic(1+e^{i\theta})}{2a(1-e^{i\theta})}$$

$$= \frac{a+b}{2a} + \frac{ic}{2a} \times \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

$$= \frac{a+b}{2a} + i \times \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{c}{2a}$$

$$\text{donc } \frac{z_J - z_I}{z_K - z_I} = \frac{a+b}{2a} + i \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \frac{c}{2a}$$

4) I, J et K sont alignés.

$$\text{càd } \frac{z_J - z_I}{z_K - z_I} \in \mathbb{R}$$

$$\text{on a } \frac{z_J - z_I}{z_K - z_I} = \frac{a+b}{2a} + i \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \frac{c}{2a}$$

$$= \frac{a+b}{2a} + i \times \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} \times \frac{c}{2a}$$

$$= \frac{a+b}{2a} + i \times \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{-i \sin(\frac{\theta}{2})} \times \frac{c}{2a}$$

$$= \frac{a+b}{2a} + \frac{-1}{\tan(\frac{\theta}{2})} \times \frac{c}{2a}$$

$$\text{et on a } \frac{a+b}{2a} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{-1}{\tan(\frac{\theta}{2})} \times \frac{c}{2a} \in \mathbb{R} \quad (\text{car } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$$

$$\text{Donc } \frac{z_J - z_I}{z_K - z_I} \in \mathbb{R}$$

Donc I, J, K sont alignés.

Exercice 36

Partie I.

1)

a)

$$\text{on a } 26 \times 13 - 337 \times 1 = 338 - 337 = 1$$

Donc

$(26, 1)$ est une solution particulière de (E)

b)

$$\text{on a (E) } 13x - 337y = 1$$

$$\Leftrightarrow 13x - 337y = 26 \times 13 - 337$$

$$\Leftrightarrow 13(x - 26) = 337(y - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13 \mid 337(y-1) \\ 13(x-26) = 337(y-1) \end{cases} \quad (*)$$

et 13 est premier et $13 \nmid 337$

$$\text{Donc } 337 \wedge 13 = 1$$

D'après ceurs on déduit que :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 13 \mid (y-1) \\ 13(x-26) = 337(y-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : \begin{cases} y-1 = 13k \\ 13(x-26) = 337 \wedge 13k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : \begin{cases} y = 13k+1 \\ x = 337k + 26 \end{cases}$$

$$\text{Donc } S = \{ (337k + 26, 13k + 1) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

2) car 337 est premier

$$\text{on a } \sqrt{337} = 18, \dots$$

les nombres premiers positifs $\leq \sqrt{337}$ sont :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17

aucun de ces nbs ne divise 337

Donc 337 est premier

Partie II:

1)

soit $x \in \mathbb{Z}$;

→) supposons que x est solution de (F)

$$\text{donc } x^{335} \equiv 13 \pmod{2022}$$

$$\text{donc } 2022 \mid (x^{335} - 13)$$

$$\text{et } 2022 = 6 \times 337$$

$$\text{donc } 6 \times 337 \mid (x^{335} - 13)$$

$$\text{et } 337 \text{ est premier et } 337 \nmid 6 \text{ donc } 337 \mid 13 - 1$$

D'après la conséquence de Gauss on a :

$$\begin{cases} 6 \mid (x^{335} - 13) \\ 337 \mid (x^{335} - 13) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x^{335} \equiv 13 \pmod{6} \\ x^{335} \equiv 13 \pmod{337} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x^{335} \equiv 13 \pmod{337} \\ x^{335} \equiv 1 \pmod{6} \end{cases} \quad (\text{car } 13 \equiv 1 \pmod{6})$$

$$\Leftarrow) \text{ supposons que } \begin{cases} x^{335} \equiv 13 \pmod{337} \\ x^{335} \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

$$\text{Alors } x \text{ est solution de (F) ; c'ad } x^{335} \equiv 13 \pmod{2022}$$

$$\text{on a } \begin{cases} x^{335} \equiv 13 \pmod{337} \\ x^{335} \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} 337 \mid (x^{335} - 13) \\ 6 \mid (x^{335} - 13) \end{cases}$$

$$\text{et } 337 \nmid 6 = 1$$

$$\text{donc } 6 \times 337 \mid (x^{335} - 13)$$

$$\text{D'où } x^{335} \equiv 13 \pmod{2022}$$

$$\text{Finalement (F) est } \begin{cases} x^{335} \equiv 13 \pmod{337} \\ x^{335} \equiv 1 \pmod{6} \end{cases}$$

2) a)

*1) $\text{mq } 337 \wedge x = 1$

337 est premier, donc il suffit de mq $337 \nmid x$

Supposons le contraire ; c'ad $337 \mid x$

donc $x \equiv 0[337]$ donc $x^{335} \equiv 0[337]$

et x est solution de (F)

D'après qst 1): $x^{335} \equiv 13[337]$

donc $13 \equiv 0[337]$

c'ad $337 \mid 13$ ce qui est absurde

donc $337 \nmid x$

et comme 337 est premier

alors $x \times 337 = 1$

a)

*1) 337 est premier petit.

*2) $337 \wedge x = 1$

D'après Fermat on déduit que $x^{336} \equiv 1[337]$

b)

*1) $\text{mq } 13x \equiv 1[337]$

x est solution de (F) donc d'après qst 1): $x^{335} \equiv 13[337]$

et on a $x^{336} \equiv 1[337]$ (d'après qst 2) a))

donc $x \times x^{335} \equiv 1[337]$

c'ad $13x \equiv 1[337]$

*2) $\text{mq } x \equiv 26[337]$

on a $13x \equiv 1[337]$

donc $26 \times 13x \equiv 26[337]$

et d'après Partie I qst. 1), $26 \times 13 = 337 \cdot 1$

$$\text{Donc } 26 \times 13 = 1 - 337$$

$$\text{D'où } (1 - 337) x = 26(337)$$

$$\text{Donc } x = 26(337)$$

c)

$$*) \text{ Ilq. } x \wedge 6 = 1$$

x est solution de (F) donc d'après qst 1), $x^{335} = 1[6]$

$$\text{Donc } (\exists k \in \mathbb{Z}), \quad x^{335} = 1 + 6k$$

$$\text{soit } x \times \underbrace{x^{334}}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{6(-k)}_{\in \mathbb{Z}} = 1$$

D'après Bézout on déduit que :

$$x \wedge 6 = 1$$

$$*) \text{ Ilq. } x^{334} = 1[6]$$

$$\text{soit } x \wedge 6 = 1$$

$$\text{donc } x \wedge 3 \wedge 2 = 1$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x \wedge 3 = 1 \\ x \wedge 2 = 1 \end{cases}$$

*) 2 et 3 sont premiers petits

$$*) \begin{cases} x \wedge 3 = 1 \\ x \wedge 2 = 1 \end{cases}$$

D'après Fermat on déduit que :

$$\begin{cases} x \equiv 1[2] \\ x^2 \equiv 1[3] \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x^2 \equiv 1[2] \\ x^2 \equiv 1[3] \end{cases}$$

$$\text{Donc} \quad \begin{cases} 2 \mid (x^2 - 1) \\ 3 \mid (x^2 - 1) \end{cases}$$

et $2 \wedge 3 = 6$

D'après la conséquence de Gauss on déduit :

$$6 \mid (x^2 - 1)$$

$$\text{Donc} \quad x^2 \equiv 1[6]$$

$$\text{D'où} \quad x^2 \times 167 \equiv 1[6]$$

$$\text{Donc} \quad x^{334} \equiv 1[6]$$

d)

on a x est solution de (A)

$$\text{D'après qst 1) :} \quad x^{335} \equiv 1[6] \quad \text{càd} \quad x \times x^{334} \equiv 1[6]$$

et d'après qst 2) b) :

$$x^{334} \equiv 1[6]$$

$$\text{Donc} \quad x \equiv 1[6]$$

3)

soit $x \in \mathbb{Z}$

$$\text{Rq} \quad (F) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 26[337] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$$

$$\text{on a d'après qst 2) :} \quad (F) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 26[337] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$$

$$\text{Rq} \quad \begin{cases} x \equiv 26[337] \\ x \equiv 1[6] \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing(F)$$

$$\text{supposons que} \quad \begin{cases} x \equiv 26[337] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$$

$$\text{Rq} \quad x \text{ est solution de } (F)$$

$$\text{càd} \quad x^{335} \equiv 13[2022]$$

4) Par $x^{335} \equiv 13 [337]$

on a $x \equiv 26 [337]$

Donc $x^{335} \equiv 26^{335} [337]$

on a 337 premier positif.

337 + 26 donc $337 \nmid 26 - 1$

D'après Fermat on déduit que : $26^{336} \equiv 1 [337]$

c'est $26 \times 26^{335} \equiv 1 [337]$

Donc $26 \times x^{335} \equiv 1 [337]$

et d'après Partie I qst 1. $1 \equiv 26 \times 13 - 337$

Donc $26 \times x^{335} \equiv 26 \times 13 - 337 [337]$

Donc $26(x^{335} - 13) \equiv 0 [337]$

c'est $337 \mid 26(x^{335} - 13)$

et $337 \nmid 26$

Donc d'après Gauss on a : $337 \nmid x^{335} - 13$

D'où $x^{335} \equiv 13 [337]$ ①

4) Par $x^{335} \equiv 13 [6]$

on a $x \equiv 1 [6]$

Donc $x^{335} \equiv 1 [6]$

D'où $x^{335} \equiv 13 [6]$ ②

et de ① et ② on déduit que $\begin{cases} 6 \mid (x^{335} - 13) \\ 337 \mid (x^{335} - 13) \end{cases}$

et $6 \nmid 337 - 1$

D'après la conséquence de Gauss on déduit que :

$2022 \mid (x^{335} - 13)$

Donc $x^{535} \equiv 13 [2022]$

D'où x est solution de (F)

Donc $\begin{cases} x \equiv 26 [337] \\ x \equiv 1 [6] \end{cases} \Rightarrow (F)$

D'où (F) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 26 [337] \\ x \equiv 1 [6] \end{cases}$

4) a)

$n_0 = 311$ est solution de (F)

on a $-311 \equiv 337 - 311 [337]$
 $\equiv 26 [337]$

et $-311 \equiv 6 \times 52 - 311 [6]$
 $\equiv 1 [6]$

Donc -311 est solution de (F) (opt 3)

b) on a (F) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 26 [337] \\ x \equiv 1 [6] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -311 [337] \\ x \equiv -311 [6] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 337 \mid (x + 311) \\ 6 \mid (x + 311) \end{cases}$

$\Leftrightarrow 6 \times 337 \mid (x + 311)$ (car $6 \wedge 337 = 1$)

$\Leftrightarrow x \equiv -311 [2022]$

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : x = 2022k - 311$

Donc $S = \{-311 + 2022k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 4:

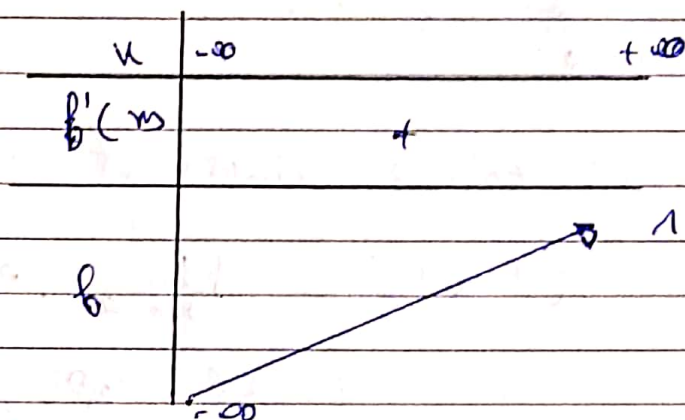
Partie I:

1)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } (\forall x \in \mathbb{R}): f'(x) = e^{-x} > 0$$

Donc:



$$\begin{aligned} \text{on } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{e^{-x}}_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^{-x} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - e^t \quad (t = -x; x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

2)

$$\text{on pose: } g(x) = f(x) - x$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{et } (\forall x \in \mathbb{R}): g'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= e^{-x} - 1 \end{aligned}$$

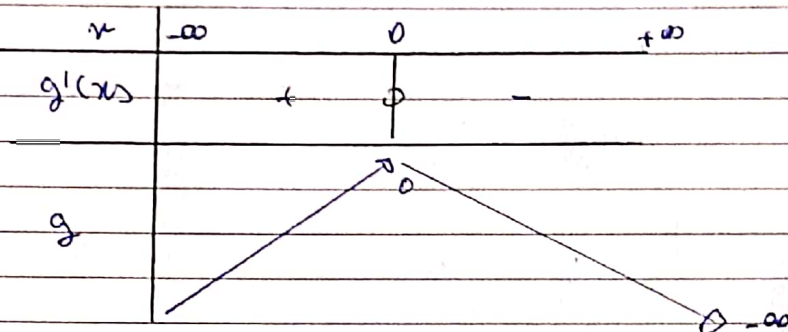
$$\begin{aligned} \text{Donc } \text{on } g'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$1) \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} > 1$$

$$\Leftrightarrow -x > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$



Donc 0 est max

$$*) \quad g(0) = 0$$

*) g est continue strictement $\nearrow$ sur $]-\infty, 0[$

$$\text{donc } g(]-\infty, 0[) =]\lim_{x \rightarrow -\infty}, 0[$$

$$\text{D'où } (\forall x \in]-\infty, 0[) : g(x) < 0$$

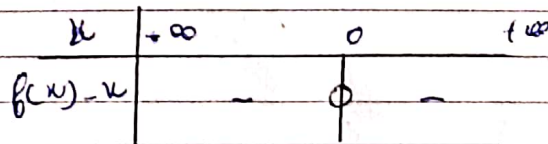
*) g est continue strictement $\searrow$ sur $]0, +\infty[$

$$\text{Donc } g(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+}, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[$$

$$=]\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), 0[$$

$$\text{D'où } (\forall x > 0) : g(x) < 0$$

donc :



$$3) \quad \text{on pose } h(x) = f(x) + x - 1 = x - e^{-x}$$

*) $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Donc h est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $] \frac{1}{2}, 1[$

*) h est dérivable sur $] \frac{1}{2}, 1[$

$$\text{et } (\forall x \in] \frac{1}{2}, 1[) : h'(x) = 1 + e^{-x} > 0$$

Donc h est strictement $\nearrow$ sur $] \frac{1}{2}, 1[$

$$\begin{aligned} 3) \quad h\left(] \frac{1}{2}, 1[\right) &=] \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} h(x) ; \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) [\\ &=] e^{-1} \cdot e^{-e^{-1}} ; 1 - e^{-1} [\\ &=] e^{-1} (1 - e^{(1-e^{-1})}) ; 1 - e^{-1} [\end{aligned}$$

Donc h est une bijection de $] \frac{1}{2}, 1[$ vers $] e^{-1}(1 - e^{1-e^{-1}}), 1 - e^{-1}[$

Et $1 - e^{-1} > 0$ donc $e^{1-e^{-1}} > 1$ car $1 - e^{1-e^{-1}} < 0$

$$\text{d'où } e^{-1}(1 - e^{1-e^{-1}}) < 0$$

Donc $0 \in] e^{-1}(1 - e^{1-e^{-1}}), 1 - e^{-1}[$

D'où 0 admet un antécédant unique $\alpha \in] \frac{1}{2}, 1[$

Par suite l'équation $g(x) = 1 - x$ admet une unique solution $\alpha \in] \frac{1}{2}, 1[$

(car $h(x) = 0$ ss $g(x) = 1 - x$ ($\forall x \in \mathbb{R}$))

4) a) soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \text{on a } F_1(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n} e^{-t} dt \\ &= \int_0^x (x-t) e^{-t} dt \\ &= \int_0^x x e^{-t} - t e^{-t} dt \\ &= x \int_0^x e^{-t} dt - \int_0^x t e^{-t} dt \\ &= x \left[-e^{-t} \right]_0^x - \int_0^x t e^{-t} dt \\ &= -x e^{-x} + x - \int_0^x t e^{-t} dt \end{aligned}$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases} \quad \text{I}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } I &= \int_0^x [-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= -x e^{-x} + [-e^{-t}]_0^x \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I = -x e^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$\text{Donc } F_1(x) = -xe^{-x} + x - (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) \\ = e^{-x} + x - 1$$

$$\text{Donc } (\forall x \in \mathbb{R}^+): F_1(x) = e^{-x} + x - 1$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\text{rq } (\forall n \in \mathbb{N}^*): F_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{on a } F_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} dt$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(t) = \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1) \times n!} \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\text{Donc } F_{n+1}(x) = \left[-e^{-t} \times \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt \\ = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$$

$$\text{Donc } (\forall x \in \mathbb{R}^+), (\forall n \in \mathbb{N}^*): F_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

1) on a $1 \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Donc d'après qst 4)b): } F_2(x) = \frac{x^2}{2!} - F_1(x) \\ = \frac{x^2}{2} - (e^{-x} + x - 1) \quad (\text{qst 4)a})$$

$$\text{Donc } F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x}$$

2) et on a $2 \in \mathbb{N}^*$

$$\text{donc d'après qst 4)b): } F_3(x) = \frac{x^3}{3!} - F_2(x) \\ = \frac{x^3}{3 \times 2} - \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x} \right)$$

$$\text{Donc } F_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in \mathbb{R}^+): F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x} \text{ et } F_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x}$$

d) Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$

on a : $x \geq 0$

$\Rightarrow$ Soit $t \in [0, x]$

on a $t \leq x$

donc $x - t \geq 0$

D'où $(x-t)^n \geq 0$

et on a $\frac{e^{-t}}{n!} \geq 0$ donc : $\frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} \geq 0$

D'où $(\forall t \in [0, x]) : \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} \geq 0$

$\Rightarrow$ ces fonctions sont continues sur $[0, x]$

Donc $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} \geq 0$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}^*) : F_n(x) \geq 0$

e)

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$

on a $3 \in \mathbb{N}^*$ donc d'après qst 4)d) : $F_3(x) \geq 0$

cad $\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x} \geq 0$

donc $x - (1 - e^{-x}) \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$

cad $x - f(x) \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ ①

$\Rightarrow$ et $2 \in \mathbb{N}^*$; donc d'après qst 4)d) : $F_2(x) \geq 0$

$$\text{càd } \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x} > 0$$

$$\text{Donc } x - (1 - e^{-x}) < \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Donc } x - f(x) < \frac{x^2}{2} \quad (2)$$

De ① et ② on déduit que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < x - f(x) < \frac{x^2}{2}$

Partie II :

a) $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$

* Pour $n=0$
on a : $u_0 = 1 > 0$ car $u_0 > 0$

Donc la propriété est vraie pour $n=0$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$

→ Supposons que $u_n > 0$

→ $\forall n : u_{n+1} > 0$

on a $u_n > 0$; et f strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$ (partie I qst 1)

Donc $f(u_n) > f(0)$

car $u_n > 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$

b) a) Soit $n \in \mathbb{N}$
on a : $u_n > 0$, donc $u_n \in \mathbb{R}^+$

Donc d'après Partie I) qst 2) : $f(u_n) - u_n < 0$

donc $u_{n+1} < u_n$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} < u_n$

Pour suite (u_n) est décroissante.

on a (u_n) décroissante et minorée par 0

Donc (u_n) est convergente.

1) on pose $l = \lim u_n$

a) $u_0 \in [0, +\infty[$.

a) (u_n) convergente

a) $b([0, +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$ (car f strictement $\nearrow$)
 $= [0, 1[\subset [0, +\infty[$

Donc $f([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$

a) f est continue sur $[0, +\infty[$

a) on a $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 0$

ces suites sont convergentes.

Donc $\lim u_n \geq \lim 0$

car $l \geq 0$ donc $l \in [0, +\infty[$

D'où l est solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0, +\infty[$

soit $x \in [0, +\infty[$;

on a $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

(tableau de signe de $f(x) - x$)

Donc $l = 0$

D'où $\lim u_n = 0$

c) itg $\lim \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{2}$?

on a $\lim \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2} = \lim \frac{u_n - b(u_n)}{u_n^2}$

soit $n \in \mathbb{N}$;

on a $u_n \geq 0$ donc $u_n \in \mathbb{R}^+$

Donc d'après qst 4)e) Partie I: $\frac{u_n^2}{2} - \frac{u_n^3}{6} \leq u_n - b(u_n) \leq \frac{u_n^2}{2}$

et $u_n \geq 0$ donc $\frac{1}{u_n^2} \geq 0$, d'où: $\frac{1}{2} - \frac{u_n}{6} \leq \frac{u_n - b(u_n)}{u_n^2} \leq \frac{1}{2}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\frac{1}{2} - \frac{u_n}{6} \leq \frac{u_n - b(u_n)}{u_n^2} \leq \frac{1}{2}$

et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{u_n}{6} = \frac{1}{2}$ (car $\lim u_n = 0$)

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - b(u_n)}{u_n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{2}$$

$$a) \quad \forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{e} \leq v_n \leq 1$$

*) Pour $n=0$

$$\text{on a } v_0 \in \left] \frac{1}{e}, 1 \right[$$

$$\text{donc } \frac{1}{e} \leq v_0 \leq 1$$

D'où la propriété est vraie pour $n=0$

*) soit $n \in \mathbb{N}$

$$\rightarrow \text{Supposons que } \frac{1}{e} \leq v_n \leq 1$$

$$\rightarrow \forall n \quad \frac{1}{e} \leq v_{n+1} \leq 1$$

$$\text{on a } \frac{1}{e} \leq v_n \leq 1$$

et f strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$

$$\text{Donc } b\left(\frac{1}{e}\right) \leq b(v_n) \leq b(1)$$

$$\therefore \text{donc } -(1 - e^{-1}) \leq -b(v_n) \leq -(1 - e^{-\frac{1}{e}})$$

$$\text{car cad } 1 - 1 + e^{-1} \leq 1 - b(v_n) \leq 1 - 1 + e^{-\frac{1}{e}}$$

$$\text{Donc } e^{-1} \leq v_{n+1} \leq e^{-e^{-1}} \leq 1 \quad (\text{car } e^{-1} > 0)$$

$$\text{D'où } \frac{1}{e} \leq v_{n+1} \leq 1$$

$$\text{Par suite } (\forall n \in \mathbb{N}): \frac{1}{e} \leq v_n \leq 1$$

b) *) soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{on a } |u_{n+1} - \alpha| = |1 - b(v_n) - (1 - b(\alpha))| \quad (\text{qst 3 Partie I : } f(\alpha) = 1 \text{ et } f(x) = b(x))$$

$$= |b(\alpha) - b(v_n)|$$

o) Si $V_n = \alpha$
alors l'inégalité de vient : 0,0 ce qui est vrai

Donc l'inégalité est vérifiée.

o) Si $V_n \neq \alpha$
on pose $a = \min(V_n, \alpha)$ et $b = \max(V_n, \alpha)$

1) f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[a, b]$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]a, b[$.

et $(\forall x \in]a, b[) : f'(x) = e^{-x}$

D'après TAF : $(\exists c \in]a, b[) : f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

donc $|f(b) - f(a)| = (b-a) |f'(c)|$

D'où : $|f(V_n) - f(\alpha)| = |V_n - \alpha| e^{-c}$

et on a $c > \alpha > \frac{1}{e}$

donc $-c < -\frac{1}{e}$

Donc $e^{-c} \leq e^{-\frac{1}{e}}$

D'où : $|V_n - \alpha| e^{-c} \leq |V_n - \alpha| e^{-\frac{1}{e}}$ (car $|V_n - \alpha| > 0$)

Pour suite $|V_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |V_n - \alpha|$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) : |V_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |V_n - \alpha|$

*) Rq (V_n) est convergente et précisons son limite.

Montrons d'abord que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |V_n - d| \leq e^{-\frac{n}{e}} |V_0 - d|$

1) Rq la propriété est vraie pour $n=0$

$$\text{car } |V_0 - d| \leq e^{-\frac{0}{e}} |V_0 - d|$$

$$\text{Dad } |V_0 - d| \leq |V_0 - d| \text{ ce qui est vrai}$$

Donc la propriété est vraie pour $n=0$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

1) Supposons que $|V_n - d| \leq e^{-\frac{n}{e}} |V_0 - d|$

$$2) \text{ Rq } |V_{n+1} - d| \leq e^{-\frac{n+1}{e}} |V_0 - d|$$

$$\text{on a } |V_n - d| \leq e^{-\frac{n}{e}} |V_0 - d|$$

$$\text{et } e^{-\frac{1}{e}} > 0 ; \text{ donc } e^{-\frac{1}{e}} |V_n - d| \leq e^{-\frac{n+1}{e}} |V_0 - d|$$

$$\text{et d'après ce qui précède on a : } |V_{n+1} - d| \leq e^{-\frac{1}{e}} |V_n - d|$$

$$\text{Donc } |V_{n+1} - d| \leq e^{-\frac{n+1}{e}} |V_0 - d|$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) : |V_n - d| \leq e^{-\frac{n}{e}} |V_0 - d|$$

$$\text{et on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{n}{e}} |V_0 - d| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t |V_0 - d| \quad (t = -\frac{n}{e}; n \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow -\infty)$$
$$= 0$$

$$\text{Donc } \lim V_n = d$$

D'où (V_n) est convergente vers d .

Partie III:

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{on pose : } h_n(x) = f(x) + x^n - 1$$

*) 1) f est continue sur $]0, 1[$

2) $x \mapsto x^n - 1$ est une fct polynôme donc continue sur $]0, 1[$

Donc h_n est continue sur $]0, 1[$

*) Soit $(x, y) \in]0, 1[^2$ tq $x < y$

on a $x < y$ et $x \rightarrow x^n$ est strictement $\uparrow$ sur $\mathbb{R}^+$

Donc $x^n < y^n$

et f strictement $\uparrow$ sur $\mathbb{R}$ donc $f(x) < f(y)$

Donc $f(x) + x^n - 1 < f(y) + y^n - 1$

D'où $h_n(x) < h_n(y)$

Pour suite h_n est strictement $\uparrow$ sur $]0, 1[$

*) $h_n(]0, 1[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} h_n(x); \lim_{x \rightarrow 1^-} h_n(x)[$
 $=]-1, 1 - e^{-1}[\subset \mathbb{J}$

Donc h_n est une bijection de $]0, 1[$ vers $]-1, 1 - e^{-1}[$

et $-1 < 0$ donc $e^{-1} < 1$ c'est $1 - e^{-1} > 0$

Donc $0 \in]-1, 1 - e^{-1}[$; d'où $\emptyset$ admet un unique antécédant $\alpha_n \in]0, 1[$

Donc l'équation ~~$f(x) + x^n - 1 = 0$~~ $h_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in]0, 1[$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ l'éq. $f(x) + x^n - 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in]0, 1[$

2)

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

soit $x \in]0, 1[$

on a $h_{n+1}(x) - h_n(x) = f(x) + x^{n+1} - 1 - (f(x) + x^n - 1)$
 $= x^{n+1} - x^n$

$= x^n(x - 1) \leq 0$ (car $x < 1$)

Donc $(\forall x \in]0, 1[) : h_{n+1}(x) \leq h_n(x)$

et $\alpha_n \in]0, 1[$; donc $h_{n+1}(\alpha_n) \leq h_n(\alpha_n)$

et $h_n(\alpha_n) = 0 = h_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Donc $h_{n+1}(\alpha_n) \leq h_{n+1}(\alpha_{n+1})$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\in \mathbb{J}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\in \mathbb{J}}$

et R_{n+1}^{-1} est strictement $\uparrow$ sur $\mathbb{J} = h_{n+1}(]0, 1[)$

Donc
$$h_{n+1}^{-1}(h_{n+1}(d_n)) < h_{n+1}^{-1}(h_{n+1}(d_{n+1}))$$

Donc
$$d_n < d_{n+1}$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : d_n < d_{n+1}$

Par suite (d_n) est croissante.

*) on a (d_n) croissante et majorée par 1

Donc (d_n) convergente.

3)

) Soit $n \in \mathbb{N}^$,
on a
$$-\frac{1}{n} < \ln(d_n) < 0$$

on a
$$b(d_n) = 1 - (d_n)^n$$

car
$$1 - e^{-d_n} = 1 - (d_n)^n$$

Donc
$$(d_n)^n = e^{-d_n}$$

d'où
$$\ln(d_n)^n = -d_n$$

car
$$\ln(d_n) = -\frac{1}{n} d_n \quad (\ln(d_n)^n = n \ln(d_n))$$

et
$$0 < d_n < 1$$

et
$$-\frac{1}{n} < 0 ; \text{ donc } -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n} d_n < 0$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : -\frac{1}{n} < \ln(d_n) < 0$

*) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = ?$
on a $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : -\frac{1}{n} < \ln d_n < 0$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : e^{-\frac{1}{n}} < d_n < 1$

et
$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^t \quad (t = \frac{1}{n}; n \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0^+)$$

$$= 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Donc
$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$$

4) Montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = -1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

on a $f(x) = 1 - (x)^n$

car $1 - e^{-a_n} = 1 - (a_n)^n$

donc $(a_n)^n = e^{-a_n}$

Donc $a_n = e^{-\frac{a_n}{n}}$

D'où $n(a_n - 1) = n(e^{-\frac{a_n}{n}} - 1)$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : n(a_n - 1) = n(e^{-\frac{a_n}{n}} - 1)$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{-\frac{a_n}{n}} - 1)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{e^{-\frac{a_n}{n}} - 1}{-\frac{a_n}{n}}}_{u(n)} \times (-a_n)$

Et $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \quad \left(t = -\frac{a_n}{n}; n \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \right)$
 $= 1$

Et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = -1$

Partie IV:

1)

1) g est continue sur $\mathbb{R}^+$

a) sur $\mathbb{R}_+^*$

o) $x \rightarrow x$ et f continues sur $\mathbb{R}_+^*$

o) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : x \neq 0$

Donc g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

*.) A droite de 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \\ &= 1 = g(0) \end{aligned}$$

Donc g est continue à droite en 0

D'où g est continue sur $\mathbb{R}^+$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

on a o) $x > 0$

o) Soit $t \in (0, x)$

on a $t \in \mathbb{R}^+$ donc d'après qst 1) de Partie I.

$$\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \leq t - f(t) \leq \frac{t^2}{2}$$

$$\text{càd. } \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \leq t - f(t) \leq \frac{t^2}{2}$$

$$\text{Donc } t - \frac{t^2}{2} \leq f(t) \leq t + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \quad (*)$$

$$\text{1) } 1 - \frac{t}{2} \leq g(t) \leq 1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{2}$$

2) Si $t = 0$

l'inégalité devient $1 \leq 1 \leq 1$ ce qui est vrai

Donc l'inégalité est vérifiée

3) Si $t \neq 0$

alors $\frac{1}{t} > 0$

$$\text{donc } 1 - \frac{t}{2} \leq \frac{f(t)}{t} \leq 1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{2} \quad (\text{d'après } *)$$

$$\text{Donc } 1 - \frac{t}{2} \leq g(t) \leq 1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{2}$$

$$\text{Donc } (\forall t \in (0, x]) : 1 - \frac{t}{2} \leq g(t) \leq 1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{2}$$

o) Ces bds sont continues sur $(0, x]$

Donc $\int_0^x (1 - \frac{t}{2}) dt \leq \int_0^x g(t) dt \leq \int_0^x (1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{2}) dt$

et $\frac{1}{x} > 0$ donc $\frac{1}{x} \int_0^x (1 - \frac{t}{2}) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{2}) dt$

et on a $\int_0^x (1 - \frac{t}{2}) dt = [t - \frac{t^2}{4}]_0^x$
 $= x - \frac{x^2}{4}$

et $\int_0^x (1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{2}) dt = [t + \frac{t^3}{18} - \frac{t^2}{4}]_0^x$
 $= x + \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{4}$

donc $\frac{1}{x} (x - \frac{x^2}{4}) \leq F(x) \leq \frac{1}{x} (x + \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{4})$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $1 - \frac{x}{4} \leq F(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$

b)

on a $(\forall x > 0)$: $1 - \frac{x}{4} \leq F(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{x}{4} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18} = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 = F(0)$

D'où F est continue à droite en 0

Soit $x > 0$

on a : $1 - \frac{x}{4} \leq F(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$

Donc $-\frac{x}{4} \leq F(x) - F(0) \leq -\frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$ ($F(0) = 1$)

et $\frac{1}{x} > 0$ Donc $-\frac{1}{4} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{4} + \frac{x}{18}$

D'où $(\forall x > 0)$: $-\frac{1}{4} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{4} + \frac{x}{18}$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4} + \frac{x}{18} = -\frac{1}{4}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\frac{1}{4} = F'_d(0)$

Ainsi F est dérivable à droite en 0 et $F'_d(0) = -\frac{1}{4}$

Pour suite (C_f) admet une demi-tangente oblique de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$

à droite du point $A(0, 1)$

3) a) Soit $x \in]1, +\infty[$

on a $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \frac{1}{x} (\int_0^1 g(t) dt + \int_1^x g(t) dt)$

on a : $x \geq 1$

soit $t \in [1, x]$

on a $1 \leq t \leq x$ et f strictement $\uparrow$ sur $\mathbb{R}^+$

Donc $f(1) \leq f(t) \leq f(x)$

$$\text{car } 0 \leq 1 - e^{-t} \leq f(t) \leq 1 - e^{-x} \leq 1$$

$$\text{donc } 0 \leq f(t) \leq 1$$

$$\text{et } \frac{1}{t} > 0 \text{ donc } 0 \leq \frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$$

$$\text{D'où } (\forall t \in [1, x]): 0 \leq g(t) \leq \frac{1}{t}$$

• ces fcts sont continues sur $[1, x]$

$$\text{donc } 0 \leq \int_1^x g(t) dt \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\text{et on a } \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_1^x g(t) dt \leq \ln x$$

$$\text{d'où } \int_0^1 g(t) dt \leq \int_0^1 g(t) dt + \int_1^x g(t) dt \leq \int_0^1 g(t) dt + \ln x$$

$$\text{et } \frac{1}{x} > 0 \text{ donc } 0 \leq \frac{1}{x} \int_0^1 g(t) dt \leq \frac{1}{x} \left(\int_0^1 g(t) dt + \int_1^x g(t) dt \right) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 g(t) dt + \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{D'où } (\forall x \in]1, +\infty[): 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 g(t) dt + \frac{\ln x}{x}$$

$$2) \text{ on a } (\forall x > 1): 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 g(t) dt + \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{n} \int_0^1 g(t) dt}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_0 = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 0$$

D'où $y=0$ est une asymptote $\theta'(C_F)$ au voisinage de $+\infty$

4) a)

$\rightarrow g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (qst 1) Partie IV)

Donc g admet une fct primitive G sur $\mathbb{R}^+$

$$\text{D'où } (\forall n > 0): F(n) = \frac{1}{n} (G(n) - G(0)) \quad (\text{car } (n, 0) \in \mathbb{R}^{+2})$$

q) $\rightarrow x \mapsto x$ est une fct polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$
 $\rightarrow (\forall n > 0): n \neq 0$

Donc $n \mapsto \frac{1}{n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$\rightarrow G$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}^+$

Donc G est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en particulier $]0, +\infty[$

$$\rightarrow G(0) = \text{cte}$$

Donc $n \mapsto (G(n) - G(0))$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

D'où F est dérivable sur $]0, +\infty[$

$\rightarrow F$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\text{et } (\forall x > 0): F'(x) = -\frac{1}{x^2} (G(x) - G(0)) + \frac{1}{x} g(x)$$

$$= -\frac{1}{x^2} (G(x) - G(0)) + \frac{g(x)}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \int_0^x g(t) dt + \frac{g(x)}{x^2}$$

$$= \frac{g(x) - \int_0^x g(t) dt}{x^2}$$

$$\text{Donc } (\forall x > 0): F'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$$

b)

$$\text{on pose } \varphi(x) = e^{-x}(x+1) - 1$$

$$\varphi \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } (\forall x > 0): \varphi'(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = -xe^{-x} < 0 \quad (\text{car } x > 0)$$

Donc φ est strictement $\searrow$ sur $]0, +\infty[$

et φ continue sur $]0, +\infty[$; donc $f(]0, +\infty[) = \int \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)[$
 $= \int \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); 0[$

Donc $(\forall x > 0): f(x) < 0$

D'où $(\forall x > 0): e^{-x}(x+1) - 1 < 0$

c)
 *) h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(\forall x > 0): h'(x) = f'(x) - \left(\int_0^x g(t) dt\right)'$
 $= f'(x) - g(x)$
 $= e^{-x} - \frac{1 - e^{-x}}{x}$
 $= \frac{x e^{-x} - 1 + e^{-x}}{x}$
 $= \frac{e^{-x}(x+1) - 1}{x} < 0 \text{ (qst b)}$

Donc h est strictement $\downarrow$ sur $]0, +\infty[$

**) h est continue strictement $\downarrow$ sur $]0, +\infty[$

donc $h(]0, +\infty[) = \int \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)[$

et on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \int_0^x g(t) dt$

on a $x \rightarrow \int_0^x g(t) dt$ est continue à droite en 0

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x g(t) dt = \int_0^0 g(t) dt = 0$

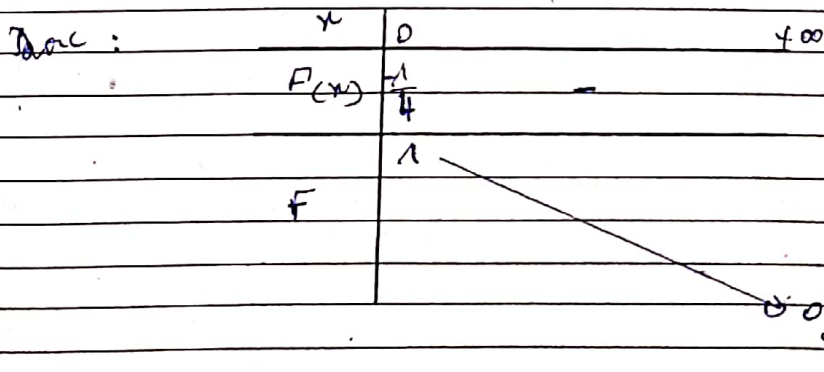
et on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

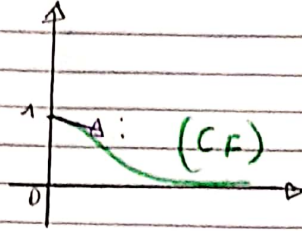
Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$

D'où $h(]0, +\infty[) = \int \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x); 0[=]$

Donc $(\forall x > 0): h(x) < 0$

5) on a $(\forall x > 0): F'(x) = \frac{h(x)}{x^2} < 0 \text{ (qst 4)c)}$





Partie V:

1) a)

$$\text{on a } u_0 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{0x}(1+e^x)} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$= [\ln(1+e^x)]_0^1$$

$$= \ln(1+e) + \ln 2$$

$$\text{Donc } u_0 = \ln(2+2e)$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{on a } u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{e^{(n+1)x}} \times \frac{e^x}{1+e^x} dx - \int_0^1 \frac{1}{e^{nx}} \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \left(\frac{1}{e^{(n+1)x}} - \frac{1}{e^{nx}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} (e^{-x} - 1) dx$$

on a:

*1) $1 > 0$

*2) Soit $x \in [0, 1]$;

$$\text{on a } \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} > 0$$

$$\text{et } x < 0 \text{ donc } e^{-x} > 1$$

$$\text{car } e^{-x} > 1 \text{ si } x < 0$$

$$\text{Donc } \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} (e^{-x} - 1) < 0$$

$$\text{D'où } (x \in [0, 1]) : \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} (e^{-x} - 1) < 0$$

*3) les fct sont continues sur $[0, 1]$

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} (e^{-x} - 1) dx < 0$$

$$\text{D'où } u_{n+1} - u_n < 0$$

Par suite $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} < u_n$

* inalement (u_n) est décroissante.

→ Ilg (u_n) est convergente.
Pour cela on mq (u_n) est minorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$;

a) $0 \leq 1$

a) Soit $x \in [0, 1]$;

on a $e^x \geq 0$ et $e^{nx}(1+e^x) \geq 0$

$$\text{Donc } \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} \geq 0$$

$$\text{D'où } (\forall x \in [0, 1]): \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} \geq 0$$

a) cette fct est continue sur $[0, 1]$

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx \geq 0.$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}): u_n \geq 0$$

Donc (u_n) est minorée par 0
et comme (u_n) est décroissante
alors (u_n) est convergente.

c) → Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{on a } u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{(n+1)x}(1+e^x)} \right) dx - \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} \left(-\frac{1}{e^x} + 1 \right) \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^x + 1}{e^{nx}(1+e^x)} \right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{-nx} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1$$

$$= -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1 - e^{-n}}{n} = \frac{f(n)}{n} = g(n)$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_{n+1} + w_n = g(n)$

$\rightarrow$ Ilq $\lim w_n = l$

on pose $l = \lim w_n$

on a $\lim w_{n+1} = l$ et $\lim w_n = l$

Donc $\lim w_{n+1} + w_n = 2l$ (1)

et on a $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_{n+1} + w_n = g(n)$

Donc $\lim w_{n+1} + w_n = \lim g(n)$

$= \lim \frac{b(n)}{n}$

$= \lim \frac{1 - e^{-n} \rightarrow 0}{n}$

Donc $\lim w_{n+1} + w_n = 0$ (2)

De (1) et (2) on déduit que $2l = 0$ donc $l = 0$

D'où $\lim w_n = 0$

1a) soit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Pq } (\forall n \geq 2) : \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^{-x}}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

4) Démonstration

Pq la propriété est vraie pour $n=2$

$$\text{càd } \sum_{k=1}^1 (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^1 e^{-x}}{e^{2x}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\text{càd } -e^{-x} = \frac{-e^{-x}}{e^{2x}(1+e^x)} - \frac{1}{e^{2x}+1}$$

$$\text{càd } -e^{-x} = \frac{-e^{-x} - e^{2x}}{e^{2x}(1+e^x)}$$

$$\text{càd } -e^{-x} = \frac{-e^{-x}(1+e^x)}{e^{2x}(1+e^x)}$$

$$\text{càd } -e^{-x} = -e^{-x} \quad \text{ce qui est vrai}$$

Donc la propriété est vraie pour $n=2$

4) soit $n \in \mathbb{N}$

$$1) \text{ supposons que } \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^{-x}}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$2) \text{ Pq } \sum_{k=1}^n (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^n e^{-x}}{e^{(n+1)x}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-n}}$$

$$\text{on a } \sum_{k=1}^n (-1)^k e^{-kx} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} + (-1)^n e^{-nx}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} e^{-x}}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + (-1)^n e^{-nx}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} e^{-x} + (-1)^n (1+e^x)}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} + (-1)^n + (-1)^n e^x}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad (\text{car } (-1)^{n-1} e^{-x} + (-1)^n e^{-x} = 0)$$

$$= \frac{(-1)^n e^{-x}}{e^{(n+1)x}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-n}}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : (\forall n \geq 2) : \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^{-x}}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-n}}$$

b)

soit $n \geq 2$;

$$\text{on a. } (-1)^{n-1} w_n = (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \quad (\text{qst 2)a})$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^x+1} dx$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} e^{-kx} \right]_0^1 + \left[-\ln(e^x+1) \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(-1)^k}{k} e^{-k} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(-1)^k}{k} \right) - \ln(1+e^{-1}) + \ln 2$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(-1)^k - (-1)^k e^{-k}}{k} \right) + \ln \left(\frac{2}{1+e^{-1}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left((-1)^k \times \frac{1-e^{-k}}{k} \right) + \ln \left(\frac{2e}{1+e} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} ((-1)^k g(k)) + \ln \left(\frac{2e}{1+e} \right)$$

$$= S_n + \ln \left(\frac{2e}{1+e} \right)$$

$$\text{donc } S_n = (-1)^{n-1} w_n - \ln \left(\frac{2e}{1+e} \right)$$

$$\text{d'où (Vn \geq 2): } S_n = (-1)^{n-1} w_n + \ln \left(\frac{1+e}{2e} \right)$$

$$\text{donc } \lim S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{w_n}{n} + \ln \left(\frac{e+1}{2e} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{e+1}{2e} \right)$$