✔ **Note :**

*La durée de l'épreuve est de **4 heures**, le sujet se compose de cinq exercices : traiter au choix l'exercice d'arithmétique ou bien celui des structures algébriques .*

Exercice 01:(3,5pts)

➡ Dans le système décimal , on considère l'entier naturel :

$$a_n = \underbrace{11\ldots11}_{n \text{ fois}} \text{ , Où } n \in \mathbb{N}^* .$$

0,5 — **1)-** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On a : $a_n \equiv 1[2]$ et $a_n \equiv 1[5]$.

0,25 — **2)-** Déterminer toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles : $a_n \equiv 0[3]$.

0,5 — **3)-** Soit $p > 5$ un nombre premier .

✔ En utilisant le théorème de Fermat , montrer que : $a_{p-1} \equiv 0[p]$.

0,25 — **4)- a)-** Vérifier que : $\left(\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right); m < n \Rightarrow a_n - a_m = 10^m . a_{n-m}$.

b)- Soit $q \geq 2$ un entier naturel tels que : $q \wedge 10 = 1$.

0,5 — ✔ Montrer que : $\left(\exists k \in \mathbb{N}^*\right); a_k \equiv 0[q]$ (On pourra utiliser **4)- a)-** et Gauss).

0,5 — **5)-** Quels sont les entiers naturels non nuls qui ont au moins un multiple qui s'écrit Dans le système décimal sous la forme a_n Où $n \in \mathbb{N}^*$.

0,5 — **6)- a)-** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); a_n \equiv 0[7] \Leftrightarrow n \equiv 0[6]$.

0,5 — **b)-** Déterminer le plus grand entier a_n divisible par 7 et plus petit que $b = 2^{561}$.

Exercice 02:(3,5pts)

✔ **Les parties I et II sont indépendantes .**

0,25 — I- **1)-** Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $a = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

0,25 — **2)-** En déduire sous forme algébrique les racines carrées de a .

0,5 — **3)-** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): 2z^2 + \frac{1}{2}\left(-3\sqrt{3} + i\right)z + 1 = 0$.

II- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, On Considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $a=2$, $b=1-i$ et $c=1+i$.

0,25 **1)- a)-** Construire le triangle ABC.

0,25 **b)-** Ecrire $\frac{c-a}{b-a}$ sous forme algébrique, puis déduire la nature du triangle ABC.

2)- Soit r la rotation de centre A vérifiant : $r(B)=C$. On pose : $D=r(C)$.

On désigne par (Γ) le cercle de diamètre $[BC]$. On pose : $(\Gamma')=r(\Gamma)$.

0,5 **a)-** Déterminer l'angle de la rotation r ainsi que $d=aff(D)$.

0,5 **b)-** Déterminer et construire l'ensemble (Γ').

3)- Soit $M(z)$ un point de (Γ) distinct de C et $M'(z')$ son image par la rotation r.

0,25 **a)-** Montrer que : $\left(\exists\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};2\pi\right]\right);z=1+e^{i\theta}$.

0,25 **b)-** En déduire que : $z'=-ie^{i\theta}+2+i$.

0,25 **c)-** Montrer que : $\frac{z'-c}{z-c}=\frac{2\cos\theta}{\left|e^{i\theta}-i\right|^2}$ puis en déduire que C, M et M' sont alignés.

0,25 **4)-** Construire le point $M\left(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ et son image M' par la rotation r.

Exercice 03:(3,5pts)

➡ On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b&b\\b&a+b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,5 **1)- a)-** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

0,5 **b)-** Montrer que $B(I,J)$ est une base de $(E,+,\cdot)$ puis en déduire $\dim(E)$.

0,5 **2)-** Vérifier que $J^2=2.J$ puis en déduire que pour tout $(a,b,x,y)\in\mathbb{R}^4$, on a :

$$M(a,b)\times M(x,y)=M(ax,ay+bx+2by).$$

0,75 **3)-** Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire non intègre.

0,5 **4)-** Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E,+,\times)$ $\Leftrightarrow(a\neq0$ et $a\neq-2b)$.

5)- On considère l'ensemble : $\mathcal{H}=\left\{ A(x)=I+\dfrac{3^x-1}{2}.J \,/\, x\in\mathbb{Z} \right\}$.

0,25 **a)-** Montrer que $\mathcal{H}$ est une partie stable de $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

0,5 **b)-** Montrer que l'application $f: x\mapsto A(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},+)$ vers $(\mathcal{H},\times)$ puis en déduire que $(\mathcal{H},\times)$ est un groupe commutatif.

- **Exercice 04:(6,5pts)**

➡ Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-2\ln\left|\dfrac{1}{2}e^x-1\right|$.

(C_f) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tels que : $\|\vec{i}\|=2cm$.

0,25 **1)- a)-** Déterminer D_f.

0,5 **b)-** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\ln 2} f(x)$.

0,75 **2)-** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et que la droite (Δ) d'équation $y=-x+2\ln 2$ est Une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0,5 **3)-** Montrer que la droite (D) d'équation $x=\ln 2$ est un axe de symétrie de (C_f).

0,5 **4)-** Montrer que f est dérivable sur tout intervalle de D_f et que :

$$(\forall x\in D_f);\ f'(x)=\frac{2+e^x}{2-e^x}.$$

0,5 **5)-** Prouver que : $(\forall x\in D_f);\ f''(x)>0$.

0,5 **6)-** Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7)- On désigne g par la restriction de f à l'intervalle $I=]\ln 2;+\infty[$.

0,5 **a)-** Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera.

0,5 **b)-** Déterminer la bijection réciproque g^{-1}.

8)- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=\ln 3 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N});\ u_{n+1}=u_n-\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.\ \text{On pose : } \alpha=g^{-1}(0).$$

0,5 **a)-** Soit $x\in]\ln 2;\alpha[$. En appliquant le théorème des accroissement fini à f sur Le segment $[x;\alpha]$, montrer que : $x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\leq\alpha$.

0,5 **b)-** Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n\in]\ln 2;\alpha[$.

0,5 **c)-** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis déduire qu'elle est convergente.

0,5 **d)-** Justifier soigneusement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

- **Exercice 05:(6,5pts)**

I- On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

(C_f) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tels que : $\|\vec{i}\|=2cm$.

0,5 **1)-** Vérifier que : $D_f=\mathbb{R}$ et étudier la parité de f .

0,5 **2)-** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on déduire ?

0,5 **3)-** Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}); f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et étudier la concavité de (C_f).

0,5 **4)-** Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.

0,5 **5)-** Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ en précisant la tangente (T) au point d'abscisse 0 .

0,5 **6)-** En utilisant une intégration par parties , calculer l'aire du domaine :

$$(\Delta)=\left\{M(x,y)\in(\mathrm{P})\,/\,x\in[0;1];y\in[0;1];f(x)\le y\le f^{-1}(x)\right\}.$$

II- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On pose : $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

0,25 **1)- a)-** Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

0,5 **b)-** En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\ln 2$.

2)- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On pose : $b_n=f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f\left(\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{2n}\right)$.

0,5 **a)-** Montrer que : $(\forall t\ge 0);1-\frac{1}{2}t^2\le f'(t)\le 1$. Puis en déduire que :

$$(\forall x\ge 0);x-\frac{1}{6}x^3\le f(x)\le x .$$

0,5 **b)-** Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);a_n\left(1-\frac{1}{6n^2}\right)\le b_n\le a_n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

III- On considère la fonction F définie par :

$$F(0)=\ln 2 \text{ et } F(x)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t^2}dt;x\ne 0.$$

0,5 **1)-** Justifier que : $D_F=\mathbb{R}$ et que F est une fonction paire .

0,25 **2)- a)-** *Montrer que :* $(\forall x > 0); -\frac{1}{4}x^2 + \ln 2 \leq F(x) \leq \ln 2$ *(Utiliser* II **2)- a)-** *)*.

0,5 **b)-** *En déduire que* F *est continue et dérivable à droite en* $x_0 = 0$.

0,25 **3)- a)-** *Montrer que :* $(\forall x > 0); \frac{f(x)}{2x} \leq F(x) \leq \frac{f(2x)}{2x}$.

0,25 **b)-** *En déduire :* $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

0,5 **4)- a)-** *Montrer que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que :*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); F'(x) = \frac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}.$$

0,25 **b)-** *Montrer que :* $(\forall x > 0); f(2x) - 2f(x) < 0$.

0,5 **5)-** *Dresser le tableau de variation complet de* F *en justifiant votre réponse .*

Fin Du Sujet .

✔ **Note :**

La durée de l'épreuve est de **4 heures**, le sujet se compose de cinq exercices : traiter au choix l'exercice d'arithmétique ou bien celui des structures algébriques .

Exercice 01:(03pts)

➡ Soient p et q deux entiers naturels premiers tels que :

$$p \leq q \text{ et } 10^{p+q-1} \equiv 1[pq].$$

0,25 **1)- a)-** Montrer que : $p \wedge 10 = 1$.

0,75 **b)-** En déduire que : $10^{p-1} \equiv 1[p]$ et $10^{q} \equiv 1[p]$.

0,25 **2)- a)-** Montrer que : $(p-1) \wedge q = 1$.

0,75 **b)-** Prouver que : $p = 3$, puis en déduire que $10^{q+2} \equiv 1[q]$.

0,25 **3)- a)-** Décomposer $10^3 - 1$ en facteurs premiers .

0,75 **b)-** Prouver que : $q \in \{3;37\}$.

Exercice 02:(03pts)

➡ Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère le sous-ensemble :

$$\mathcal{H}=\left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Z} \right\}.$$

0,75 **1)-** Montrer que $(\mathcal{H},+)$ est un groupe commutatif .

0,25 **2)- a)-** Montrer que $\mathcal{H}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,75 **b)-** Montrer que $(\mathcal{H},+,\times)$ est un anneau unitaire en précisant l'élément neutre de $(\mathcal{H},\times)$.

0,25 **3)-** Montrer que l'anneau $(\mathcal{H},+,\times)$ est intègre .

0,5 **4)- a)-** Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que la matrice $M(x)$ est inversible dans $(\mathcal{H},+,\times)$ si et Seulement si : $x \in \{-1;1\}$.

0,25 **b)-** L'anneau $(\mathcal{H},+,\times)$ est-il un corps ? justifier votre réponse .

- **Exercice 03:(04pts)**

✓ **Les parties I et II sont indépendantes .**

I- *On considère dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$(E): z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0 \text{ Où } a \in \mathbb{C} - \{-i;i\}.$$

0,25 **1)**- *Vérifier que* $u = a + i$ *est solution de* (E).

0,5 **2)**- *En déduire la deuxième solution* v *de* (E) *puis montrer que :* $|u| + |v| \geq 2$.

0,25 **3)**- *Déterminer la nature de l'ensemble des points* $M(a)$ *tels que :* $|u| + |v| = 2$.

4)- *On suppose dans cette question que :* $|a| = 1$.

0,25 **a)**- *Montrer que :* $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$.

0,5 **b)**- *Montrer que :* $u^2 = a\left[(a - \overline{a}) + 2i\right]$ *et que :* $\arg(u) \equiv \frac{1}{2}\arg(a) + \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

II- *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $(O, \vec{u}, \vec{v})$, *On Considère les points* M , M_1 *et* M_2 *d'affixes respectifs :* a , $z_1 = (1+i)a + 2i$ *et* $z_1 = (1-i)a + 2i$.

0,25 **1)- a)**- *Vérifier que :* $z_2 = -iz_1 - 2 + 2i$.

0,5 **b)**- *En déduire que :* $M_2 = r(M_1)$ *Où* r *est une rotation dont on déterminera L'angle et l'affixe de son centre* Ω.

2)- *On suppose que* $a \neq 0$ *et on note* I *le milieu du segment* $[M_1M_2]$.

0,25 **a)**- *Montrer que :* $I = t(M_1)$ *Où est une translation dont on déterminera l'affixe De son vecteur .*

0,25 **b)**- *Montrer que :* $(I\Omega) \perp (M_1M_2)$.

0,5 **3)- a)**- *Montrer que :* $\frac{z_1 - a}{z_2 - a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |a| = 2$.

0,5 **b)**- *En déduire l'ensemble des points* $M(a)$ *du plan complexe pour que les points* Ω , M , M_1 *et* M_2 *sont cocycliques .*

- **Exercice 04:(5,5pts)**

I- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f_n(x) = (x-1)^n \ln x .$$

0,75 **1)- a)-** *Montrer que l'équation :* $(E): f_n(x) = 1$ *admet une unique solution* a_n *dans L'intervalle* $[1;+\infty[$ *et que :* $2 < a_n < e$.

0,75 **b)-** *Montrer que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante , puis en déduire Qu'elle est convergente .*

2)- *On pose :* $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

0,5 **a)-** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*); f_n(L) \leq 1$.

0,75 **b)-** *Montrer que :* $L = 2$ *(On pourra raisonner par l'absurde).*

II- *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites définies par :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

0,5 **1)- a)-** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (n+1)u_n = \ln 2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$.

0,75 **b)-** *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{2(n+2)} \leq \ln 2 - (n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2}$. *Puis Déterminer la limite de la suite* $((n+1)u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2)- *On pose :* $S_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \ldots + (-1)^n (x-1)^n$ *Où* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x > 0$.

0,75 **a)-** *Montrer que :* $S_n(x) = \frac{1-(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}$.

0,75 **b)-** *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ln 2 - v_n = (-1)^{n+1}\left[\ln 2 - (n+1)u_n\right]$ *et calculer La limite de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Exercice 05:(4,5pts)**

➡ *Soit* F *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); F(x) = e^{-x^2}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt .$$

0,75 **1)- a)-** *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{3}x^3 e^{-x^2}$.

0,75 **b)-** *Prouver que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x^3 e^{-x^2} = 0$. *Puis en déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,75 **2)-** *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); F'(x) = xe^{-x^2} G(x)$$

Où G est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $G(x) = xe^{-x^2} - 2\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt$.

0,75 **3)- a)-** *Déterminer la monotonie de* $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ *sur et* $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

0,25 **b)-** *Justifier que :* $\left(\forall x \in \left]0;\dfrac{1}{2}\right]\right); G(x) > 0$.

0,5 **4)-** *On considère la fonction H définie sur $[0;1]$ par :*

$$H(0) = 0 \text{ et } \left(\forall x \in \left]0;1\right]\right); H(x) = F(-\ln x).$$

0,75 **a)-** *Montrer que H satisfait les conditions du théorème de Rolle sur $[0;1]$.*

0,5 **b)-** *En déduire que :* $\left(\exists! a \in \mathbb{R}^{*+}\right); F'(a) = 0$ *et que* $a > \dfrac{1}{2}$.

0,75 **5)-** *Prouver que :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right); F(x) \leq \dfrac{1}{2} a e^{-2a^2}$.

Fin Du Sujet .

Durée : 04 heures

Exercice 01:(03pts)

1)- Soit $p \geq 2$ un entier naturel premier.

On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tels que : $9a^2 + 15a + 7 \equiv 0[p]$.

0,5 a)- Montrer que : $p \geq 5$.

0,5 b)- Prouver que : $(3a+2)^2 \equiv 1[p]$.

0,25 c)- En déduire que : $(3a+2) \wedge p = 1$.

0,5 d)- En utilisant le théorème de Fermat, prouver que : $p \equiv 1[3]$.

0,25 2)- a)- Montrer que l'entier **149** est premier.

0,25 b)- Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $(E): 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0[149]$.

0,75 3)- Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $(E): 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0[19]$.

Exercice 02:(3,5pts)

➡ Sur $\mathbb{R}^{+*}$ on définit la loi de composition interne $*$ par :

$$\text{Pour tout } (a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2 : a * b = e^{(1+\ln a)(1+\ln b)-1}.$$

0,5 1)- Montrer que $*$ est commutative et associative.

0,25 2)- a)- Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0,5 b)- Déterminer l'ensemble des éléments ayant un symétrique pour $*$.

0,25 3)- a)- Montrer que $I = \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$ est partie stable dans $(\mathbb{R}^{+*}, *)$.

0,75 b)- Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \to I \\ x \mapsto e^{(x-1)} \end{cases}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$

Vers $(I, *)$, puis en déduire la structure de $(I, *)$.

4)- Pour tout $x \in I$, On pose : $g_n(x) = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ fois}}$ Où $n \in \mathbb{N}^*$.

0,5 a)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); g_n(x) = e^{(1+\ln x)^n - 1}$.

0,25 b)- Justifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! u_n \in I); g_n(u_n) = e^n$.

0,5 c)- Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$, puis calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\ln n}(u_n - 1)$.

Durée : 04 heures

Exercice 03:(3,5pts)

➡ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, On considère Les points $A(1)$ et $B(-1)$. A tout point $M(z)$ distinct de B on associe le point $M'(z')$ tels que : $z' = \frac{z-1}{z+1}$.

0,5 1)- Montrer que : $|z| = 1 \Rightarrow z' \in i\mathbb{R}$.

2)- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$, Où $\theta \in]0; \pi[$.

0,5 a)- Déterminer les racines carrés du nombre complexe $a = e^{2i\theta} - 1$ sous forme Exponentielle.

0,5 b)- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

3)- On considère les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ d'affixes respectifs :

$$z_1 = e^{i\theta} + \sqrt{2\sin\theta}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \text{ et } z_2 = e^{i\theta} - \sqrt{2\sin\theta}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

0,5 a)- Vérifier que $\operatorname{Im}(z_1) \neq 0$.

0,5 b)- En déduire que les points A, B et M_1 ne sont pas alignés.

0,5 c)- Vérifier que : $\frac{z_1'}{z_2'} = -1$, puis en déduire que A, B, M_1 et M_2 sont cocycliques.

0,5 4)- Montrer que : $e^{i\theta} - i = -2i\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$, puis en déduire que le point M_1 Appartient à un cercle (Γ) dont on déterminera le rayon et l'affixe du centre.

Exercice 04:(07pts)

3,25pts

I - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = e^{-x}.\ln(1+e^x).$$

0,75 1)- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les résultats Obtenus.

0,25 2)- a)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = e^{-x}\left(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)\right)$.

0,75 b)- Soit $u \in \mathbb{R}^{+*}$, en utilisant le théorème des accroissements finis montrer que : $\frac{u}{1+u} < \ln(1+u) < u$. Puis en déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

Durée : 04 heures

0,25 — **3)- a)-** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]0;1[$.

0,5 — **b)-** Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4)- Soit $S(\lambda)$ la surface plane délimité par (C_f), (Ox) et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\lambda$, Où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

0,5 — ✔ Montrer que : $S(\lambda)=\ln 4-\left(e^{-\lambda}\ln\left(1+e^{\lambda}\right)+\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)\right)$.

0,25 — **5)-** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Où $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^{-k}}.\ln\left(1+\sqrt[n]{e^{k}}\right)$ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

3,75pts

II - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, On pose : $I_n=\int_0^1 e^{-nt}.\ln\left(1+e^{t}\right)dt$.

0,5 — **1)- a)-** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis en déduire qu'elle converge.

0,5 — **b)-** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ I_n\le\ln(1+e).\int_0^1 e^{-nt}dt$. Puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

0,75 — **2)-** En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N});\ n.I_n=\ln 2-e^{-n}.\ln(1+e)+\int_0^1\frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}}dt .$$

Puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n.I_n$.

3)- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, On pose : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k.I_k$; $a_n=S_{2n}$ et $b_n=S_{2n+1}$.

0,5 — **a)-** Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes .

0,25 — **b)-** Montrer que : $(\forall t\in\mathbb{R});\ \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kt}=\frac{1}{1+e^{-t}}+(-1)^n.\frac{e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}$.

0,5 — **c)-** Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ S_n=\int_0^1\frac{\ln\left(1+e^{t}\right)}{1+e^{-t}}dt+(-1)^n.\int_0^1 e^{-(n+1)t}\frac{\ln\left(1+e^{t}\right)}{1+e^{-t}}dt$.

0,5 — **4)- a)-** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ a_n\le\int_0^1\frac{\ln\left(1+e^{t}\right)}{1+e^{-t}}dt\le b_n$.

0,25 — **b)-** Calculer la valeur de la limite commune de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

○ Exercice 05:(03pts)

➡ Soit F la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $F(x)=\int_x^{x+1}\frac{e^{2-t}}{t-1}dt$.

0,5 — **1)-** Montrer que : $(\forall t\in]1;+\infty[);\ 0\le(t-1)e^{2-t}\le 1$.

0,75 — **2)-** Déduire que : $(\forall x\in]1;+\infty[);\ 0\le F(x)\le\frac{1}{x(x-1)}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Durée : 04 heures

0,5 — **3)- a)-** Montrer que : $(\forall x\in]1;+\infty[);\ F(x)\ge e^{1-x}.\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

0,25 — **b)-** En déduire : $\lim\limits_{x\to1^+} F(x)$.

0,75 — **4)- a)-** Montrer que F est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]1;+\infty[);\ F'(x)=\frac{e^{1-x}}{x(1-x)}.\left[(e-1)x+1\right] .$$

0,25 — **b)-** Dresser le tableau de variation de F en justifiant la réponse .

Fin Du Sujet.

✔ **Note :**

La durée de l'épreuve est de **4 heures**, le sujet se compose de quatre exercices : traiter au choix l'exercice d'arithmétique ou bien celui des structures algébriques .

Exercice 01:(03pts)

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = 2\times 7^n + 3\times 5^n - 5$.

0,25 **1)- a)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), a_{n+1} \equiv a_n [24]$.

0,25 **b)-** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), a_n \equiv 0[24]$.

2)- Soit $p > 7$ un entier naturel <u>premier</u> .

0,5 **a)-** Prouver que : $a_{p-1} \equiv 0[p]$.

0,5 **b)-** En déduire que l'entier a_{p-1} est divisible par $24p$.

3)- On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) : a_3 x - a_2 y = 5a_1$.

0,5 **a)-** Vérifier que (E) est équivalente à l'équation : $(F) : 44x - 7y = 5$.

0,5 **b)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) (en précisant les différentes étapes).

4)- Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on pose : $x_q = 7q + 6$ et $y_q = 44q + 37$.

0,5 ✔ Montrer que le couple (x_q, y_q) est de l'équation (E) , puis en déduire toutes Les valeurs de l'entier naturel q pour lesquels $x_q \wedge y_q = 1$.

Exercice 02:(3,5pts)

I- On considère l'intervalle $I = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$.

Pour tout $(x, y) \in I^2$, On pose : $x * y = x + y - 3xy$.

0,25 **1)- a)-** Vérifier que : $(\forall (x, y) \in I^2); 1 - 3(x * y) = (1 - 3x)(1 - 3y)$.

0,25 **b)-** En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur I .

1 **2)-** Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif .

II- On considère l'intervalle $J = \left]0;+\infty\right[$.

Pour tout $(x,y) \in J^2$, On pose : $xTy = \ln\left(e^{x+y} - e^x - e^y + 2\right)$.

0,25 **1)-** Vérifier que T est une loi de composition interne sur J .

0,5 **2)- a)-** Montrer que l'application $f : x \mapsto \ln(2-3x)$ est un isomorphisme de $(I,*)$ Vers (J,T) .

b)- En déduire la structure de (J,T) (On précisera l'élément neutre de (J,T)
0,5 Et le symétrique de tout $x \in J$).

0,75 **3)-** On pose : $H = \left\{\ln\left(1+2^{-n}\right) / n \in \mathbb{Z}\right\}$.

✔ Montrer que H est un sous-groupe de (J,T).

Exercice 03:(3,5pts)

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E) : z^2 - 2mz + m^2 + 4 = 0 \text{, Où } m \in \mathbb{C}^* .$$

0,5 **1)-** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2)- On suppose que : $m = 2.e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

0,5 ✔ Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique .

3)- Dans le plan complexe , on considère les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ tels que :

$$z_1 = m + 2i \text{ et } z_2 = m - 2i .$$

a)- Déterminer chacun des ensembles suivants :

0,75 $(E_1) = \left\{M(m) \in (\mathrm{P}) / OM_1 = OM_2\right\}$ et $(E_2) = \left\{M(m) \in (\mathrm{P}) / \overline{OM_1} \perp \overline{OM_2}\right\}$

0,5 **b)-** En déduire m pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle et isocèle en O .

II- On considère la symétrie centrale S de centre $I(1)$ et la rotation R de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Et pour tout point $M(z)$ distinct de O on pose : $M'(z') = S(M)$ et $M''(z'') = R(M)$.

0,5 **a)-** Montrer que : $z' = -z + 2$ et $z'' = iz + 2$.

b)- Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que les points $A(2)$, Ω
0,75 M' et M'' soient cocycliques .

Exercice 04 : (10pts)

I- *Soit* $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

0,5 **1)- a)-** *Montrer que :* $\dfrac{x}{3(x+1)} \leq \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t}\,dt \leq \dfrac{x}{3}$.

0,5 **b)-** *Montrer que :* $\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t}\,dt = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \dfrac{1}{2}$.

0,25 **2)-** *En déduire la valeur de la limite suivante :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

II- *On considère la fonction* f *définie sur* $]0,+\infty[$ *par :*

$$f(1)=1 \text{ et } \left(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right);\ f(x)=\frac{\ln x}{x-1}.$$

0,75 **1)-** *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *, puis donner leurs interprétation .*

0,5 **2)- a)-** *Montrer que* f *est continue sur* $]0,+\infty[$.

0,5 **b)-** *Etudier la dérivabilité de* f *en* $x_0 = 1$. *(Utiliser I-**2)-**)*

0,5 **3)- a)-** *Montrer que* f *est dérivable sur chacun des intervalles* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$

Et que : $\left(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right),\ f'(x) = \dfrac{(x-1)-x\ln x}{x(x-1)^2}$.

0,5 **b)-** *Montrer que :* $\left(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\right),\ (x-1)-x\ln x < 0$ *, puis dresser*
Le tableau de variation complet de f .

0,5 **4)-** *Tracer la tangente au point* $A(1,f(1))$ *et* (C_f) *dans un repère orthonormé .*

0,25 **5)- a)-** *Montrer que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\left(\exists! a_n \in \mathbb{R}^{+*}\right),\ f(a_n) = 1+\dfrac{1}{n}$.

0,25 **b)-** *Vérifier que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), 0 < a_n < 1$.

0,25 **6)- a)-** *justifier que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante .*

0,5 **b)-** *En déduire qu'elle est convergente et montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

0,5 **c)-** *Prouver que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_n - 1) = -2$ *, puis en déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n = \dfrac{1}{e^2}$.

III- *On considère la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$F(0)=0 \text{ et } (\forall x \in]0,+\infty[), F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt .$$

0,5 **1)- a)-** *Montrer que :* $(\forall x \in]0,1[), \dfrac{2x\ln x}{x+1} \le F(x) \le x\ln x$.

0,75 **b)-** *En déduire que* F *est continue à droite en* 0, *puis calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)}{x}$ *et Donner son interprétation géométrique .*

0,5 **2)- a)-** *Montrer que :* $(\forall x \in]1,+\infty[), \ln x.\ln(x+1) \le F(x) \le 2\ln x.\ln(x+1)$.

0,75 **b)-** *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ *, puis interpréter géométriquement Ces deux limites .*

0,75 **3)- a)-** *Montrer que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que :*

$$F'(1)=1 \text{ et } (\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[), F'(x)=\frac{(3x-1).\ln x}{x^2-1}.$$

b)- *Dresser le tableau de variation de* F *en justifiant votre réponse .*

0,25

0,5 **4)-** *Donner l'allure de* (C_F) *dans un repère orthonormé (On donne* $F\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{-1}{2}$ *).*

Fin Du Sujet .

Durée : 4 heures

Exercice 01 : (03 points)

➡ Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - \left(1 + im + \overline{m}\right)z + \overline{m} + i|m|^2 = 0 \text{ , où } m \in \mathbb{C}^* - \{i\} .$$

0,25 1)- a)- Vérifier que $u = \overline{m}$ est solution de l'équation (E) .

0,25 b)- En déduire que l'autre solution de l'équation (E) est : $v = 1 + im$.

2)- On suppose dans cette question que : $m = e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

0,5 ✔ Ecrire le nombre complexe $\frac{v}{u}$ sous forme trigonométrique .

3)- Dans le plan complexe on considère les points : $A(u)$ et $B(v)$.

0,25 ✔ Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tel que : $\overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

4)- On suppose que : $m = a + \frac{1}{2}i$ où $a \in \mathbb{R}$. et on considère la transformation R

Qui lie tout point $M(z)$ avec le point $M'(z')$ tel que : $z' = -iz + 1 + 2ia$.

0,75 a)- Montrer que R est une rotation en précisant l'affixe de son centre Ω et donner Une mesure de son angle .

0,5 b)- Montrer que : $R(A) = B$, puis en déduire que : $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = -i$.

0,5 c)- Montrer que les points O , A , B et Ω sont cocycliques .

Exercice 02 : (04 points)

➡ On rappel que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel .

I- On pose : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

0,25 1)- Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel .

2)- On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

0,5 ✔ Montrer que (I, J) est une base de $(E, +, \cdot)$, puis en déduire $\dim(E)$.

Durée : 4 heures

0,5 3)- Vérifier que : $J^2 = 2.J$, puis montrer que E est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,75 4)- Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire non intègre .

0,5 5)- Montrer que la matrice $M(a,b)$ est inversible dans $(E, +, \times)$ si et seulement si : $a \neq 0$ et $a \neq -2b$.

II- On considère l'ensemble :

$$F = \left\{ A(x) = I + \frac{3^x - 1}{2} J \;/\; x \in \mathbb{Z} \right\} .$$

0,25 1)- Montrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2)- Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on pose : $f(x) = A(x)$.

0,5 a)- Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(F, \times)$.

0,75 b)- En déduire la structure de $(F, \times)$ et préciser son élément neutre et l'inverse de la matrice $A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 03 : (03 points)

0,5 1)- a)- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $(E) : 4x - 5y = 1$.

0,5 b)- En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$, du système : $(S) : \begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 2[4] \end{cases}$.

2)- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose : $a = 4n + 3$ et $b = 3n + 1$.

0,5 a)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), a \wedge b = (n+2) \wedge 5$, puis en déduire les valeurs de l'entier naturel n tel que : $(\forall n \in \mathbb{N}), a \wedge b = 5$.

0,5 b)- Montrer que : $2^n + 3^n \equiv 0[5] \Leftrightarrow 2^{2n} \equiv 4[5]$.

0,5 c)- Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $(S') : \begin{cases} n \geq 2018 \\ 2^n + 3^n \equiv 0[5] \\ a \wedge b = 5 \end{cases}$.

3)- Soit $p \geq 5$ un nombre premier .

0,5 ✔ Montrer que : $2^p + 3^p \equiv 0[p] \Leftrightarrow p = 5$.

Durée : 4 heures

○ Exercice 04 : (03 points)

I- On considère la fonction F définie sur $]0,1]$ par :

$$(\forall x \in]0,1]),\ F(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt .$$

0,5 — 1)- Montrer que : $(\forall x \in]0,1]),\ F(x) \geq \frac{-\ln x}{e}$, puis en déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$.

0,5 — 2)- Montrer que F est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1]$.

0,5 — 3)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists ! u_n \in]0,1]),\ F(u_n) = n$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

II- Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$g(0) = -1 \text{ et } (\forall t \in]0,1]),\ g(t) = \frac{e^{-t} - 1}{t} .$$

0,5 — 1)- Montrer que g est continue sur l'intervalle $[0,1]$.

2)- Pour tout $x \in [0,1]$, on pose : $G(x) = \int_x^1 g(t)\,dt$.

0,25 — a)- Montrer que G est continue sur $[0,1]$.

0,75 — b)- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ G(u_n) = n + \ln(u_n)$, puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n . u_n$.

○ Exercice 05 : (07 points)

I- On considère la fonction f définie par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{e^x}{e^x - \ln x},\ x > 0 .$$

0,75 — 1)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}),\ x - 1 \geq \ln x$, puis en déduire que : $D_f = \mathbb{R}^+$.

0,5 — 2)- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

0,25 — 3)- a)- Montrer que est f continue à droite en 0 .

0,5 — b)- la fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter le résultat .

Durée : 4 heures

0,75 — 4)- a)- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[),\ f'(x) = \frac{g(x).e^x}{(e^x - \ln x)^2} \text{ , ou } g(x) = \frac{1}{x} - \ln x .$$

0,75 — b)- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $\alpha \in]1,2[$.

0,5 — c)- En déduire le signe de g sur $]0,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f .

0,5 — 5)- Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé (on donne $\alpha = 1,5$) .

II- On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$F(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0,+\infty[),\ F(x) = \frac{1}{x}.\int_x^{2.x} f(t)\,dt .$$

0,5 — 1)- a)- Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0, \frac{\alpha}{2}\right]\right),\ f(x) \leq F(x) \leq f(2.x)$.

0,75 — b)- En déduire que F est continue à droite en 0 , puis étudier la dérivabilité de F à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat .

0,25 — 2)- a)- Montrer que : $(\forall x \in [\alpha,+\infty[),\ f(2.x) \leq F(x) \leq f(x)$.

0,5 — b)- En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

0,5 — 3)- Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[),\ F'(x) = \frac{2.f(2.x) - F(x) - f(x)}{x} .$$

Fin Du Sujet .

Durée : 04 heures

Exercice 01:(03pts)

➩ *Pour tout* $x, y \in]0;1[$, *On pose :* $x * y = \dfrac{2xy}{(1-x)(1-y)+2xy}$.

0,5 **1)-** *Montrer que* $*$ *est une loi de composition interne sur* $]0;1[$.

2)- *Pour tout* $x \in]0;1[$, *On pose :* $f(x) = \dfrac{e^x}{2+e^x}$.

0,75 **a)-** *Montrer que* f *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *vers* $(]0;1[,*)$.

0,75 **b)-** *En déduire la structure de* $(]0;1[,*)$. *(On déterminera l'élément neutre de La loi* $*$ *et le symétrique de tout* $x \in]0;1[$ *)*

3)- *On considère l'ensemble* $H = \left\{ \dfrac{3^n}{2+3^n} \,/\, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

0,5 ✔ *Montrer que* $(H,*)$ *est un sous groupe de* $(]0;1[,*)$.

4)- *Pour tout* $x \in]0;1[$, *On pose :* $x^{(n)} = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ fois}}$ *Où* $n \in \mathbb{N}^*$.

0,5 ✔ *Exprimer* $x^{(n)}$ *en fonction de* x *et* n *, puis déterminer son symétrique dans* $(]0;1[,*)$.

Exercice 02:(3,5pts)

➩ *On considère dans* $\mathbb{N}$ *, l'équation:* $(E) : 10^x \equiv 2[19]$.

0,5 **1)- a)-** *Montrer que :* $10^{18} \equiv 1[19]$.

0,5 **b)-** *En déduire que :* $10^{17} \equiv 2[19]$ *(On pourra utiliser le théorème de Gauss).*

2)- *Soit* $x \in \mathbb{N}$ *une solution de l'équation* (E) . *On pose :* $d = 18 \wedge (x+1)$.

0,25 **a)-** *Vérifier que :* $10^{x+1} \equiv 1[19]$.

0,5 **b)-** *Montrer que :* $10^d \equiv 1[19]$.

0,75 **c)-** *Justifier que :* $d = 18$ *, puis en déduire que :* $x \equiv 17[18]$.

3)- *Soit* $x \in \mathbb{N}$ *tels que :* $x \equiv 17[18]$.

0,5 ✔ *Montrer que :* $10^x \equiv 2[19]$ *(On pourra utiliser* **1)- b)-** *).*

0,5 **4)-** *Donner l'ensemble des solutions de l'équation* (E) *en justifiant la réponse .*

Réalisé par Mr : Abdellah Belkhatir

Exercice 03:(3,5pts)

➩ On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E): \frac{1}{m}z^2 + (1-3i)z - 4m = 0 \quad \text{Où } m \in \mathbb{C}^*.$$

0,25 **1)- a)-** Déterminer les racines carrés du nombre complexe $a = 8-6i$.

0,5 **b)-** Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) tels que : $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$.

0,5 **c)-** On pose : $\theta \equiv \arg(m)[2\pi]$. Calculer $\arg(z_1)$ et $\arg(z_2)$ en fonction de θ.

2)- Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère Les points M_1, M_2, M et D d'affixes respectifs : z_1, z_2, m et $z_D = 1+3i$.

0,25 **a)-** Montrer que OM_1M_2 est un triangle rectangle en O.

0,5 **b)-** Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que O, D et M soient alignés.

0,5 **c)-** Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que ODM soit un triangle Rectangle en O.

3)- Le point N_1 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Et le point N_2 est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

0,5 **a)-** Montrer que les points M_1, N_1, M_2 et M_2 sont cocycliques.

0,5 **b)-** Déterminer en fonction de m le rayon et l'affixe du centre du cercle circonscrit Aux quadrilatère formé par ces quatre points.

Problème:(10pts)

5,25pts

I -Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}^{+*}), f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}.$$

0,5 **1)- a)-** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

0,5 **b)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); e^{-x}(x+1) - 1 < 0$, puis en déduire la monotonie De f sur $\mathbb{R}^+$.

Durée : 04 heures

2)- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); F_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!}.\int_0^x t^n e^t dt .$$

0,5 a)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F_1(x) = x - 1 + e^{-x}$.

0,75 b)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$.

0,5 c)- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x} \text{ et } F_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x} .$$

0,5 3)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); -\frac{x}{2} \leq f(x) - 1 \leq -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$.

2,75pts II - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose : $u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$.

0,5 1)- a)- Calculer l'intégrale u_0.

0,5 b)- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis en déduire qu'elle converge.

0,5 c)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n + u_{n+1} = f(n)$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2)- Pour tout $n \geq 2$, On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k . f(k)$.

0,75 a)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^x}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{1}{1+e^x}$.

0,5 b)- En déduire que : $(\forall n \geq 2); S_n = (-1)^{n-1}.u_n + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$. Puis en déduire

Que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est convergente en précisant sa limite .

04pts III - On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(0) = 1 \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); F(x) = \frac{1}{x}.\int_0^x f(t)dt .$$

0,5 1)- a)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); 1 - \frac{x}{4} \leq F(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$.

0,75 b)- En déduire que F est continue et dérivable à droite en $x_0 = 0$. Puis donner

L'équation de la demi tangente à droite en $x_0 = 0$.

Durée : 04 heures

0,5	**2)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right);0\le F(x)\le\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}.\int_1^x f(t)\,dt$.
0,5	**b)-** En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .
0,75	**3)- a)-** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);F'(x)=\frac{f(x)-F(x)}{x}.$$
0,5	**b)-** Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}^{*}$ et dresser son tableau de variation .
0,5	**4)-** Construire la courbe (C_F) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Fin Du Sujet.

Durée : 4 heures

Exercice 01:(2,75pts)

➩ *Soient* p *et* q *deux entiers naturels non nuls* ***premiers*** *tels que :*

$$p \leq q \ \text{ et } \ 10^{p+q-1} \equiv 1[pq] \ .$$

0,5 — **1)- a)-** *Montrer que :* $p \wedge 10 = 1$.

0,5 — **b)-** *En déduire que :* $10^{p-1} \equiv 1[p]$ *et* $10^{q} \equiv 1[p]$.

0,25 — **2)- a)-** *Montrer que :* $(p-1) \wedge q = 1$.

0,75 — **b)-** *Prouver que :* $p = 3$ *, puis en déduire que* $10^{q+2} \equiv 1[q]$.

0,75 — **3)-** *Décomposer* $10^3 - 1$ *en facteurs premiers , puis prouver que :* $q \in \{3, 37\}$.

Exercice 01:(3,25pts)

I- *On considère l'intervalle* $I = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$.

Et pour tout $(x, y) \in I^2$ *, on pose :* $x * y = x + y - 3xy$.

0,25 — **1)- a)-** *Vérifier que :* $\left(\forall (x, y) \in I^2\right), 1 - 3(x * y) = (1-3x).(1-3y)$.

0,25 — **b)-** *En déduire que* $*$ *est une loi de composition interne sur* I .

1 — **2)-** *Démontrer que* $(I, *)$ *est un groupe commutatif* .

II- *On considère l'intervalle* $J =]0, +\infty[$.

Et pour tout $(x, y) \in J^2$ *, on pose :* $xTy = \ln\left(\left(e^x - 1\right).\left(e^y - 1\right) + 1\right)$.

0,25 — **1)-** *Vérifier que* T *est une loi de composition interne sur* J .

2)- *Pour tout* $x \in I$ *, on pose :* $f(x) = \ln(2 - 3x)$.

0,5 — **a)-** *Montrer que* f *est un isomorphisme de* $(I, *)$ *vers* (J, T).

0,5 — **b)-** *En déduire la structure de* (J, T) *(en précisant son élément neutre et Le symétrique de tout* $x \in J$ *).*

3)- *On pose :* $H = \left\{\ln\left(1 + 2^{-n}\right) / n \in \mathbb{Z}\right\}$.

0,5 — ✔ *Montrer que* H *est un sous-groupe de* (J, T) .

Durée : 4 heures

Exercice 03:(04pts)

✔ Les parties I et II sont indépendantes .

I- Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation :

$$(E): z^2 - \left[1+m(1+i)\right]z + im^2 + m = 0 \text{ , où } m \in \mathbb{C}^* - \{i\} .$$

0,5 **1)- a)-** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left(1+(i-1)m\right)^2$.

0,25 **b)-** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

0,75 **2)- a)-** Déterminer la nature des ensembles suivant :

$$(D) = \left\{M(m) \in (P) / |1+im| = |m|\right\}$$

$$\text{Et } (\Gamma) = \left\{M(m) \in (P) / \arg(1+im) \equiv \arg(m)[\pi]\right\} .$$

0,5 **b)-** Ecrire sous forme trigonométrique l'affixe de chacun des points d'intersection de (D) et (Γ).

II- Dans le plan complexe (P), on considère les points $A(1)$ et $B(1+i)$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$, on pose : $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$.

0,25 **1)-** Montrer que : $\overline{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2)- Soient E et F les milieux respectifs des segments $[AA']$ et $[BB']$.

0,5 **a)-** Montrer que : $\frac{z_E}{z_E - z_F} = i$, puis en déduire que $(OE) \perp (EF)$.

0,5 **b)-** Montrer que la droite (AA') coupe le segment $[BB']$ en F .

3)- Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par :

$$M_0(i) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), M_{n+1} = R(M_n) .$$

0,25 **a)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), aff(M_n) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$.

0,25 **b)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $(F): 12x - 5y = 3$.

0,25 **c)-** En déduire l'ensemble des entiers naturels n tel que : $M_n \in [Ox)$.

Exercice 04:(5,5pts)

➯ Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}\ ,\ \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

On désigne par (C_n) le graphe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,75 **1)-** Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$, puis en déduire la nature De la branche infini de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

0,75 **2)- a)-** Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) - x = 0$ puis en déduire que la courbe (C_n) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) que l'on déterminera.

0,25 **b)-** Etudier la position relative de (C_n) avec son asymptote oblique (Δ).

0,75 **3)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f_n'(x) = \frac{n - e^{-x}}{n}$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f_n en justifiant votre réponse.

0,75 **4)-** Construire la courbe (C_3) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On donne : $\ln 3 = 1,1$, $f_3(-1,5) = 0$ et $f_3(-0,6) = 0$).

0,75 **5)- a)-** Montrer que si $n \geq 3$, alors l'équation : $(E) : f_n(x) = 0$ admet exactement Deux solutions a_n et b_n tels que : $a_n \leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n} \leq b_n < 0$.

0,5 **b)-** Calculer en justifiant votre réponse $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

0,25 **c)-** Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} -n.b_n = 1$.

6)- Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$g(0) = -1 \text{ et } (\forall x \in]0,+\infty[),\ g(x) = -1 - x\ln x\ .$$

0,25 **a)-** Montrer que g est continue à droite en 0.

0,5 **b)-** Montrer que : $(\forall n \geq 3),\ g\left(\frac{-1}{a_n}\right) = \frac{\ln n}{a_n}$, puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{a_n}$.

Exercice 05:(4,5pts)

⇨ Soit F la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$$\left(\forall x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right),F(x)=\int_x^{2x}\frac{\ln(t)}{2t-1}dt\ .$$

0,75 — **1)-** Montrer que F est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et que : .

$$\left(\forall x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right),F'(x)=\frac{(4x-2)\ln 2-\ln x}{(2x-1).(4x-1)}\ .$$

0,25 — **2)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right),(4x-2).\ln 2-\ln x>0$.

0,25 — **b)-** En déduire la monotonie de F sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

0,5 — **3)- a)-** Soit $x\in\left]1,+\infty\right[$, montrer en utilisant le théorème des accroissement fini que

$$\left(\exists c\in\left]x,2x\right[\right),F(x)=\frac{x.\ln c}{2.c-1}.$$

0,5 — **b)-** En déduire que : $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right),\frac{x\ln x}{4x-1}<F(x)<\frac{x\ln(2x)}{2x-1}$.

0,75 — **c)-** Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement ces Deux résultats .

0,25 — **4)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right),\ln x\le x-1$.

0,75 — **b)-** Montrer que : $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{2},1\right[\right),\int_1^x\frac{\ln(t)}{2t-1}dt\ge\int_1^x\frac{t-1}{2t-1}dt$, puis en déduire

La limite suivante $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\int_1^x\frac{\ln(t)}{2t-1}dt$.

0,5 — **c)-** Montrer que : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}F(x)=-\infty$.

Fin Du Sujet .

Durée : 03 heures

0,5	**4)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right), F(x)=e^x-\frac{1}{2}e^{2x}+x.\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.
1	**b)-** Montrer que F est dérivable sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ Et que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right), F'(x)=\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.
1,5	**5)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x>0\right), e^x.\ln 2\le\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\le e^{2x}.\ln 2$ et $\left(\forall x<0\right), e^{2x}.\ln 2\le\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\le e^{x}.\ln 2$.
0,5	**b)-** En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.
1	**c)-** Vérifier que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right), F(x)-F(0)=\frac{-1}{2}\left(e^x-1\right)^2+x.\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$, puis En déduire que F est dérivable en 0 en précisant $F'(0)$.
0,5	**6)- a)-** Dresser le tableau de variation complet de F .
1,5	**b)-** Construire la courbe $\left(C_F\right)$ (et la tangente (T) au point d'abscisse 0) dans un Repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Fin Du Sujet.

Durée : 03 heures

5)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose : $v_n = \ln(u_n)$.

0,5 a)- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), n.v_n = \ln\left(\frac{n}{v_n}\right)$.

1 b)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), \frac{\ln(n)}{n} < v_n < 2.\frac{\ln(n)}{n}$, puis déterminer La limite de $(v_n)_{n\geq 2}$ et déduire celle de $(u_n)_{n\geq 2}$.

- **Exercice 03:(3,5pts)**

⇨ on pose : $I_0 = \int_1^e x.dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_1^e x.(\ln x)^n dx$

0,75 1)- Calculer I_0 et I_1.

0,75 2)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$, puis calculer I_2.

0,5 3)- a)- Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

1,5 b)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$, puis en déduire les deux limites Suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

- **Exercice 04: (10 pts)**

⇨ Soit F la fonction définie par :

$$F(0) = \frac{1}{2} \text{ et } F(x) = x.\int_x^{2x} \frac{e^t}{t^2}dt \ , x \neq 0 .$$

0,75 1)- Justifier soigneusement que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2)- a)- Montrer que :

1
$$(\forall x > 0), \frac{1}{2}e^x \leq F(x) \leq \frac{1}{2}e^{2x} \text{ et } (\forall x < 0), \frac{1}{2}e^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}e^x .$$

0,5 b)- En déduire que F est continue en $x_0 = 0$.

0,75 3)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

1 b)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$, puis en déduire la nature de la branche Infini de la courbe (C_F) au voisinage de $+\infty$.

5)- a)- Montrer que :

1,5 $(\forall x>0),\ e^{x}.\ln 2 \le \int_{x}^{2x}\frac{e^{t}}{t}dt \le e^{2x}.\ln 2$ et $(\forall x<0),\ e^{2x}.\ln 2 \le \int_{x}^{2x}\frac{e^{t}}{t}dt \le e^{x}.\ln 2$.

0,5 b)- En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\int_{x}^{2x}\frac{e^{t}}{t}dt$.

1 c)- Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*}),\ F(x)-F(0)=\frac{-1}{2}\left(e^{x}-1\right)^{2}+x.\int_{x}^{2x}\frac{e^{t}}{t}dt$, puis

En déduire que F est dérivable en 0 en précisant $F'(0)$.

0,5 6)- a)- Dresser le tableau de variation complet de F .

1,5 b)- Construire la courbe (C_F) (et la tangente (T) au point d'abscisse 0) dans un Repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Fin Du Sujet.

Durée : 03 heures

Exercice 01:(3,5pts)

⇨ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), f(x) = \ln x - 2\operatorname{Arctan} x .$$

0,5 1)- Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

0,5 2)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x^2+1)}$, puis dresser le tableau de Variation de f.

0,5 3)- a)- Prouver que : $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! a_n \in \mathbb{R}^{*+}), f(a_n) = 2n$.

0,5 b)- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}), e^{2n} \leq a_n$, puis en déduire $\lim_{n \to +\infty} a_n$.

0,75 4)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \ln\left(\dfrac{a_n}{e^{2n}}\right) = 2\operatorname{Arctan}(a_n)$, puis en déduire $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{e^{2n}}$.

0,75 5)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 2\left(\operatorname{Arctan}(a_n) - \operatorname{Arctan}(a_{n+1}) - 1\right)$, puis En déduire $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Exercice 02:(03pts)

⇨ Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), f_n(x) = \frac{\ln x}{n} - \frac{1}{x^n}, \text{ où } n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

0,75 1)- Dresser le tableau de variation complet de f_n.

0,25 2)- En déduire que l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n dans $\mathbb{R}^{*+}$.

0,5 3)- a)- Prouver que : $(\forall n \geq 2), u_n > \sqrt[n]{e}$.

0,5 b)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x \geq x + 1$, puis en déduire : $(\forall n \geq 2), u_n < e$.

4)- a)- Montrer que : $f_{n+1}(u_n) = \dfrac{\ln(u_n)}{(n+1)u_n} \cdot \left(u_n - 1 - \dfrac{1}{n}\right)$, puis en déduire que $f_{n+1}(u_n) > 0$.

0,5 b)- Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \geq 2}$, puis déduire qu'elle est convergente.

Lycée Qualifiant Oulada Délégation Casa-Anfa	Devoir Blanc Calcul Intégral	2ème Bac Sc Maths Biof Prof : Abdellah Belkhatir

- **Exercice 01 :(3,5pts)**

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_1^e x.(\ln x)^n \, dx$.

0,75 — **1)-** Calculer I_0 et I_1 .

0,75 — **2)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$.

0,5 — **3)- a)-** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante .

1,5 — **b)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$, puis en déduire les deux limites Suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

- **Exercice 02 :(6,5pts)**

⇨ On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), F(x) = \int_x^{2x} \ln\left(1+e^{-2t}\right) dt \ .$$

0,5 — **1)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), F(-x) = -3x^2 - F(x)$.

0,5 — **2)- a)-** Montrer que : $(\forall x > 0), x.\ln\left(1+e^{-4x}\right) \leq F(x) \leq x.\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

0,5 — **b)-** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

1 — **c)-** En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$, puis préciser la nature de la branche infini de (C_F) au Voisinage de $-\infty$.

3)- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \int_0^x \ln\left(1+e^{-2t}\right) dt$.

0,25 — **a)-** Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}), F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

0,75 — **b)-** En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

0,75 — **c)-** Montrer que l'équation : $x^3 + 2x - 1 = 0$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{1}{4} < x_0 < \dfrac{1}{2}$.

0,75 — **d)-** Etudier les variation de F , puis dresser son tableau de variation en justifiant Soigneusement votre réponse .

4)- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^1 ln\left(1+e^{-2nt}\right)dt$.

0,5 a)- Etudier la monotonie de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

0,5 b)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha \in]0,1]), 0 \leq \int_\alpha^1 ln\left(1+e^{-2nt}\right)dt \leq ln\left(1+e^{-2n\alpha}\right)$.

0,5 c)- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\alpha^1 ln\left(1+e^{-2nt}\right)dt$ où $\alpha \in]0,1]$.

0,5 d)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha \in]0,1]), 0 \leq u_n \leq \alpha + ln\left(1+e^{-2n\alpha}\right)$.

0,5 e)- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, en justifiant votre réponse .

- **Exercice 03: (10 pts)**

⇨ Soit F la fonction définie par :

$$F(0)=\frac{1}{2} \text{ et } F(x)=x.\int_x^{2x}\frac{e^t}{t^2}dt \ ,x\neq 0 .$$

0,75 1)- Justifier soigneusement que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2)- a)- Montrer que :

$$(\forall x>0),\frac{1}{2}e^x \leq F(x) \leq \frac{1}{2}e^{2x} \text{ et } (\forall x<0),\frac{1}{2}e^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}e^x .$$

1

0,5 b)- En déduire que F est continue en $x_0=0$.

0,75 3)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

1 b)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$, puis en déduire la nature de la branche Infini de la courbe (C_F) au voisinage de $+\infty$.

0,5 4)- a)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), F(x)=e^x-\frac{1}{2}e^{2x}+x.\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.

1 b)- Montrer que F est dérivable sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$

Et que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), F'(x)=\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.

Durée : 04 heures

Exercice 04 : (2,5 pts)

⇨ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), f_n(x) = x + n(1 + \ln x).$$

0,5 1)- Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ vers $\mathbb{R}$.

0,5 2)- En déduire que l'équation $(E) : f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}^{*+}$ tels que : $\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$.

0,5 3)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), f_{n+1}(x) < f_n(x)$, puis en déduire la monotonie de La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

0,5 4)- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente puis calculer sa limite.

0,5 5)- Prouver que : $\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{e} - \alpha_n\right) = \frac{1}{e^2}$.

Exercice 05 : (7,5 pts)

⇨ Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f_n(x) = e^{-nx}.Arc\tan(e^x).$$

I- Dans cette question on prends $n = 1$.

0,5 1)- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f_1(x)$, puis interpréter ces deux résultats.

0,25 2)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f_1'(x) = e^{-x}\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}} - Arc\tan(e^x)\right)$.

3)- a)- En utilisant le théorème des accroissement fini, montrer que :

0,25 $$(\forall u > 0), \frac{u}{1+u^2} < Arc\tan(u) < u.$$

0,5 b)- En déduire la monotonie de f_1, puis dresser son tableau de variation.

0,5 4)- Construire la courbe (C_{f_1}) dans un repère orthonormé.

5)- On pose : $S(\lambda) = \int_0^{\lambda} f_1(x)\,dx$ Où $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$.

0,5 ✓ Exprimer $S(\lambda)$ en fonction de λ, puis déduire $\lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda)$ et donner une Interprétation géométrique à cette limite.

Durée : 04 heures

6)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}}.Arc\tan\left(e^{\frac{k}{n}}\right)$.

0,25 ✓ Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

II- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose : $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

0,75 1)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 0 \le I_n \le \frac{\pi(1-e^{-n})}{2n}$, puis déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

0,75 2)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), n.I_n = \frac{\pi}{4} - e^{-n}.Arc\tan(e) + \int_0^1 \frac{e^{(1-n)t}}{1+e^{2t}}\,dt$.

0,5 3)- Déduire que : $\lim_{n \to +\infty} n.I_n = \frac{\pi}{4}$.

III- On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f_0(x)\,dx.$$

0,5 1)- a)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), x.Arc\tan(e^x) \le F(x) \le x.Arc\tan(e^{2x})$.

0,5 b)- En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x)$.

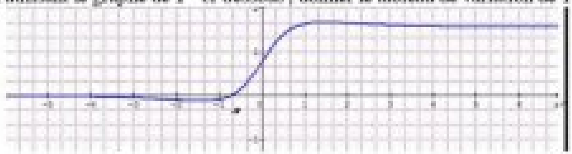
0,5 2)- a)- Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}), Arc\tan(e^{-t}) = \frac{\pi}{2} - Arc\tan(e^t)$.

0,5 b)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), F(x) = \frac{\pi}{2}x + F(-x)$, puis en déduire que (C_F) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera.

0,5 3)- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), F'(x) = 2Arc\tan(e^{2x}) - Arc\tan(e^x).$$

0,25 4)- En utilisant le graphe de F' ci-dessous, donner le tableau de variation de F.



On donne : $\alpha = \frac{-3}{4}$.

Fin Du Sujet.

Durée : 04 heures

Note :

✓ Aucun document ni calculette n'est autorisé .

✓ La qualité de la rédaction , la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies .

✓ Le sujet comporte quatre exercices et un problème :

- Un exercice d'arithmétique .
- Un exercice sur les structures algébriques .
- Un exercice sur les nombres complexes .
- Un exercice et un problème d'analyse .

Exercice 01: (3,5 pts)

I- Soit k un entier naturel non nul premiers .

0,5 1)- Montrer que : $5^k-2^k\equiv 0[k]\Rightarrow k=3$.

0,25 2)- En déduire que : $k>3\Rightarrow k\wedge\left(5^k-2^k\right)=1$.

II- Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers tels que :

$$p<q \text{ et } \left(5^p-2^p\right).\left(5^q-2^q\right)\equiv 0[pq] .$$

1)- On suppose dans cette question que : $p=3$.

0,5 a)- Montrer que : $39\left(5^q-2^q\right)\equiv 0[q]$.

0,5 b)- En déduire que : $q=13$ (on pourra utiliser le résultat de I-2)-)

2)- On suppose maintenant que : $p>3$.

0,5 a)- Vérifier que : $p\neq 5$ et que : $5^q-2^q\equiv 0[p]$ et $5^{p-1}-2^{p-1}\equiv 0[p]$.

0,5 b)- Soit d le plus petit entier naturel non nul tel que : $5^d-2^d\equiv 0[p]$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par r le reste de la division euclidienne de par d .

0,5 ✓ Montrer que : $5^n\equiv 2^n[p]\Rightarrow 5^r\equiv 2^r[p]$.

0,25 c)- Prouver que d est un diviseur commun de $p-1$ et q .

0,25 d)- Quelle conclusion peut-on faire ?

0,25 3)- En utilisant ce qui précède , déterminer les entiers naturels non nuls premiers tels que : $p<q$ et $\left(5^p-2^p\right).\left(5^q-2^q\right)\equiv 0[pq]$.

Durée : 04 heures

Exercice 02: (03 pts)

⇨ Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on pose : $a*b=a+b+iab$.

0,25 1)- a)- Vérifier que : $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2\right), 1+i(a*b)=(1+ia)\times(1+ib)$.

1 b)- Montrer que $\left(\mathbb{C}-\{i\},*\right)$ est un groupe commutatif .

c)- On pose : $H=\left\{z\in\mathbb{C}/|z-i|=1\right\}$.

0,5 ✓ Montrer que $(H,*)$est un sous-groupe de $\left(\mathbb{C}-\{i\},*\right)$.

2)- Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on pose : $a\perp b=a+b-i$.

0,5 a)- Montrer que $(\mathbb{C},\perp)$ est un groupe commutatif .

0,75 b)- Montrer que $(\mathbb{C},\perp,*)$ est un corps commutatif .

Exercice 03: (3,5 pts)

⇨ Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes respectifs $a=2i$ et $b=\frac{3}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$

Soit F la transformation qui lie tout point $M(z)$ avec le point $M'(z')$ tels que : $z'=(1+2i)z-(4+2i)$.

0,5 1)- a)- On pose : $A'=F(A)$et $B'=F(B)$. calculer $aff(A')$et $aff(B')$.

0,25 b)- Montrer que F admet un seul point fixe Ω dont on déterminera l'affixe ω.

0,5 c)- Montrer que $F=h\circ r$, Où h est une homothétie et r une rotation de Centre Ω En déterminant le rapport de h et l'angle de r .

2)- Soit $M(z)$ un point de (P)distinct de $\Omega(\omega)$ et $M'(z')$ son image par F .

0,25 a)- Montrer que $z'-z=-2i(\omega-z)$.

0,5 b)- En déduire la valeur de $\frac{MM'}{M\Omega}$ et une mesure de l'angle $\left(\overline{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{M\Omega}}\right)$.

0,25 c)- Comment construire le point $M'(z')$ sachant la position de $M(z)$?

3)- Soit C le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle OAB.

On désigne par R le rayon du cercle (Γ) et on pose : $c=aff(C)$.

0,75 a)- Montrer que : $c-\bar{c}=2i$ et $c+\bar{c}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$.

0,5 b)- En déduire c et R .

Exercice 04: (2,5 pts)

⇨ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right), f_n(x) = x + n(1 + \ln x).$$

0,5 **1)-** Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ vers $\mathbb{R}$.

0,5 **2)-** En déduire que l'équation $(E) : f_n(x) = 0$ admet une solution unique a_n dans $\mathbb{R}^{*+}$ tels que : $\dfrac{1}{e^2} < a_n < \dfrac{1}{e}$.

0,5 **3)-** Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[\right), f_{n+1}(x) < f_n(x)$, puis en déduire la monotonie De la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

0,5 **4)-** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente puis calculer sa limite .

0,5 **5)-** Prouver que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{1}{e} - a_n\right) = \dfrac{1}{e^2}$.

Exercice 05: (7,5 pts)

⇨ Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f_n(x) = e^{-nx}.Arc\tan\left(e^x\right).$$

I- Dans cette question on prend $n = 1$.

0,5 **1)-** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)$, puis interpréter ces deux résultats .

0,25 **2)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f_1'(x) = e^{-x}\left(\dfrac{e^x}{1+e^{2x}} - Arc\tan\left(e^x\right)\right)$.

3)- a)- En utilisant le théorème des accroissements finis , montrer que :

0,25 $$(\forall u > 0), \frac{u}{1+u^2} < Arc\tan(u) < u .$$

0,5 **b)-** En déduire la monotonie de f_1, puis dresser son tableau de variation .

0,5 **4)-** Construire la courbe $\left(C_{f_1}\right)$ dans un repère orthonormé .

5)- On pose : $S(\lambda) = \int_0^{\lambda} f_1(x)\,dx$ Où $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$.

0,5 ✓ Exprimer $S(\lambda)$ en fonction de λ , puis déduire $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$ et donner une Interprétation géométrique à cette limite .

Durée : 04 Heures

Note :

✓ La qualité de la rédaction , la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies .

✓ Le sujet comporte trois exercices et un problème :

- Un exercice sur les structures algébriques .
- Un exercice d'arithmétique .
- Un exercice sur les nombres complexes .
- Et un problème d'analyse .

Exercice 01: (3,5 pts)

⇨ On considère l'ensemble : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

0,5 **1)- a)-** Montrer que : $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(IM_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

b)- On pose : $I = M(1,0)$ et $J = M(0,1)$.

0,5 ✓ Montrer que la famille $B(I,J)$ est une base de l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

0,5 **2)- a)-** Vérifier que $J^2 = -3.I$, puis en déduire que E est une partie stable dans $(IM_2(\mathbb{R}),\times)$.

b)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = I + J + J^2 + ... + J^n$.

0,5 ✓ Déterminer les cordonnées de la matrice A_n dans la base $B(I,J)$.

0,25 **3)- a)-** Montrer que la famille $B'(1, i\sqrt{3})$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

0,5 **b)-** Montrer que l'application : $\begin{array}{rl} f: & \mathbb{C} \to E \\ & a+ib\sqrt{3} \mapsto M(a,b) \end{array}$ est un isomorphisme

De $(\mathbb{C},\times)$ vers $(E,\times)$, puis déduire la structure de $(E^*,\times)$ (On déterminera L'inverse de toute matrice non nulle $M(a,b)$).

0,25 **4)-** Déduire la structure de $(E,+,\times)$ en justifiant votre réponse .

5)- On considère la matrice $A = \frac{1}{2}.(I+J)$.

0,5 ✓ Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n tels que : $A^n = I$.

6)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}} \cdot Arc\tan\left(e^{\frac{k}{n}}\right)$.

0,25 ✓ Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite .

II- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose : $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

0,75 **1)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 0 \leq I_n \leq \frac{\pi(1-e^{-n})}{2n}$, puis déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

0,75 **2)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), n.I_n = \frac{\pi}{4} - e^{-n}.Arc\tan(e) + \int_0^1 \frac{e^{(1-n)t}}{1+e^{2t}}\,dt$.

0,5 **3)-** Déduire que : $\lim_{n \to +\infty} n.I_n = \frac{\pi}{4}$.

III- On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f_0(x)\,dx \ .$$

0,5 **1)- a)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), x.Arc\tan(e^x) \leq F(x) \leq x.Arc\tan(e^{2x})$.

0,5 **b)-** En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x)$.

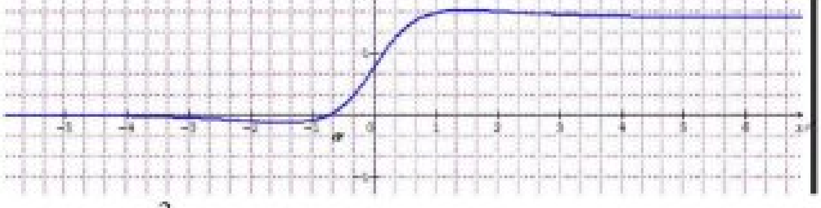
0,5 **2)- a)-** Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}), Arc\tan(e^{-t}) = \frac{\pi}{2} - Arc\tan(e^t)$.

0,5 **b)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), F(x) = \frac{\pi}{2}x + F(-x)$, puis en déduire que (C_F) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera .

0,5 **3)-** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), F'(x) = 2Arc\tan(e^{2x}) - Arc\tan(e^x).$$

0,25 **4)-** En utilisant le graphe de F' ci-dessous , donner le tableau de variation de F .



On donne : $\alpha = \frac{-3}{4}$.

Fin Du Sujet.

Durée : 04 Heures

Note :

✓ Aucun document ni calculette n'est autorisé .

✓ La qualité de la rédaction , la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies .

✓ Le sujet comporte quatre exercices et un problème :

- Un exercice d'arithmétique .
- Un exercice sur les structures algébriques .
- Un exercice sur les nombres complexes .
- Un exercice et un problème d'analyse .

Exercice 01: (3,5 pts)

I- Soit k un entier naturel non nul <u>premier</u> .

0,5 **1)-** Montrer que : $5^k - 2^k \equiv 0[k] \Rightarrow k = 3$.

0,25 **2)-** En déduire que : $k > 3 \Rightarrow k \wedge (5^k - 2^k) = 1$.

II- Soient p et q deux entiers naturels non nuls <u>premiers</u> tels que :

$$p < q \text{ et } (5^p - 2^p).(5^q - 2^q) \equiv 0[pq] .$$

1)- On suppose dans cette question que : $p = 3$.

0,5 **a)-** Montrer que : $39(5^q - 2^q) \equiv 0[q]$.

0,5 **b)-** En déduire que : $q = 13$ (on pourra utiliser le résultat de I-2)-)

2)- On suppose maintenant que : $p > 3$.

0,5 **a)-** Vérifier que : $p \neq 5$ et que : $5^q - 2^q \equiv 0[p]$ et $5^{p-1} - 2^{p-1} \equiv 0[p]$.

0,5 **b)-** Soit d le plus petit entier naturel non nul tel que : $5^d - 2^d \equiv 0[p]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par r le reste de la division euclidienne de par d .

0,5 ✓ Montrer que : $5^n \equiv 2^n[p] \Rightarrow 5^r \equiv 2^r[p]$.

0,25 **c)-** Prouver que d est un diviseur commun de $p-1$ et q .

0,25 **d)-** Quelle conclusion peut-on faire ?

0,25 **3)-** En utilisant ce qui précède , déterminer tous les entiers naturels non nuls <u>premiers</u> p et q tels que : $p < q$ et $(5^p - 2^p).(5^q - 2^q) \equiv 0[pq]$.

Durée : 04 Heures

Exercice 02: (03 pts)

⇨ Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on pose : $a*b=a+b+iab$.

0,25 **1)- a)-** Vérifier que : $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2\right),1+i(a*b)=(1+ia)\times(1+ib)$.

1 **b)-** Montrer que $\left(\mathbb{C}-\{i\},*\right)$ est un groupe commutatif .

c)- On pose : $H=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z-i|=1\}$.

0,5 ✓ Montrer que $(H,*)$est un sous-groupe de $\left(\mathbb{C}-\{i\},*\right)$.

2)- Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on pose : $a\perp b=a+b-i$.

0,5 **a)-** Montrer que $(\mathbb{C},\perp)$ est un groupe commutatif .

0,75 **b)-** Montrer que $(\mathbb{C},\perp,*)$ est un corps commutatif .

Exercice 03: (3,5 pts)

⇨ Le plan complexe (P)est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectifs $a=2i$ et $b=\frac{3}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$

Soit F la transformation qui lie tout point $M(z)$ avec le point $M'(z')$ tels que :

$z'=(1+2i)z-(4+2i)$.

0,5 **1)- a)-** On pose : $A'=F(A)$et $B'=F(B)$. calculer $aff(A')$et $aff(B')$.

0,25 **b)-** Montrer que F admet un seul point fixe Ω dont on déterminera l'affixe ω.

0,5 **c)-** Montrer que $F=h\circ r$, Où h est une homothétie et r une rotation de Centre Ω En déterminant le rapport de h et l'angle de r .

2)- Soit $M(z)$ un point de (P)distinct de $\Omega(\omega)$ et $M'(z')$ son image par F.

0,25 **a)-** Montrer que $z'-z=-2i(\omega-z)$.

0,5 **b)-** En déduire la valeur de $\frac{MM'}{M\Omega}$ et une mesure de l'angle $\left(\overline{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{M\Omega}}\right)$.

0,25 **c)-** Comment construire le point $M'(z')$ sachant la position de $M(z)$?

3)- Soit C le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle OAB.

On désigne par R le rayon du cercle (Γ) et on pose : $c=aff(C)$.

0,75 **a)-** Montrer que : $c-\bar{c}=2i$ et $c+\bar{c}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$.

0,5 **b)-** En déduire c et R .

Durée : 04 Heures

0,25 **5)- a)-** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\left(\exists! a_n \in \mathbb{R}^{*+}\right), f\left(a_n\right) = 1 + \dfrac{1}{n}$.

0,25 **b)-** Vérifier que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), 0 < a_n < 1$.

0,25 **6)- a)-** justifier que la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante .

0,5 **b)-** En déduire qu'elle est convergente et montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

0,5 **c)-** Prouver que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(a_n - 1\right) = -2$, puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(a_n\right)^n = \dfrac{1}{e^2}$.

III- On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(0) = 0 \text{ et } \left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right), F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt .$$

0,5 **1)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0,1\right[\right), \dfrac{2x\ln x}{x+1} \le F(x) \le x\ln x$.

0,75 **b)-** En déduire que F est continue à droite en 0, puis calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{F(x)}{x}$ et Donner son interprétation géométrique .

0,5 **2)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x \in \left]1,+\infty\right[\right), \ln x.\ln(x+1) \le F(x) \le 2\ln x.\ln(x+1)$.

0,75 **b)-** En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement Ces deux limites .

0,75 **3)- a)-** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que :

$$F'(1) = 1 \text{ et } F \left(\forall x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\right), F'(x) = \frac{(3x-1).\ln x}{x^2-1} .$$

0,25 **b)-** Dresser le tableau de variation de F en justifiant votre réponse .

0,5 **4)-** Donner l'allure de $\left(C_F\right)$ dans un repère orthonormé (On donne $F\left(\dfrac{1}{3}\right) \simeq \dfrac{-1}{2}$).

Fin Du Sujet.

Exercice 02: (03 pts)

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = 2\times 7^n + 3\times 5^n - 5$.

0,25 **1)- a)-** Montrer par récurrence que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), a_{n+1} \equiv a_n\left[24\right]$.

0,25 **b)-** Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), a_n \equiv 0\left[24\right]$.

2)- Soit $p > 7$ un entier naturel premier .

0,5 **a)-** Prouver que : $a_{p-1} \equiv 0\left[p\right]$.

0,5 **b)-** En déduire que l'entier a_{p-1} est divisible par $24p$.

3)- On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $\left(E\right): a_3 x - a_2 y = 5a_1$.

0,5 **a)-** Vérifier que $\left(E\right)$ est équivalente à l'équation : $\left(F\right): 44x - 7y = 5$.

0,5 **b)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $\left(E\right)$ (en précisant les différentes étapes).

4)- Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on pose : $x_q = 7q + 6$ et $y_q = 44q + 37$.

0,5 ✓ Montrer que le couple $\left(x_q, y_q\right)$ est de l'équation $\left(E\right)$, puis en déduire toutes Les valeurs de l'entier naturel q pour lesquels $x_q \wedge y_q = 1$.

Exercice 03: (3,5 pts)

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$\left(E\right): z^2 - 2mz + m^2 + 4 = 0 \text{ Où } m \in \mathbb{C}^*.$$

0,5 **1)-** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right)$.

2)- On suppose que : $m = 2.e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

0,5 ✓ Ecrire les solutions de $\left(E\right)$ sous forme trigonométrique .

3)- Dans le plan complexe , on considère les points $M_1\left(z_1\right)$ et $M_2\left(z_2\right)$ tels que :

$$z_1 = m + 2i \text{ et } z_2 = m - 2i .$$

a)- Déterminer chacun des ensembles suivants :

0,75 $\left(E_1\right) = \left\{M\left(m\right) \in \left(\mathrm{P}\right) / OM_1 = OM_2\right\}$ et $\left(E_2\right) = \left\{M\left(m\right) \in \left(\mathrm{P}\right) / \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}\right\}$

0,5 **b)-** En déduire m pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle et isocèle en O .

II- On considère la symétrie centrale S de centre $I(1)$ et la rotation R de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Et pour tout point $M(z)$ distinct de O on pose :

$M'(z')=S(M)$ et $M''(z'')=R(M)$.

0,5 **a)-** Montrer que : $z'=-z+2$ et $z''=iz+2$.

0,75 **b)-** Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que les points $A(2)$, Ω M' et M'' soient cocycliques .

Exercice 04: (10 pts)

I- Soit $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

0,5 **1)- a)-** Montrer que : $\dfrac{x}{3(x+1)} \le \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t}\,dt \le \dfrac{x}{3}$.

0,5 **b)-** Montrer que : $\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t}\,dt = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\dfrac{1}{2}$.

0,25 **2)-** En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

II- On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(1)=1 \text{ et } (\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[),\ f(x)=\frac{\ln x}{x-1}.$$

0,75 **1)-** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, puis donner leurs interprétation .

0,5 **2)- a)-** Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

0,5 **b)-** Etudier la dérivabilité de f en $x_0=1$. (Utiliser **I-2)-**)

0,5 **3)- a)-** Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

Et que : $(\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[),\ f'(x)=\dfrac{(x-1)-x\ln x}{x(x-1)^2}$.

0,5 **b)-** Montrer que : $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[),(x-1)-x\ln x<0$, puis dresser Le tableau de variation complet de f .

0,5 **4)-** Tracer la tangente au point $A(1,f(1))$ et (C_f) dans un repère orthonormé .

Durée : 4 heures

Exercice 01 : (03 points)

➩ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$(E) : 143u - 840v = 1 .$$

0,25 **1)- a)-** Vérifier que : $143 \times 47 - 840 \times 8 = 1$.

0,5 **b)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les différentes étapes .

0,5 **c)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}/840\mathbb{Z}$ l'équation : $(F) : \overline{143} \times d = \bar{1}$.

2)- Soit n un entier naturel tel que : $n \wedge 899 = 1$.

0,25 **a)-** Montrer que : $n \wedge 29 = 1$ et $n \wedge 31 = 1$.

0,5 **b)-** En déduire que : $n^{840} \equiv 1[899]$.

1 **3)-** Déterminer un entier naturel n compris entre 100 et 1000 tel que : $n^{143} \equiv 2[899]$.

Exercice 02 : (03 points)

➩ Pour tout x et y de l'intervalle $]0,1[$, on pose :

$$x * y = \frac{2xy}{(1-x)(1-y)+2xy} .$$

0,25 **1)-** Vérifier que $*$ est une loi de composition interne sur $]0,1[$.

2)- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \dfrac{e^x}{2+e^x}$.

0,75 **a)-** Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

0,75 **b)-** Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(]0,1[,*)$, puis en Déduire la structure de $(]0,1[,*)$ (On précisera son élément neutre et Le symétrique de tout $x \in]0,1[$) .

3)- On considère l'ensemble : $H = \left\{ \dfrac{3^n}{2+3^n} / n \in \mathbb{Z} \right\}$.

0,75 ✓ Montrer que $(H,*)$est un sous groupe de $(]0,1[,*)$.

4)- Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose : $x^{(n)} = \underbrace{x * x * ... * x}_{n \text{ fois}}$ Où $x \in]0,1[$.

0,5 ✓ Exprimer $x^{(n)}$en fonction de n et x , puis déterminer son symétrique Dans $(]0,1[,*)$.

Durée : 4 heures

○ Exercice 05 : (05 points)

⇨ Soit F la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par :

$$F(-1)=\frac{1}{e} \text{ et } \left(\forall x\in]-1,+\infty[\right), F(x)=\int_x^{2x+1}\frac{e^t}{2t+1}\,dt .$$

0,25 — **1)-** Montrer que : $\left(\forall x\in]-1,+\infty[\right), \int_x^{2x+1}\frac{1}{t+1}\,dt=\ln 2$.

0,5 — **2)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x\in]-1,+\infty[\right), e^x.\ln 2\le F(x)\le e^{2x+1}.\ln 2$.

0,25 — **b)-** Déduire que F est continue à droite en $x_0=-1$.

0,75 — **3)-** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$, puis déduire la nature de la branche infini De la courbe (C_F) au voisinage de $+\infty$.

0,75 — **4)- a)-** Justifier soigneusement que F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que :

$$\left(\forall x\in]-1,+\infty[\right), F'(x)=\frac{e^x\left(e^{x+1}-1\right)}{x+1}.$$

0,5 — **b)-** Dresser le tableau de variation de F en justifiant votre réponse .

0,75 — **5)- a)-** Montrer que : $\left(\forall x\in]-1,+\infty[\right), \frac{1}{e}\le\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}\le e^{2x+1}$ (On pourra Utiliser le théorème des accroissements finis deux fois)

0,5 — **b)-** Déduire que F est dérivable à droite en $x_0=-1$, puis interpréter le résultat obtenu géométriquement .

0,75 — **c)-** Tracer la courbe (C_F) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Fin Du Sujet .

Durée : 4 heures

Exercice 03 : (04 points)

✓ Les parties I et II sont indépendantes .

I- Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation :

$$(E): z^2 - \left[1 + m(1+i)\right]z + im^2 + m = 0 \text{ , où } m \in \mathbb{C}^* - \{i\} .$$

0,5 **1)- a)-** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left(1 + (i-1)m\right)^2$.

0,25 **b)-** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

0,75 **2)- a)-** Déterminer la nature des ensembles suivant :

$$(D) = \left\{ M(m) \in (P) \,/\, |1 + im| = |m| \right\}$$

$$\text{Et } (\Gamma) = \left\{ M(m) \in (P) \,/\, \arg(1 + im) \equiv \arg(m)[\pi] \right\} .$$

0,5 **b)-** Ecrire sous forme trigonométrique l'affixe de chacun des points d'intersection de (D) et (Γ).

II- Dans le plan complexe (P), on considère les points $A(1)$ et $B(1+i)$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$, on pose : $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$.

0,25 **1)-** Montrer que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2)- Soient E et F les milieux respectifs des segments $[AA']$ et $[BB']$.

0,5 **a)-** Montrer que : $\frac{z_E}{z_E - z_F} = i$, puis en déduire que $(OE) \perp (EF)$.

0,5 **b)-** Montrer que la droite (AA') coupe le segment $[BB']$ en F .

3)- Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par :

$$M_0(i) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), M_{n+1} = R(M_n) .$$

0,25 **a)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), aff(M_n) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n.\pi}{6}\right)}$.

0,25 **b)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $(F): 12x - 5y = 3$.

0,25 **c)-** En déduire l'ensemble des entiers naturels n tel que : $M_n \in [Ox)$.

Durée : 4 heures

○ Exercice 04 : (05 points)

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et f_n la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(x-1) + \mathrm{P}_n(x) \text{ , où } \mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

0,5 — **1)- a)-** Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

0,75 — **b)-** Montrer que f_n est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]1,+\infty[), f_n'(x) = \frac{x^n}{x-1}.$$

Puis en déduire que la fonction f_n est une bijection de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

0,25 — **2)- a)-** Montrer que l'équation $(E) : f_n(x) = 0$ admet une solution unique a_n dans L'intervalle $]1,+\infty[$.

0,5 — **b)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), f_n(a_{n+1}) = \dfrac{-a_{n+1}}{n+1}$, puis en déduire que La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^* - \{1\}}$ est strictement décroissante .

0,75 — **c)-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), \ln(n+1) \leq \mathrm{P}_n(1)$, puis en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), 1 < a_n \leq 1 + \frac{1}{n+1}.$$

0,25 — **d)-** Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^* - \{1\}}$ est convergente et préciser sa limite .

0,5 — **3)- a)-** Déterminer la monotonie de la fonction f'_{n+1} sur l'intervalle $\left]1, 1 + \dfrac{1}{n+1}\right]$.

0,75 — **b)-** En appliquant le théorème des accroissements finis à f_{n+1} sur $[a_{n+1}, a_n]$

Montrer que : $a_{n+1} - 1 \leq (n+1)(a_n - a_{n+1}) \leq a_n - 1$.

0,25 — **c)-** En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} n.(a_n - a_{n+1})$.

0,5 — **b)-** Vérifier que : $\dfrac{n.a_n + 1}{n+1} \leq a_{n+1} \leq \dfrac{(n+1)a_n + 1}{n+2}$

Puis donner un encadrement de a_3 .

Exercice 01 :(5,5pts)

⇨ Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On pose : $u_n=S_{2n}$ et $v_n=S_{2n+1}$.

1,25 — 1)- a)- Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes .

0,25 — b)- Que peut-on conclure ?

1 — 2)- a)- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+),\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}x^{k-1}\le\frac{1}{1+x}\le\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}x^{k-1}$.

1 — b)- En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+),\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\le\ln(1+x)\le\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$.

0,75 — 3)- a)- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),u_n\le\ln 2\le v_n$, puis déduire la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1 — b)- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),|S_n-\ln 2|\le\frac{1}{n}$ (Raisonner selon la parité de n).

0,25 — c)- En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite .

Exercice 02 :(5,5pts)

⇨ Soit f la fonction définie sur $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=-\ln(\cos x)$.

1 — 1)- a)- Calculer $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}f(x)$. Puis justifier que f est continue sur I .

0,75 — b)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}^+$.

0,75 — c)- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

1 — 2)- Montrer que l'équation $(E):f(x)=x$ une solution unique α dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Et que $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3)- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=\frac{\pi}{4}$ et $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}=f(u_n)$.

0,75 — a)- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),0<u_n\le\frac{\pi}{4}$.

0,75 — b)- Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis en déduire qu'elle est convergente .

0,5 — c)- Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant soigneusement votre réponse .

Problème :(09pts)

I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(t)=\ln\left(1+\sqrt{t}\right)-\sqrt{t}$.

0,5 1)- a)- Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^+$.

0,75 b)- Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que : $g'(t)=\dfrac{-1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}$.

0,5 2)- a)- Montrer que : $\left(\forall t\in\mathbb{R}^{+*}\right)\left(\exists c\in\left]0,t^2\right[\right),\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\dfrac{-1}{2\left(1+\sqrt{c}\right)}$.

0,25 b)- En déduire que : $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\dfrac{-1}{2}$.

II- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(1)=1 \text{ et } \left(\forall x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right),f(x)=\frac{\ln x}{x-1}.$$

0,5 1)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

0,5 b)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

0,25 2)- a)- Montrer que f est continue en $x_0=1$.

1,25 b)- Montrer que f est dérivable en $x_0=1$ (On pourra utiliser I-2)- b)).

0,75 3)- a)- Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right),f'(x)=\dfrac{(x-1)-x\ln x}{x(x-1)^2}$.

0,75 b)- Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right),(x-1)-x\ln x<0$. Puis dresser le tableau de variation de f .

0,75 4)- Construire la courbe $\left(C_f\right)$ dans un repère orthonormé .

0,25 5)- a)- Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists! a_n\in\mathbb{R}^{+*}\right),f(a_n)=1+\dfrac{1}{n}$.

0,25 b)- Vérifier que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),0<a_n<1$.

0,5 c)- Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante , puis en déduire qu'elle est convergente .

0,75 d)- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n.(1-a_n)=2$, puis en déduire que :

0,5 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n=\dfrac{1}{e^2}$.

Fin Du Sujet .