DEVOIR DE CONTRÔLE N°06 – *Bac sciences Maths B*

DURÉE : 04 HEURES – *Vendredi 19-04-2024*

> ***Note :** l'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.*
> *La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
> *En particulier, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.*

✓ *Le sujet se compose de deux exercices et d'un problème :*

- *Un exercice d'arithmétiques.*
- *Un exercice sur les nombres complexes.*
- *Un problème de synthèse d'analyse.*

Exercice n°01 : (3,5pts)

⇨ *Soit p un entier naturel premier et impair.*

On suppose qu'il existe $(x,y)\in(\mathbb{N}^*)^2$ *tel que :* $x\wedge y=1$ *et* $x^2-2y^2\equiv 0\ [p]$.

0,5 **1)- a)-** *Montrer que :* $y\wedge p=1$.

0,25 **b)-** *En déduire qu'il existe* $u\in\mathbb{Z}$ *tel que :* $uy\equiv 1\ [p]$.

2)- *On pose :* $t=ux$.

0,5 **a)-** *Montrer que :* $t^2\equiv 2\ [p]$.

0,5 **b)-** *En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :* $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$.

0,25 **3)-** *Montrer que :* $(\forall k\in\{1,2,\dots,p-1\})$; $p\,/\,C_p^k$.

On rappelle que : $(\forall k\in\{1,2,\dots,p-1\})$; $kC_p^k=pC_{p-1}^{k-1}$.

0,25 **4)- a)-** *En utilisant la formule de Moivre, montrer que :*

$$(1+i)^p=2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)+i.2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right).$$

0,75 **b)-** *En utilisant la formule du Binôme, montrer que :*

$$(1+i)^p=\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k}+i.\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k+1}$$ *. Puis en déduire que :*

$2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\in\mathbb{Z}$ *et que :* $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\equiv 1\ [p]$.

0,5 **5)-** *En déduire que si :* $p\equiv 5\ [8]$, *alors il n'existe pas de couple* $(x,y)\in(\mathbb{N}^*)^2$ *tels que :* $x\wedge y=1$ *et* $x^2-2y^2\equiv 0\ [p]$.

Exercice n°02 : (3,5pts)

I- *On considère dans l'ensemble* $\mathbb{C}$*, l'équation suivante :*

$$(E):\ z^2-2\left(1+i\cos(\theta)\right)z+2i\cos(\theta)=0,\ \text{Où }\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[.$$

0,25 **1)- a)-** *Vérifier que le discriminant de* (E) *est :* $\Delta=\left(2\sin(\theta)\right)^2$.

0,5 **b)-** *En déduire l'ensemble des solutions de* (E).

0,5 **2)-** *Ecrire chacune des solutions de* (E) *sous forme trigonométrique.*

II- *Le plan complexe* (P) *est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A ; M_1 *et* M_2 *d'affixes respectifs :* $a=1$; $z_1=1+i.e^{i\theta}$ *et* $z_2=1+i.e^{-i\theta}$. *On désigne par* I *le milieu du segment* $[M_1M_2]$.

0,5 **1)-** *Déterminer et construire l'ensemble décrit par* I *lorsque* θ *varie sur* $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

0,5 **2)- a)-** *Ecrire* $\frac{z_2-1}{z_1-1}$ *sous forme exponentielle, puis en déduire que* M_2 *est l'image de* M_1 *par une rotation* R *que l'on précisera.*

0,25 **b)-** *Déterminer* θ *pour que* AM_1M_2 *soit un triangle équilatéral.*

0,25 **3)-** *Montrer que lorsque* θ *varie sur* $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *, la droite* (M_1M_2) *a une direction fixe.*

4)- *Soit* (D) *la droite d'équation :* $x=1$.

0,75 ✓ *Montrer que :* $M_2=s_{(D)}(M_1)$. *Puis déterminer* θ *pour que le quadrilatère* OAM_2M_1 *soit un losange.*

Problème : (13pts)

I- *Soit* f *la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par :*

$$f(0)=0\ \text{ et }\ f(x)=x^2.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ ;\text{si } x>0.$$

0,5 **1)- a)-** *Calculer :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

0,75 **b)-** *Montrer que* f *est continue sur* $[0;+\infty[$.

0,5 **2)- a)-** *Vérifier que :* $(\forall t\geq 0)$; $1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$.

0,5 **b)-** *En déduire que :* $(\forall x\geq 0)$; $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

0,75 **c)-** *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{-1}{2}$.

0,5	3)- Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$.
0,5	4)- a)- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
0,75	b)- Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $$(\forall x \in]0;+\infty[);\ f'(x) = 2x\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)}\right].$$
0,5	5)- a)- Soit $x > 0$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto ln(t)$ sur l'intervalle $[x;x+1]$, montrer que : $$\frac{1}{x+1} < ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$
0,5	b)- En déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
1,5	6)- Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,5	7)- Justifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0;+\infty[$.
	II- Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$.
0,5	1)- En utilisant une intégration par parties, calculer $F(x)$ pour tout $x > 0$.
0,75	2)- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$. Puis en déduire que : $\int_0^1 f(t)dt = \frac{4ln(2)-1}{6}$.
1	3)- En utilisant une intégration par changement de variable, montrer que : $\int_0^{ln(2)} f^{-1}(x)dx = \int_0^1 t.f'(t)dt$. Puis en déduire la valeur de $\int_0^{ln(2)} f^{-1}(x)dx$.
0,5	4)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k+1}^{n} f^{-1}\left(\frac{k}{n}.ln(2)\right)$. ✓ Justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.
	III- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose : $I_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt^n}dt$.
0,5	1)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ \int_0^1 f(t)dt - I_n = n.\int_0^1 \frac{t^n.f(t)}{1+nt^n}dt$.
0,75	2)- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On a : $$0 \le n.\int_0^1 \frac{t^n.f(t)}{1+n.t^n}dt \le n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} f(t)dt + F\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
0,75	3)- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} F\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$.
0,5	4)- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ en justifiant la réponse.

➤ Exercices Bonus :

○ Exercice n°01 : (02pts)

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $a_n = \sum_{k=0}^{10^n - 1} s(k)$, Où $s(k)$ désigne la somme des chiffres de l'entier naturel k .

1 — 1)- Calculer a_1, puis montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right);\ a_n = 45n \times 10^{n-1}$.

1 — 2)- Déterminer $s(N)$, sachant que : $N = \sum_{k=10^{2023}}^{10^{2024}-1} s(k)$.

○ Exercice n°02 : (03pts)

⇨ Pour tout $a + ib \in \mathbb{C}$ et tout $x + iy \in \mathbb{C}$, On pose :

$$(a+ib) * (x+iy) = ax + i(ay + bx).$$

On considère le sous ensemble : $G = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) \neq 0 \right\}$.

0,25 — 1)- Justifier que $*$ est une loi de composition interne dans G .

1,5 — 2)- Montrer que $(G,*)$ est un groupe commutatif.

3)- On pose : $H = \left\{ z = e^y(1+iy) \,/\, y \in \mathbb{R} \right\}$.

0,75 — a)- Montrer que H est une partie stable de $(G,*)$.

0,5 — b)- Montrer que : $(\forall z \in H);\ z' \in H$, Où z' est le symétrique de z pour la loi $*$.

○ Exercice n°03 : (03pts)

⇨ On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'équation (E) : $x^2 - 7y^2 = 1$.

0,25 — 1)- a)- Justifier que si (a,b) est une solution de (E), alors : $a \wedge b = 1$.

1 — b)- Déterminer la solution (a,b) de (E) telle que b soit le plus petit possible.

2)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $u_n = \left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n$.

0,75 — a)- Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right);\ u_n = a_n + b_n\sqrt{7}$,Où le couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est solution de (E).

0,25 — b)- En déduire le nombre de solution de (E).

0,75 — c)- Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right);\ \left(8 - 3\sqrt{7}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{7}$. Puis exprimer a_n et b_n en fonction de n .

Fin Du Sujet