Bac Blanc 17 : ouvert

Exercice 1 :

Soit f une telle fonction. On suppose par l'absurde que $\exists x_0 \in [a,b], \quad f(x_0) > 0$
1. Si $x_0 \in]a,b[$:
(a) En utilisant la continuité de f en x_0, montrer que :

$$\exists \alpha > 0, [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \subset [a,b], \forall x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha], f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}.$$

(b) Déduire que $\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(x) \geqslant \alpha f(x_0) > 0$.
(c) Trouver la contradiction. Conclure.
2. On a montré que f est nulle sur $]a,b[$. Déduire que $f=0$ sur $[a,b]$.
3. **Application :**
(a) Soit P un polynôme réel tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^k P(x)dx = 0$.
Montrer que P est nul sur $\mathbb{R}$
(b) Soit f continue sur $[0,1]$. On note $M = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$. On suppose que $\int_0^1 f(x)dx = M$.
Que peut-on dire de f ?
4. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ qui s'annule sur un nombre fini de points : $x_1, \cdots, x_n$ et ne s'annule pas ailleurs. Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \left| \int_0^1 f(x)e^{px}dx \right| = +\infty.$$

Exercice 2 :
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les diviseurs de zéro de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ sont exactement les non inversibles.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times) \iff n$ est premier

Exercice 3 :
Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.
Montrer que $\exists\, k \in \mathbb{N}^*, a^k \equiv 1[b]$.

Exercice 4 :
1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \overline{z} = |z|.$$

2. Montrer que le triangle (ABC) est équilatéral si, et seulement si,

$$\frac{c-a}{b-a} = -j \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{c-a} = -j^2.$$

3. En déduire que le triangle (ABC) est équilatéral si, et seulement si,

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$