# الامتحانات الوطنية مصححة

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

## لمادة الرياضيات

**2008 - 2024**
**norm et rat**

# SM BIOF

تم تجميع الملف من طرف الأستاذ

## جمال بناصر

Deux F-16 marocains exposés au Royal International Air Tattoo. Crédit: DR

**مع الشكر الجزيل لكل الأساتذة الأفاضل الذين ساهموا في تصحيح الإمتحانات الوطنية جزاهم الله خيرا والله ولي التوفيق**

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : normal 2008** juin 2008

# MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................. **3,25 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .................................. **3,75 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .......................................... **3,00 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** ................................. **10,00 points**

## Exercice 1 : (3,25 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}\big/ a,b\in\mathbb{R}\right\}$

**0.75 pt** **1 - a)** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

**0.50 pt** **b)** Montrer que la famille $(I,J)$ est une base dans l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

**2 -** On considère l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ & a+ib & \longmapsto & M(a;b)\end{array}$ où : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

**0.25 pt** **a)** Montrer que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

**0.50 pt** **b)** Montrer que $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

**0.50 pt** **3 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

**0.75 pt** **4 -** Résoudre dans $E$ l'équation : $J\times X^3=I$ (où $X^3=X\times X\times X$)

## Exercice 2 : (3,75 pts)

Soit $a$ un nombre complexe non nul et $\overline{a}$ le conjugué du nombre $a$.

**Partie I:**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(G): iz^2+(a+\overline{a}-i)z-\overline{a}-ia\overline{a}=0$

**0.50 pt** **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation $(G)$ est : $\Delta=(a-\overline{a}-i)^2$

**0.50 pt** **b)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(G)$.

**0.50 pt** **2 -** Montrer que $a$ est une solution de l'équation $(G)$ si, et seulement si : $\Re e(a)=\Im m(a)$
(où $\Re e(a)$ est la partie réel du complexe $a$ et $\Im m(a)$ est la partie imaginaire du complexe $a$)

**Partie II:**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ et on suppose que $\Re e(a)\neq\Im m(a)$.
On considère les points $A$ et $B$ et $C$ d'affixes respectives : $a$ et $i\overline{a}$ et $1+ia$.

**1 -** On pose : $Z=\frac{(1+ia)-a}{i\overline{a}-a}$

**0.50 pt** **a)** Vérifier que : $\overline{Z}=\frac{(i-1)\overline{a}-i}{i\overline{a}-a}$

**0.50 pt** **b)** Montrer que les points $A$ et $B$ et $C$ sont alignés si, et seulement si : $\Im m(a)=\frac{1}{2}$

**2 -** On suppose dans cette question que $\Im m(a)\neq\frac{1}{2}$
On considère $R_1$ la rotation de centre $A$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et $R_2$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose : $R_1(B)=B'$ et $R_2(C)=C'$.
Soit $E$ le milieu du segment $[BC]$.

**0.50 pt** **a)** Déterminer $b'$ et $c'$ les affixes respectives de $B'$ et $C'$.

**0.50 pt** **b)** Montrer que les droites $(AE)$ et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C'=2AE$

## Exercice 3 : (3,00 pts)

**Partie I**:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E) : 35u - 96v = 1$

0.25 pt **1 -** Vérifier que le couple $(11, 4)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$.

0.50 pt **2 -** Déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$.

**Partie II**:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{N}$ l'équation suivante : $(F) : x^{35} \equiv 2[97]$

**1 -** Soit $x$ une solution de l'équation $(F)$.

0.50 pt **a)** Montrer que 97 est premier et que $x$ et 97 sont premiers entre eux.

0.50 pt **b)** Montrer que : $x^{96} \equiv 1[97]$

0.50 pt **c)** Montrer que : $x \equiv 2^{11}[97]$

0.25 pt **2 -** Montrer que si l'entier naturel $x$ vérifie $x \equiv 2^{11}[97]$, alors $x$ est solution de l'équation $(F)$.

0.25 pt **3 -** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $(F)$ est l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent sous la forme : $11 + 97k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

## Exercice 4 : (10,00 pts)

**Partie I**:

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$
et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0.50 pt **1 - a)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)$ puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

0.50 pt **b)** Calculer $f'(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+$ puis dresser le tableau des variations de $f$.

0.50 pt **c)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+$ et que $0 < \alpha < 1$.

0.50 pt **d)** Étudier le signe de $f(x)$ dans l'intervalle $[0; 1]$.

0.50 pt **2 -** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 0, 4$)

**Partie II**:

On considère les deux fonctions $\varphi$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \ ; \quad x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

0.50 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists c \in ]0; x[)\ ;\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-c^2}$

0.50 pt **b)** Déduire que : $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t < 1$

0.50 pt **2 - a)** Montrer que : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$

0.50 pt **b)** Montrer que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ ;\ g'(x) = f(x)$

**0.50 pt** **c)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta$ dans l'intervalle $]\alpha; 1[$.

**0.50 pt** **3 - a)** Montrer que la fonction $\varphi$ est continue à droite en 0.

**0.50 pt** **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ \ \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

**0.75 pt** **c)** Montrer que la fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ \ \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

**0.50 pt** **d)** Montrer que : $\varphi\left([0;1]\right) \subset [0;1]$

**0.50 pt** **4 - a)** Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+$ on a : $\displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^3}{3}$

**0.50 pt** **b)** Montrer que : $(\forall x \in ]0;1[) \ ; \ \ |\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{3}$

**0.25 pt** **c)** Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \ ; \ \ \varphi(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = 0$

**5 -** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = \varphi\left(u_n\right) \ ; \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 & = \frac{2}{3} \end{cases}$$

**0.50 pt** **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

**0.50 pt** **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \ |u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$

**0.50 pt** **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques

### Session : NORMAL 2008

## MATHÉMATIQUES

### Exercice 1 : (3.25 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ , $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix} a,b\in\mathbb{R}\right\}$

0.75 pt **1 - a)** Montrons que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

On a $M(0,0)\in E$ donc $E\neq\phi$.

Soient $M(a,b),M(c,d)\in E$ :

$$\begin{aligned}\alpha M(a,b)+\beta M(c,d)&=\alpha\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\\frac{-1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}c&\sqrt{3}d\\-\frac{1}{\sqrt{3}}d&c\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c&\sqrt{3}(\alpha b+\beta d)\\\frac{-1}{\sqrt{3}}(\alpha b+\beta d)&\alpha a+\beta c\end{pmatrix}\\&=M(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)\in E\end{aligned}$$

Donc $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$

0.5 pt **b)** Montrons que la famille $(I,J)$ est une base dans l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$

On a pour tous $M(a,b)\in E$ : $M(a,b)=aI+bJ$. Donc $(I,J)$ est une partie génératrice de $E$.

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ :

$$\alpha I+\beta J=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha&\sqrt{3}\beta\\\frac{-2}{\sqrt{3}}\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow\alpha=\beta=0$$

Donc $(I,J)$ st une famille libre de $E$.

$\boxed{\text{D'où } (I;J) \text{ est une base de } (E,+,\cdot).}$

**2 -** On considère l'application $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ & a+ib & \longmapsto & M(a;b) \end{array}$ où : $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$.

**0.25 pt** **a)** Montrons que $E$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Soient $M(a,b), M(c,d) \in E$.

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & \sqrt{3}d \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & \sqrt{3}(ad+bc) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= M(ac-bd; ad+bc) \in E. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } E \text{ est une partie stable de } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.).}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

Soient $a+ib, c+id \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} f((a+ib)(c+id)) &= f((ac-bd)+i(ad+bc)) \\ &= M(ac-bd; ad+bc) \\ &= M(a,b) \times M(c;d) \\ &= f(a+ib) \times f(c+id). \end{aligned}$$

Donc $f$ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ vers $(E^*; \times)$

On Considère l'équation :

$$\begin{aligned} f(x+iy) = M(a,b) \Leftrightarrow M(x,y) &= M(a,b). \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & \sqrt{3}y \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'équation admet unique solution $a+ib \in \mathbb{C}^*$, alors $f$ est bijective.

$\boxed{\text{D'où } f \text{ est un isomorphisme de } (\mathbb{C}^*;\times) \text{ vers } (E^*;\times).}$

**0.5 pt** **3 -** Montrons que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

On sait que $(E,+,\times)$ est un espace vectoriel réel, donc $(E,+,\times)$ est un groupe commutatif. et on a $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif donc $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif, car c'est l'image de $(\mathbb{C}^*,\times)$ pa l'isomorphisme $f$. puisque $\times$ associative par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Donc $\times$ est associative par rapport à $+$ dans $E$.

$\boxed{\text{En déduire que } (E,+,\times) \text{ est un Corps Commutatif.}}$

**0.75 pt** **4 -** Résoudrons dans $E$ l'équation : $J \times X^3 = I \quad (\text{où } X^3 = X \times X \times X)$

$$\begin{aligned}J \times X^3 = I &\Leftrightarrow -J \times J \times X^3 = -J\\ &\Leftrightarrow -J^2 \times X^3 = -J.\\ &\Leftrightarrow X^3 = -J.\\ &\Leftrightarrow (M(a,b))^3 = M(0,-1)\\ &\Leftrightarrow (f(a+ib))^3 = f(-i)\\ &\Leftrightarrow f\left((a+ib)^3\right) = -i\\ &\Leftrightarrow (a+ib)^3 = -i\end{aligned}$$

Donc on résoudre l'équation $Z^3 = -i$, on pose : $Z = re^{i\theta}$

Donc $r^3 e^{3i\theta} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$

Alors $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \{0;1;3\} \end{cases}$

Pour $k = 0$ : $Z_0 = e^{-\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ donc $X_0 = M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}\right)$

Pour $k = 1$ : $Z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ donc $X_1 = M(0;1)$

pour $k = 2$ : $Z_2 = e^{\frac{7\pi}{6}i} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ donc $X_2 = M\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

D'où : $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J; J; \frac{-\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J\right\}$

## Exercice 2 : (3.75 pts)

Soit $a$ un nombre complexe non nul et $\overline{a}$ le conjugué du nombre $a$.

**Partie I:**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(G) : iz^2 + (a + \overline{a} - i)z - \overline{a} - ia\overline{a} = 0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifions que le discriminant de l'équation $(G)$ est : $\Delta = (a - \overline{a} - i)^2$

$$\begin{aligned}\Delta &= (a + \bar{a} - i)^2 - 4i(-\bar{a} - ia\bar{a})\\ &= a^2 + \bar{a}^2 + i^2 + 2a\bar{a} - 2ia - 2\bar{a}i + 4i\bar{a} - 4a\bar{a}\\ &= a^2 + \bar{a}^2 + i^2 - 2a\bar{a} - 2ia + 2i\bar{a}.\\ &= (a - \bar{a} - i)^2\end{aligned}$$

Donc $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$

0.5 pt **b)** Résoudrons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(G)$.

On a $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$

Donc $z_1 = \frac{(i-a-\bar{a})-(a-\bar{a}-i)}{2i} = 1 + ai$ et $z_2 = \frac{(i-a-\bar{a})+(a-\bar{a}-i)}{2i} = \bar{a}i$

Donc $S_G = \{1 + ai, \bar{a}i\}$.

0.5 pt **2 -** Montrons que $a$ est une solution de l'équation $(G)$ si, et seulement si : $Re(a) = Im(a)$

(où $Re(a)$ est la partie réel du complexe $a$ et $Im(a)$ est la partie imaginaire du complexe $a$)

On a $a$ solution de l'équation $(G)$, alors $a = 1 + ai$ ou $a = \bar{a}i$

Donc $\mathrm{Re}(a) + i\,\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(a) + i\,\mathrm{Re}(a)$ ou $(1 - \mathrm{Im}(a)) + i\,\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(a) + i\,\mathrm{Im}(a)$

D'où : $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Re}(a)$.

Réciproquement si $a$ sous la forme : $a = r + ri$

On a $\bar{a}i = (r - ri)i = ri + r = a$.

Donc $a$ est une solution de $(G)$.

En déduire que : $a$ solution de $(G) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(a) = \mathrm{Im}(a)$ .

**Partie II**:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$et on suppose que $Re(a) \neq Im(a)$.

On considère les points $A$ , $B$ et $C$ d'affixes respectives : $a$ , $i\bar{a}$ et $1 + ia$.

0.5 pt **1 - a)** Vérifions que : $\overline{Z} = \dfrac{(i-1)\overline{a} - i}{i\overline{a} - a}$

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \overline{\left(\frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}\right)} = \frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-ia-\bar{a}} = \frac{1-i\bar{a}-\bar{a}}{-ia-\bar{a}} \\
&= \frac{1-\bar{a}(i+1)}{-ia-\bar{a}} = \frac{-i(1-\bar{a}(i+1))}{-i(-ia-\bar{a})} \\
&= \frac{-i+\bar{a}(i-1)}{-a+\bar{a}i}
\end{aligned}$$

Donc $\bar{z} = \frac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$

0.5 pt **b)** Montrons que les points $A$ , $B$ et $C$ sont alignés si, et seulement si : $Im(a) = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
& A(a); B(i\bar{a}) \text{ et } C(1+ai) \text{ sont alignées} \\
& \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}. \\
& \Leftrightarrow \frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a} \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}\right)} = \frac{1+ai-a}{i\bar{a}-a} \\
& \Leftrightarrow \frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-i\bar{a}-\bar{a}} = \frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-\bar{a}} \\
& \Leftrightarrow \frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-ia-\bar{a}} = \frac{(i-ai)-ai}{-\bar{a}-ai} \\
& \Leftrightarrow (1-\bar{a}i)-\bar{a} = (i-a)-ai \\
& \Leftrightarrow i(a-\bar{a}) + (a-\bar{a}) = (i-1) \\
& \Leftrightarrow a-\bar{a} = \frac{i-1}{i+1} \\
& \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Im}(a)i = \frac{2i}{2} = i \\
& \Leftrightarrow \mathrm{Im}(a) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $A(a); B(i\bar{a})$ et $C(1+ai)$ sont alignées $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2}$

**2 -** On suppose dans cette question que $Im(a) \neq \dfrac{1}{2}$

On considère $R_1$ la rotation de centre $A$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et $R_2$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On pose : $R_1(B) = B'$ et $R_2(C) = C'$.

Soit $E$ le milieu du segment $[BC]$.

**0.5 pt** **a)** Déterminons $b'$ et $c'$ les affixes respectives de $B'$ et $C'$.

$$\begin{aligned}
&R_1(B) = B' \\
\Leftrightarrow & z_{B'} - z_A = e^{-\frac{\pi}{2}i}\left(z_{B-}z_A\right). \\
\Leftrightarrow & b' - a = -i(i\bar{a} - a). \\
\Leftrightarrow & b' = \bar{a} + ia + a. \\
&R_2(C) = C' \\
\Leftrightarrow & z_{C'} - z_A = e^{\frac{\pi}{2}i(z_C - z_A)} \\
\Leftrightarrow & c' - a = i(1 + ai - a) \\
\Leftrightarrow & c' = i(1-a).
\end{aligned}$$

Donc $b' = \bar{a} + ia + a$ et $c' = i(1-a)$

**0.75 pt** **b)** Montrons que les droites $(AE)$ et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C' = 2AE$

On a $E$ est le milieu de $[BC]$.

Donc $z_E = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{i\bar{a}+ai+1}{2}$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} &= \frac{i(1-a) - (\bar{a} + ia + a)}{\frac{i\bar{a}+ai+1}{2} - a} \\
&= 2\left(\frac{i - 2ai - \bar{a} - a}{i\bar{a} + ai + 1 - 2a}\right) \\
&= 2i\left(\frac{1 - 2a + \bar{a}i + ai}{i\bar{a} + ai + 1 - 2a}\right). \\
&= 2i
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} = 2i &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{B'C'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[-2\pi]. \\
&\Leftrightarrow (AE) \perp (B'C').
\end{aligned}$$

Et on a $\left|\frac{z_{C'} - z'_B}{z_E - z_A}\right| = 2$

Donc $|z_{C'} - z_{B'}| = 2\,|z_E - z_A|$

Alors $B'C' = 2AE$.

D'où les droites $(AE)$ et $(B'C')$ sont perpendiculaires et $B'C' = 2AE$

## Exercice 3 : (3 pts)

**Partie I**:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E) : 35u - 96v = 1$

0.25 pt **1 -** Vérifions que le couple $(11, 4)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$.

On a $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

Donc $(11, 4)$ est une solution particulier de $(E)$.

0.5 pt **2 -** En déduire l'ensemble de solutions de l'équation $(E)$.

On a $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

D'après le théorème de Bézout $35 \wedge 96 = 1$

Soient $(u, v)$ la solution général de $(E)$

On a $\begin{cases} 35u - 96v = 1 \\ 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \end{cases}$

Donc $35(u - 11) = 96(v - 4)$

Donc 35 divise $96(v - 4)$

Puisque $35 \wedge 96 = 1$ et d'après le théorème de Gauss :

Donc : $(\exists k \in \mathbb{Z}) : v = 35k + 4$.

On remplace $v$ par sa valeur : $35(u - 11) = 96 \times 35k$

Donc $u = 96k + 11$

D'où : $S' = \{(96k + 11; 35k + 4)/k \in \mathbb{Z}\}$.

**Partie II**:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{N}$ l'équation suivante : $(F) : x^{35} \equiv 2\,[97]$

**1 -** Soit $x$ une solution de l'équation $(F)$.

0.5 pt **a)** Montrons que 97 est premier et que $x$ et 97 sont premiers entre eux.

On a les nombres 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers de carrée inférieur à 97 et ils ne divisent pas 97.

Donc 97 est premier.

Soit $x \wedge 97 = d$, donc $d/97$

Puisque 97 est premier donc $d = 1$ ou $d = 97$.

On suppose que $d = 97$.

On a $x \wedge 97 = d$ et $d/x$.

Donc $x \equiv 0[97] \quad c - a - d : x^{35} \equiv 0[97]$.

Donc $x$ n'est pas une solution de $(F)$, absurde.

D'où : $d = 1$, alors : $x \wedge 97 = 1$.

0.5 pt **b)** Montrons que : $x^{96} \equiv 1\ [97]$

On a $x \wedge 97 = 1$ et 97 premier, d'après le petit théorème de Fermat :

$x^{97-1} \equiv 1[97]$

Donc $x^{96} \equiv 1[97]$

0.5 pt **c)** Montrons que : $x \equiv 2^{11}\ [97]$

On sait que $(11, 4)$ solution de $(E)$. et on a : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$.

$x$ solution de $(F)$, donc $x^{35} \equiv 2[97]$.

Alors $x^{35\times 11} \equiv 2^{11}[97]$.

D'après la question 1)$b)$ : $x^{96} \equiv 1[97]$.

Donc $x^{-96\times 4} \equiv 1[97]$.

Par multiplication de deux égalité on a : $x^{35\times 12 - 96\times 4} \equiv 2^{11}[97]$

D'où $x \equiv 2^{11}[97]$

**2 -** Montrons que si l'entier naturel $x$ vérifie $x \equiv 2^{11}\ [97]$, alors $x$ est solution de l'équation

0.25 pt $(F)$.

On a :

$$x \equiv 2^{11}[97] \Rightarrow x^{35} \equiv 2^{11\times 35}[97].$$
$$\Rightarrow x^{35} \equiv 2^{96\times 4+1}[97].$$
$$\Rightarrow x^{35} \equiv 2^{96\times 4} \times 2[97]$$

On sait que 97 et 2 sont premier d'après le petit théorème de Fermat : $2^{96} \equiv 1[97]$

Donc $2^{96\times 4} \equiv 1 \quad [97]$.

Alors : $2^{96\times 4} \times 2 \equiv 2[97]$.

Donc $x^{35} \equiv 2[97]$.

D'où $x$ est une solution de $(F)$.

**3 -** Montrons que l'ensemble des solutions de l'équation $(F)$ est l'ensemble des entiers naturels

0.5 pt qui s'écrivent sous la forme : $11 + 97k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On a montrer que : $x^{35} \equiv 2[97] \Leftrightarrow x \equiv 2^{11}[97]$ et on a $2^{11} \equiv 11[97]$.

Donc $x \equiv 11[97]$, c-a-d : $(\exists k \in \mathbb{Z}) : x = 97k + 11$.

D'où : $S_F = \{97k + 11 / k \in \mathbb{Z}\}$.

## Exercice 4 : (10 pts)

**Partie I**:

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0.5 pt

**1 - a)** Calculons la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ puis interprétons le résultat obtenu géométriquement.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to +\infty} 2x - e^{-2n} - 2x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 2x$ est un asymptote de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt

**b)** Calculons $f'(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+$ puis dressons le tableau des variations de $f$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$f'(x) = 2 + 2xe^{-x^2} > 0$$

Donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - e^{-x^2} = +\infty$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-1 \nearrow +\infty$ |

**c)**

On a $f$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+) = [-1; +\infty[$.

Donc $f$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[-1; +\infty[$ et on a $0 \in [-1; +\infty[$

Donc 0 à un seul antécédent dans $\mathbb{R}^+$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}^+$.

Puisque $0 \in f(]0;1[) = ]-1, 2 - \frac{1}{e}[$.

Alors $-1 < \alpha < 1$.

Donc que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+$ et $0 < \alpha < 1$.

**d)** Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}_+$ et que $0 < \alpha < 1$.

0.5 pt

On a $f(\alpha)=0$ et $\alpha \in ]0;1[$.

Si $0<x<\alpha$ alors : $f(x)<f(\alpha)$ car $f$ croissante.

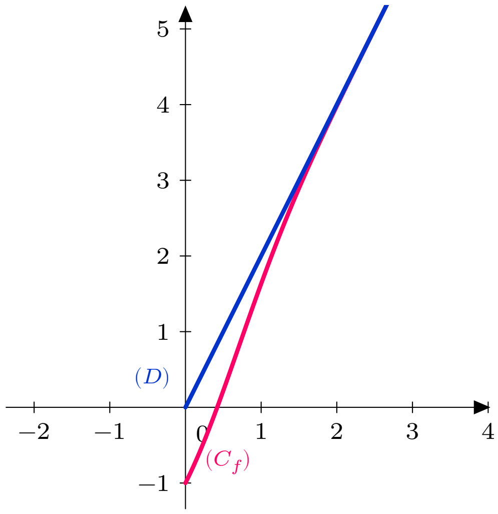
Donc $f(x)<0$

Si $\alpha<x<1$ alors $f(x)>f(\alpha)$, car $f$ est croissante

Donc $f(x)>0$

Et par suite $f$ positive sur $]\alpha;1[$ et $f$ négative sur $]0;\alpha[$ et $f(\alpha)=0$

**0.5 pt** **e)** Traçons la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 0,4$)




**Partie II**:

On considère les deux fonctions $\phi$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x)=x^2-\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\ ; & x>0 \\ \phi(0)=1 \end{cases}$$

**0.5 pt** **1 - a)** Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\,(\exists c \in ]0;x[)\ ;\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-c^2}$

On a $t \to e^{-t^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0;x]$.

Alors elle admet un fonction primitive $h$ sur l'intervalle $[0;x]$ tel que : $h'(x)=e^{-x^2}$

Donc $h$ est continue et dérivable sur $[0;x]$.

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned}
&(\exists c \in ]0;x[) : \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(c).\\
&\Leftrightarrow (\exists c \in ]0;x[) : \frac{1}{x}(h(x)-h(0)) = e^{-c^2}.\\
&\Leftrightarrow (\exists c \in ]0;x[) : \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-c^2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\,(\exists c \in ]0;x[) \;\; ; \;\; \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-c^2}}$$

**0.5 pt** **b)** En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t < 1$

On a $0 < c < x$ donc $-x^2 < -c^2 < 0$. Donc $e^{-x^2} < e^{-c^2} < 1$

D'après le résultat $1)a)$ On obtiens :

$$(\forall x > 0) : \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt < 1$$

$$\boxed{\text{Pour } x = 1 \text{ on obtient } \int_0^1 e^{-t^2}dt < 1.}$$

**0.5 pt** **2 - a)** Montrons que : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha f(t)dt &= \int_0^\alpha \left(2t - e^{-t^2}\right)dt\\
&= 2\int_0^\alpha tdt - \int_0^\alpha e^{-t^2}dt\\
&= \frac{2\alpha^2}{2} - \int_0^\alpha e^{-t^2}dt\\
&= \alpha^2 - \int_0^\alpha e^{-t^2}dt\\
&= g(\alpha).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t)dt.}$$

**0.5 pt** **b)** Montrons que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)$ ; $g'(x) = f(x)$

On a $t \to e^{-t^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0;x]$ avec $x > 0$.

Donc elle admet une fonction primitive $h$ sur l'intervalle $[0;x]$ tel que $h'(x) = e^{-x^2}$.

On a $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car c'est la différence entre deux fonction dérivable $h$ et $x \to x^2$.

On a : $g'(x) = x^2 - h(x) = 2x - e^{-x^2} = f(x)$

**0.5 pt** **c)** Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\beta$ dans l'intervalle $]\alpha; 1[$.

On a $f$ est positive sur $]\alpha; 1[$.

Alors $(\forall x \in ]\alpha; 1[)$ : $\quad g'(x) = f(x) > 0$

Donc $g$ est strictement croissante sur $]\alpha; 1[$.

Alors $g$ est une bijection de l'intervalle $]\alpha; 1[$ vers l'intervalle $]g(\alpha), g(1)[$

On a aussi $f$ est négative sur $[0, \alpha]$

Donc $\forall x \in [0; \alpha] : g'(x) = f(x) < 0$

Alors $g$ est décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

Puisque $\alpha > 0$, alors $g(\alpha) < g(0)$

Donc $g(\alpha) < 0$

De $II)2)b)$ On déduit que : $1 - \int_0^1 e^{-t^2} dt > 0$

Donc $g(1) > 0$

Et par suite $0 \in ]g(\alpha); g(1)[$

Donc 0 admet un seul antécédent $\beta \in ]\alpha, 1[$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet unique solution $\beta \in ]\alpha; 1[$.

**0.5 pt** **3 - a)** Montrons que la fonction $\phi$ est continue à droite en 0.

On a d'après $II)2)a)$ :

$(\forall x > 0)(\exists c \in ]0; x[) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$

Et on a : $\quad 0 < c < x$

Donc $e^{-x^2} < e^{-c^2} < 1$

Alors $e^{-x^2} < \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt < 0; x > 0$.

Donc $e^{-x^2} < \phi(x) < 1$ pour tous $x > 0$.

Puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x^2} = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \phi(x) = 1 = \phi(0)$.

D'où $\phi$ est continue en 0.

**0.5 pt** **b)** En utilisant une intégration par parties, montrons que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \quad \phi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

On a :

$$\phi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x 1e^{-t^2}dt \quad ; \quad x>0.$$

$$\begin{cases} u'=1 \text{ donc} & u=t \\ v=e^{-t^2} \text{ donc} & v'=-2te^{-t^2} \end{cases}$$

$\phi(x)=\frac{1}{x}\left(\left[te^{-t^2}\right]_0^x+2\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt.$

$\boxed{\text{Donc } (\forall x\in\mathbb{R}_+^*) \ ; \ \ \phi(x)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}\,\mathrm{dt}}$

**0.75 pt** **c)** Montrons que la fonction $\phi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$(\forall x\in\mathbb{R}_+^*) \ ; \ \ \phi'(x)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$

Posons $\psi(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ on $\psi'(x)=x^2e^{-x^2}$

$$\phi(x)=e^{-x^2}+\frac{2\psi(x)}{2x}$$

Donc

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=-2xe^{-x^2}+\frac{2x^3e^{-x^2}-2\psi(x)}{x^2}\\ &=-2xe^{-x^2}+2xe^{-x^2}+2xe^{-x^2}-\frac{2}{x^2}\psi(x)\\ &=\frac{-2}{x^2}\psi(x)\\ &=\frac{-2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\end{aligned}$$

$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}_+^*) \ ; \ \ \phi'(x)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}\,\mathrm{dt}}$

**0.5 pt** **d)** Montrons que : $\phi\left([0;1]\right)\subset[0;1]$

On a $(\forall x>0)$ : $\phi'(x)<0$

Donc $\phi$ est décroissante sm $\mathbb{R}_*^+$, en particulier $\phi$ est continue et décroissante sur $[0,1]$.

Soit $x\in[0,1]$, $c$-a-d : $0\leqslant x\leqslant 1$

Donc $\phi(0)\geqslant\phi(x)\geqslant\phi(1)$.

Alors $1\geqslant\phi(x)\geqslant\int_0^2 e^{-t^2}dt>0$

Donc $\varphi(x)\in[0,1]$

$\boxed{\text{D'où } \varphi([0,1])\subset[0,1]}$

**0.5 pt** **4 - a)** Montrons que pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+$ on a : $\int_0^x t^2e^{-t^2}\,\mathrm{dt}\leqslant\frac{x^3}{3}$

On a :

$$\begin{aligned} t^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-t^2} \leqslant 1 \\ \Leftrightarrow t^2 e^{-t^2} \leqslant t^2 \\ \Leftrightarrow \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leqslant \int_0^x t^2 dx \\ \Leftrightarrow \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leqslant \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } (\forall x \in \mathbb{R}^+) : \int_0^x t^2 e^{-t^2}\, \mathrm{dt} \leqslant \frac{x^3}{3}}$$

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $(\forall x \in ]0;1[)$ ; $|\phi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{3}$

On a $0 \leqslant \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leqslant \frac{x^3}{3}$.

Alors $0 \leqslant \left|\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt\right| \leqslant \frac{x^3}{3}$.

Donc $\left|\frac{2}{x^2}\right| \times \left|\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt\right| \leqslant \left|\frac{x^3}{3}\right| \times \left|\frac{2}{x^2}\right|$

On sait que $|\phi(x)| = \left|\frac{2}{x^2}\right| \times \left|\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt\right|$

Donc $|\phi'(x)| \leqslant \frac{2}{3}|x|$

Puisque $0 < x < 1$, alors $|x| < 1$.

$$\boxed{\text{D'où } \forall x \in ]0,1[ : \phi'(x) \leq \tfrac{2}{3}.}$$

**0.25 pt** **c)** Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ ; $\phi(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = 0$

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \phi(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2} dt = x \\ &\Leftrightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt = 0 \\ &\Leftrightarrow g(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \; ; \; \phi(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = 0}$$

**5 -** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{2}{3} \ \texttt{et} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u_{n+1} = \phi(u_n)$$

**0.5 pt** **a)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

Pour $n = 0$ : $u_0 = \frac{2}{3}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$

Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

On a $0 \leqslant u_n \leqslant 1 \Longleftrightarrow u_n \in [0;1]$.

Et on a $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

Donc $\varphi(u_n) = u_{n+1} \in [0,1]$

Alors : $0 \leqslant u_{n+1} < 1$

$\boxed{\text{D'après le principe de démonstration par récurrence : } (\forall x \in \mathbb{N}) : \quad 0 \leqslant U_n \leqslant 1}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $|u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$

On a $\phi$ continue et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ on applique TAF pour $\beta \in \mathbb{R}_*^+$ et $u_n \in \mathbb{R}_*^+$, il existe un $\lambda$ entre $\beta$ et $u_n$ tel que :

$$\frac{\phi(u_n) - \phi(\beta)}{u_n - \beta} = \phi'(\lambda).$$

$$\Leftrightarrow |\varphi(u_n) - \varphi(\beta)| = |\phi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta|$$

$$\Leftrightarrow |u_{n+1} - \beta| = \phi'(\lambda) \cdot |u_n - \beta|$$

(car $\phi(u_n) = u_{n+1}$ et $\phi(\beta) = \beta$).

D'après $II)4)b)$ : $\left(\forall x \in ]0;1[\right) : |\phi'(x)| \leq \frac{2}{3}$. et on a $\lambda \in ]0:1[$, car $u_n, \beta \in ]0;1[$.

Donc $|\phi'(\lambda)| \leqslant \frac{2}{3}$.

Alors : $|\phi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \beta|$.

Donc : $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \beta|$.

$$\begin{aligned} |u_n - \beta| &\leqslant \frac{2}{3}|u_{n-1} - \beta| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}|u_{n-2} - \beta| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \beta| \end{aligned}$$

On a : $\quad 0 < \beta < 1$

$$\Rightarrow -1 < -\beta < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{2}{3} - \beta < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -1 \leqslant \frac{2}{3} - \beta < 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2}{3} - \beta\right| < 1$$

$$\Rightarrow |u_0 - \beta| < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \beta| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\boxed{\text{D'où : } (\forall x \in \mathbb{N}) : |u_x - \beta| \leqslant \left(\tfrac{2}{3}\right)^n}$

**0.5 pt**

**c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

On a $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ or $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$\boxed{\text{D'où } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta.}$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage 2008** Juillet 2008

# MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Nombres complexes** .................... **3,50 points**
— Exercice 2 : **Structures algébriques** .................... **4,00 points**
— Exercice 3 : **Probabilité** .................... **3,00 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .................... **10,00 points**

## Exercice 1 : (3,50 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère l'application $r$ qui associe un point $M(z)$ à un point $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

Et l'application $h$ qui associe un point $M(z)$ à un point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = -2z + 3i$

On pose : $F = h \circ r$

**1.00 pt** **1 -** Déterminer la nature de chacune des deux applications $r$ et $h$ et leurs éléments caractéristiques.

**2 -** On considère les deux points $\Omega(i)$ et $A(a)$ avec $a$ un nombre complexe donné différent de $i$.

On pose : $B = F(A)$ et $C = F(B)$ et $D = F(C)$

**0.50 pt** **a)** Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par l'application $F$ alors :

$$z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$$

**0.25 pt** **b)** Vérifier que $\Omega$ est l'unique point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$

**0.75 pt** **3 - a)** Déterminer en fonction du nombre complexe $a$ les complexes $b$ et $c$ et $d$ les affixes respectives de $B$ et $C$ et $D$.

**0.50 pt** **b)** Montrer que les points $\Omega$ et $A$ et $D$ sont alignés.

**0.50 pt** **c)** Montrer que $\Omega$ est le barycentre du système pondéré $\{(B,4)\,;(C,2)\,;(D,1)\}$.

**0.25 pt** **d)** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point $D$ appartient à l'axe des réels.

## Exercice 2 : (4,00 pts)

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ par une loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \;;\quad x * y = x + y - 3xy$$

**0.25 pt** **1 - a)** Vérifier que : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$ ; $(1-3x)(1-3y) = 1 - 3(x*y)$

**0.75 pt** **b)** Montrer que $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ est un groupe abélien.

**0.50 pt** **2 - a)** Montrer que l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\};*\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^\star;\times) \\ x & \longmapsto & 1-3x \end{array}$ est un isomorphisme.

**0.25 pt** **b)** Montrer que : $\phi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^\star\right) = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$

**0.50 pt** **c)** Montrer que $\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[;*\right)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$.

**3 -** Pour chaque $x$ de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on pose :

$$x^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$$

0.25 pt **a)** Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}\right); (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; ; \;\; \phi\left(x^{(n)}\right) = (\phi(x))^n$

0.50 pt **b)** En déduire $x^{(n)}$ en fonction de $x$ et $n$.

**4 -** On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $\top$ définie par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \;\; ; \;\; x \top y = x + y - \frac{1}{3}$$

0.50 pt **a)** Montrer que $(\mathbb{R};\top)$ est un groupe abélien.

0.50 pt **b)** Montrer que : $(\mathbb{R};\top;*)$ est un corps commutatif.

## Exercice 3 : (2,50 pts)

Un urne contient 4 boules : une boule blanche, 3 boules rouges indiscernables au toucher.
On tire aléatoirement une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet à l'urne.
On répète la même expérience plusieurs fois jusqu'à obtenir pour la première fois deux boules successives de même couleur et on arrête l'expérience.
Soit $X$ la variable aléatoire qui vaut le rang du tirage où on a arrêté l'expérience.

1,00 pt **1 -** Calculer la probabilité des deux événements suivants : $[X = 2]$ et $[X = 3]$.

**2 -** Soit $k$ un entier naturel non nul.

0,75 pt **a)** Montrer que la probabilité de l'événement $[X = 2k]$ est : $P_{2k} = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

0,75 pt **b)** Montrer que la probabilité de l'événement $[X = 2k+1]$ est : $P_{2k+1} = \left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

## Exercice 4 : (10,00 pts)

**Partie I**:

On considère la fonction numérique $f$ définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} \;\; ; \;\; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0.50 pt **1 -** Montrer que la fonction $f$ est continue en 0.

**2 -** Pour tout réel non nul $a$ de l'intervalle $I$, on considère la fonction numérique $h_a$ de variable réelle $x$ définie sur l'intervalle $I$ par :

$$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)\, x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)\, a^2$$

**0.50 pt** **a)** Calculer $h_a(a)$ et $h_a(0)$ puis déduire qu'il existe un réelle $b$ compris entre 0 et $a$ tel que :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

**0.75 pt** **b)** En déduire que la fonction $f$ est dérivable en 0 et que : $f'(0)=-2$

**0.50 pt** **3 - a)** Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $I\setminus\{0\}$ et que :

$$(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}\quad \text{avec}\quad g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$$

**0.50 pt** **b)** Montrer que : $(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\quad g(x)<0$

**0.25 pt** **c)** En déduire les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$.

**0.50 pt** **4 - a)** Calculer les deux limites $\lim\limits_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter les deux résultats obtenus géométriquement.

**0.50 pt** **b)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ de l'intervalle $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$

**0.50 pt** **c)** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha\approx 1,3$)

**Partie II**:

**1 -** On considère la fonction $\phi$ définie sur l'intervalle $I$ par : $\phi(x)=\ln(1+2x)$ et on pose $J=[1;\alpha]$

**0.50 pt** **a)** Montrer que la fonction $\phi$ est dérivable sur l'intervalle $I$ et que :

$$(\forall x\geqslant 1)\ ;\quad 0<\phi'(x)\leqslant\frac{2}{3}$$

**0.75 pt** **b)** Vérifier que : $\phi(\alpha)=\alpha$ et que : $\phi(J)\subset J$

**2 -** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \ln(1+2u_n)\ ;\quad (\forall n\in\mathbb{N})\\ u_0 &= 1\end{cases}$$

**0.50 pt** **a)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad u_n\in J$

**0.50 pt** **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad |u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$

**0.50 pt** **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

**Partie III**:

On considère la fonction numérique $F$ définies sur l'intervalle $I$ par :

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

**0.50 pt** **1 - a)** Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur l'intervalle $I$ puis calculer $F'(x)$

**0.25 pt** **b)** Déduire les variations de la fonction $F$ sur l'intervalle $I$.

**0.50 pt** **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \geqslant 1) \; ; \; F(x) \geqslant \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\,\mathrm{d}t$

**0.50 pt** **b)** Déduire que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

**3 -** On suppose que la fonction $F$ admet une limite finie $l$ à droite en $-\frac{1}{2}$.

On considère la fonction $\tilde{F}$ définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x) \; ; \quad x \in I \\ \tilde{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = l \end{cases}$$

**0.50 pt** **a)** En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in I) \; ; \quad F(x) - l \geqslant f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

**0.50 pt** **b)** Déduire que la fonction $\tilde{F}$ n'est pas dérivable à droite en $-\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques A et B**

**Session : RATTRAPAGE 2008**

MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3 pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application $r$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

Et l'application $h$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_2(z_2)$ tel que :

$$: z_2 = -2z + 3i.$$

On pose : $F = h \circ r$.

1.00 pt **1 - Déterminer la nature de chacune des applications $r$ et $h$ et leurs caractéristiques.**

**Première méthode :**

Nous partons de l'écriture : $r(M) = M_1$

$$\begin{aligned}
r(M) = M_1 \Leftrightarrow \quad & z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
\Leftrightarrow \quad & z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i - \frac{1}{2}i\right) \\
\Leftrightarrow \quad & z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z + i - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
\Leftrightarrow \quad & z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z + e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{5\pi}{6}} \\
\Leftrightarrow \quad & z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} z - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}} \\
\Leftrightarrow \quad & z_1 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} z - e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + e^{i\frac{\pi}{2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(z_1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(z - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & (z_1 - i) = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - i) \\
\Leftrightarrow \quad & \overrightarrow{VM_1} = e^{i\frac{\pi}{3}} \overrightarrow{VM}
\end{aligned}$$

Ainsi : $r$ est la rotation dont le centre est $V(i)$ et l'angle est $\frac{\pi}{3}$.

**Deuxième méthode :**

**l'expression Complexe de $r$ est de la forme $z_1 = az + b$ tels que : $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.**

On a : $\begin{cases} a \in \mathbb{C}^*\backslash\{1\} \\ |a| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1. \end{cases}$

Donc $r$ est une rotation d'angle $\arg(a)$ et de centre $V\left(\frac{b}{2-a}\right)$.

Avec : $$\begin{cases} \arg(a) \equiv \arg\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)[2\pi] \\ \qquad\quad \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \\ \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}{-i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{-i} = i \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{r \text{ est la rotation dont le centre est } V(i) \text{ et l'angle est } \frac{\pi}{3}.}$

**l'expression Complexe de $h$ est de la forme $z_2 = az + b$ avec $a = -2$ et $b = 3i$.**

**Première méthode :**

On a : $a \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$ donc $h$ est une homothétie de rapport $a = -2$ et de centre $W\left(\frac{b}{1-a}\right)$, Avec $\frac{b}{1-a} = \frac{3i}{1+28} = i$

**Deuxième méthode :**

On a :

$$\begin{aligned} h(M) = M_2 \Leftrightarrow &\quad z_2 = -2z + 3i \\ \Leftrightarrow &\quad z_2 = -2z + 2i + i \\ \Leftrightarrow &\quad z_2 = -2(z-i) + i \\ \Leftrightarrow &\quad (z_2 - i) = -2(z-i) \\ \Leftrightarrow &\quad \overrightarrow{VM_2} = -2\overrightarrow{VM} \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{h \text{ est une homothétie le centre de } V(i) \text{ et son rapport est : } -2.}$

**2 -** On considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$ tel que $a$ est un complexe donné différent de i. On pose : $B = F(A), C = F(B)$ et $D = F(C)$.

**0.5 pt** $a)$ **Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'application $F$ alors**

$$z' - i = 2e^{\frac{i4\pi}{3}}(z-i)$$

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend left, "F = h \circ r"] & M_1 \arrow[r, "h"] & M' \\ z \arrow[r, mapsto] & z_1 \arrow[r, mapsto] & z' \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \text{On a :} r(M) = M_1 \Leftrightarrow &\ z_1 - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i) \\ \Leftrightarrow &\quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i) + i \end{aligned}$$

Nous avons aussi : $$\begin{aligned} h(z_1) = z' \Leftrightarrow &\quad (z'-i) = -2(z_1 - i) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (z'-i) = -2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i) \\ z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i) + i \end{cases} \end{aligned}$$

De plus on a :
$$\begin{aligned} -e^{i\frac{\pi}{3}} &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad : \quad , \\ &= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{(z'-i) = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z-i)}$

**0.25 pt**

*b*) **Vérifier que $\Omega$ est le seul point vérifiant $F(\Omega)=\Omega$.**

D'après la question $2-(a)$, On a :

$$\begin{aligned} &M \longrightarrow M' \\ &z \longrightarrow z' = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z-i)+i \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation :$F(M)=M$

On a :
$$\begin{aligned} F(M)=M \Leftrightarrow \quad & z\left(2e^{\frac{4i\pi}{3}}-1\right) = 2ie^{\frac{4i\pi}{3}} - i \\ \Leftrightarrow \quad & z\left(2e^{\frac{4i\pi}{3}}-1\right) = i\left(2e^{\frac{4i\pi}{3}}-1\right) \\ \Leftrightarrow \quad & z = i \\ \Leftrightarrow \quad & M \equiv \Omega \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\Omega \text{ est le seul point qui satisfait } F(M)=M}$

**0.75 pt**

**3 -** *a*) **Déterminer en fonction du nombre complexe $a$, les nombres complexes $b$, $c$ et $d$ d 'affixes respectifs des points $B, C$ et $D$.**

$$\begin{aligned} F(A)=B &\Leftrightarrow z_B - i = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z_A - i) \\ &\Leftrightarrow b = 2e^{\frac{4i\pi}{3}}(a-i)+i \\ &\Leftrightarrow b = 2\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a-i)+i \\ &\Leftrightarrow b = (1+i\sqrt{3})(i-a)+i \\ &\Leftrightarrow b = i - a - \sqrt{3} - a\sqrt{3}i + i \\ &\Leftrightarrow b = -(a+\sqrt{3}) + i(2-a\sqrt{3}) \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{b = -(a+\sqrt{3}) + i(2-a\sqrt{3}).}$

**Et de la même manière, en partant des équations $F(B)=C$ et $F(C)=D$ Nous obtenons :**

$\boxed{z_C = c = 2(\sqrt{3}-a) + i(2a\sqrt{3}+3).}$ Et $\boxed{z_D = d = 8a - 7i.}$

**0.25 pt**

*b*) **Montrer que les points $\Omega, A$ et $D$ sont alignés.**

On a :
$$\begin{aligned} \frac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A} = \frac{i-a}{8a-7i-a} = \frac{-1}{7} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \quad & (z_\Omega - z_A) = \frac{-1}{7}(z_D - z_A) \\ \Leftrightarrow \quad & \overrightarrow{A\Omega} = \frac{-1}{7}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\text{les points } \Omega, A \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$

**0.5 pt** *c)* **Montrer que le point $\Omega$ est le barycentre du système pondéré $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$.**

On a :

$$\frac{4\times z_B+2\times z_C+1\times z_D}{4+2+1}=\frac{4z_B+2z_C+z_D}{7}=\frac{7i}{7}=z_\Omega$$

D'où : $\boxed{\text{le point } \Omega \text{ est le barycentre du système pondéré : } \{(B,4);(C,2);(D,1)\}.}$

**0.25 pt** *d)* **Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point $D$ appartienne à l'axe des réels (des abscisses).**

Partant du fait que $D$ est un point sur l'axe réel.
Posons $a=x+iy$.
Nous avons :

$$\begin{aligned} z_D\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow \quad (8a-7i)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \quad 8x+i(8y-7)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow y=\frac{7}{8} \end{aligned}$$

Ainsi : l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels le point $D$ appartient à l'axe réel forme une droite parallèle à l'axe réel. $\boxed{\text{Son équation est : } y=\frac{7}{8}}$

## Exercice 2 : (4 pts)

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ par une loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)\,;x*y=x+y-3xy$$

**0.25 pt** **1 -** *a)* **Vérifier que : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)\,;(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$.**

Soient $x$ et $y$ deux élément de $\mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned} 1-3(x*y)&=1-3(x+y-3xy)\\ &=1-3x-3y+9xy\\ &=(1-3x)-3y(1-3x)\\ &=(1-3x)(1-3y) \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)\,;(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)}$

**0.75 pt** *b)* **Montrer que $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ est un groupe abélien.**

**Loi de composition interne**

Soient $x$ et $y$ deux éléments de $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$, alors :

$$\begin{aligned} x\neq\frac{1}{3}\quad,\quad y\neq\frac{1}{3} &\Leftrightarrow \quad (1-3x)\neq 0\quad,\quad (1-3y)\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad (1-3x)(1-3y)\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad 1-3(x*y)\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad (x*y)\neq\frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow \quad (x*y)\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{* \text{ est une loi de composition interne dans } \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}.}$

**Associativité**

Soient $x$, $y$ et $z$ trois éléments de l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ :

$$\text{On a : } \quad \begin{aligned} x*(y*z) &= x*(y+z-3yz) \\ &= x+(y+z-3yz)-3x(y+z-3yz) \\ &= x+y+z-3yz-3xy-3xz+9xyz \end{aligned}$$

$$\text{Et on a : } \quad \begin{aligned} (x*y)*z &= (x+y-3xy)*z \quad , \\ &= (x+y-3xy)+z-3z(x+y-3xy) \\ &= x+y+z-3yz-3xy-3xz+9xyz \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{* \text{ est une loi associative}}$

**Commutativité**

$$\text{On a : } \quad \begin{aligned} x*y &= x+y-3xy \\ &= y+x-3yx \\ &= y*x \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{* \text{ commutatif dans } \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}}$

**L'élément neutre :**

Soit $e$ l'élément neutre : $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}; \quad x*e=e*x=x &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}; \quad x+e-3xe=x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}; \quad e(1-3x)=0 \\ &\Leftrightarrow e=0 \end{aligned}$$

**L'élément symétrique :**

Soit $x'$ le symétrique de $x$ par rapport à la symétrie :

$$\begin{aligned} x*x'=x'*x=e &\Leftrightarrow \quad x+x'-3xx'=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x'(1-3x)=-x \\ &\Leftrightarrow \quad x'=\frac{-x}{(1-3x)} \end{aligned}$$

Et puisque :

$$\begin{aligned} 1\neq 0 &\Rightarrow 1-3x \neq -3x \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{1-3x} \neq \frac{-1}{3x} \\ &\Rightarrow \frac{-x}{1-3x} \neq \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \frac{-x}{1-3x} \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\text{tout élément } x \text{ de } \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} \text{ possède un symétrique } x'=\frac{-x}{1-3x}}$

En résumé : $\boxed{\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right) \text{ est un groupe abélien}}$

**0.5 pt** **2 -** $a)$ **Montrer que l'application** $\begin{array}{rcl}\phi : \left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^{\star};\times) \\ x & \longmapsto & 1-3x\end{array}$ **est un isomorphisme.**

On a : $\varphi(x*y) = \underbrace{1-3(x*y) = (1-3x)(1-3y)}_{\text{d'après la question } 1-a)} = \varphi(x)\times\varphi(y)$

Donc : $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right) \text{ vers } (\mathbb{R}^{*};\times).}$

**0.25 pt** $b)$ **Montrer que :** $\phi^{-1}\left(\mathbb{R}_{+}^{\star}\right) = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$**.**

Soit $y$ un élément de $\mathbb{R}^{*}$

L'équation : $\phi(x) = y$ admet une unique solution $x = \frac{1-y}{3}$, donc $\phi$ est bijective de $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ vers $(\mathbb{R}^{*};\times)$ et sa bijection réciproque est donnée par :

$$\begin{array}{rrcl}\phi^{-1}: & (\mathbb{R}^{*};\times) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{3}\right\};*\right) \\ & y & \longrightarrow & \dfrac{1-y}{3}\end{array}$$

$\phi$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ En effet : $\phi'(x) = -3 < 0$ .

Donc : $\phi^{-1}$ est aussi décroissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\phi^{-1}\left(\mathbb{R}_{+}^{*}\right) &= \phi^{-1}]0;+\infty[ \\ &= \left]\lim_{y\to+\infty}\phi^{-1}(y);\phi^{-1}(0)\right[ \\ &= \left]\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{y}{3}\right);\frac{1}{3}\right[ \\ &= ]-\infty;\frac{1}{3}[\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\phi^{-1}\left(\mathbb{R}_{+}^{\star}\right) = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[}$

**0.5 pt** $c)$ **Montrer que** $(\,]-\infty;\frac{1}{3}[;*)$ **est un sous-groupe de** $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$**.**

Soient $x$ et $y$ deux éléments de $]-\infty;\frac{1}{3}[\subset\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$\begin{aligned}x*y' &= x*\left(\frac{-y}{1-3y}\right) \\ &= x-\frac{y}{1-3y}+\frac{3xy}{1-3y} \\ &= \frac{x(1-3y)-y+3xy}{1-3y} \\ &= \frac{x-y}{1-3y}\end{aligned}$$

Puisque $x$ et $y$ sont des éléments de $]-\infty;\frac{1}{3}[$ Alors :$(1-3x)>0, et \quad 3x-3y<1-3y$.

En multipliant les deux côtés de l'inéquation $3x-3y<1-3y$ par le nombre positif $\frac{1}{(1-3y)}$ On trouve :

$$\begin{aligned}\frac{3x-3y}{1-3y}<1 &\Leftrightarrow \frac{x-y}{1-3y}<\frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{x-y}{1-3y}\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[ \\ &\Leftrightarrow x*y'\in]-\infty;\frac{1}{3}[\end{aligned}$$

D'où $\boxed{(]-\infty;\frac{1}{3}[;*) \text{ est un sous groupe du groupe } \left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)}$

**3 -** Pour chaque $x$ de l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on pose :

$$x^{(0)} = 0 \text{ et } x^{(n+1)} = x^{(n)}*x$$

**0.25 pt**

*a)* **Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{1}{3}\right\}\right); (\forall n \in \mathbb{N}); \phi\left(x^{(n)}\right) = (\phi(x))^n$.**

Soit $x$ un élément de $\mathbb{R}\backslash \left\{\frac{1}{3}\right\}$ et $n$ un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned}\phi\left(x^{(n)}\right) = \phi(\underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}) &\Leftrightarrow \phi\left(x^{(n)}\right) = \phi(x) \times \phi(x) \times \cdots \times \phi(x)\\ &\Leftrightarrow \phi\left(x^{(n)}\right) = (\phi(x))^n\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\left(\forall x \in \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{1}{3}\right\}\right); (\forall n \in \mathbb{N}); \phi\left(x^{(n)}\right) = (\phi(x))^n.}$

**0.5 pt**

*b)* **En déduire $x^{(n)}$ en fonction de $x$ et $n$.**

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\phi\left(x^{(n)}\right) = (\phi(x))^n &\Leftrightarrow 1 - 3x^{(n)} = (1-3x)^n\\ &\Leftrightarrow x^{(n)} = \frac{1-(1-3x)^n}{3}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{x^{(n)} = \frac{1-(1-3x)^n}{3}}$

**4 -** On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $\top$ définie par :

$$\left(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2\right); x \top y = x + y - \frac{1}{3}$$

**0.5 pt**

*a)* **Montrer que $(\mathbb{R}; \top)$ est un groupe abélien.**

On a $T$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}$, en effet $\forall x, y \in \mathbb{R}$; $\quad x + y - \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

- **La loi $T$ est commutative.** En effet : $+$ est commutative dans $\mathbb{R}$
- **La loi $T$ est associative.** En effet :

$$\begin{aligned}xT(yTz) &= xT\left(x + y - \frac{1}{3}\right)\\ &= x + x + y - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\\ &= (xTy)\ \mathrm{T}\ z\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{T \text{ est une loi associative dans } \mathbb{R}}$

•**L'élément neutre**

Soit $e$ l'élément neutre de $T$ dans $\mathbb{R}$

On a :

$$\begin{aligned}xTe = eTx = x &\Leftrightarrow \quad x + e - \frac{1}{3} = x\\ &\Leftrightarrow \quad e = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\text{L'élément neutre est : } e = \frac{1}{3}.}$

•**L'élément symétrique**

Soit $x$ un élément de $\mathbb{R}$ et $x'$ son symétrique par rapport

$$\begin{aligned}x\ \mathrm{T}\ x' = x'Tx = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \quad x + x' - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow \quad x' = \left(\frac{2}{3} - x\right) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\text{tout élément } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ possède un symétrique } x' = \left(\frac{2}{3} - x\right)}$

En résumé : $\boxed{(\mathbb{R}; T) \text{ est un groupe abélien}}$

0.5 pt

*b*) **Montrer que : $(\mathbb{R}; \top; *)$ est un corps commutatif.**

Soient $x$, $y$ et $z$ trois éléments de $\mathbb{R}$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} x * (y \top z) &= x * \left(y + z - \frac{1}{3}\right) \\ &= 2x + y + z - 3(xy + xz) - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Et d'autre part on a :

$$\begin{aligned} (x * y) \top (x * z) &= (x + y - 3xy) \top (x + z - 3xz) \\ &= 2x + y + z - 3(xy + xz) - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nous concluons donc que : $x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z)$

Ainsi : $\boxed{\text{la loi } * \text{ est distributive sur la loi } T}$

De plus $(\mathbb{R}, T)$ et $\left(\mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{3}\}; *\right)$ sont deux groupe commutatifs

Par conséquent : $\boxed{(\mathbb{R}, T, *) \text{ est un corps commutatif.}}$

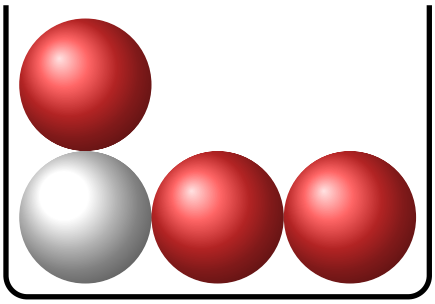
## Exercice 3 : (2,5 pts)

Un urne contient 4 boules : une boule blanche, 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire aléatoirement une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet à l'urne. On répète la même expérience plusieurs fois jusqu'à obtenir pour la première fois deux boules successives de même couleur et on arrête l'expérience. Soit $X$ la variable aléatoire qui vaut le rang du tirage où on a arrêté l'expérience.

**Explication :**

L'expérience consiste à tirer une boule, noter sa couleur, puis la remettre dans l'urne. On répète cette expérience jusqu'à l'obtention de deux boules consécutives de même couleur, puis on arrête le tirage.

Soit $X$ la variable aléatoire égale au rang où l'expérience s'est arrêtée.



1 pt

**1 - Calculer la probabilité des deux événements suivants : $[X = 2]$ et $[X = 3]$.**

Pour réaliser l'événement $[X = 2]$, il faut tirer :

" **une boule blanche au $1^{\text{er}}$ tirage et une boule blanche au $2^{\text{ème}}$ tirage**"

**OU**

" **une boule rouge au $1^{\text{er}}$ tirage et une boule rouge au $2^{\text{ème}}$ tirage.**"

Donc,

$$\begin{aligned} P([X=2]) &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} \\ &= \frac{10}{16} \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{P([X=2])=\frac{5}{8}.}$

Pour réaliser l'événement $[x=3]$, il faut tirer :

**" une boule blanche au $1^{\text{er}}$ tirage, une boule rouge au $2^{\text{ème}}$ tirage et une boule rouge au $3^{\text{ème}}$ tirage "**

**OU**

**" une boule rouge au $1^{\text{er}}$ tirage, une boule blanche au $2^{\text{ème}}$ tirage et une boule blanche au $3^{\text{ème}}$ tirage."**

Donc :

$$\begin{aligned} P([X=3]) &= \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{64}+\frac{3}{64} \\ &= \frac{12}{64} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{P[X=3]=\frac{3}{16}}$

**2 -** Soit $k$ un entier naturel non nul.

**0.75 pt** *a)* **Montrer que la probabilité de l'événement $[X=2k]$ est : $P_{2k}=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$.**

Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

Pour réaliser l'affinement $[x=2k]$, il faut effectuer $(2k)$ fois le tirage dont les issues jusqu'au $(2k-2)^{\text{ème}}$ tirage sont toutes des couleurs distinctes deux à deux, et les tirages de rang $2k-1$ et $2k$ sont de même couleur.

On peut donc schématiser les cas pour :

$$\underbrace{B_1 \quad R_2 \quad B_3 \quad R_4 \ldots\ldots R_{2k-2}}_{\text{Les boules consécutive sont distinctes}} \quad B_{2k-1}B_{2k}$$

**OU**

$$\underbrace{R_1 \quad B_2 \quad R_3 \quad B_4 \ldots\ldots B_{2k-2}}_{\text{Les boules consécutive sont distinctes}} \quad R_{2k-1}R_{2k}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_{2k} &= \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\cdots\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}. \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{2} \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}\times\frac{1}{16}+\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}\times\frac{9}{16} \\ &= \left(\frac{1}{16}+\frac{9}{16}\right)\times\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \\ &= \frac{10}{16}\times\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \\ &= \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{P_{2k} = \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}}$

0.75 pt

$b)$ **Montrer que la probabilité de l'événement $[X = 2k+1]$ est : $P_{2k+1} = \left(\frac{3}{16}\right)^k$.**

Comme précédemment on schématise l'événement : $[X = 2k+1]$ par :

$$B_1 \quad R_2 \quad B_3 \quad R_4 \dots \dots B_{2k-1} \quad R_{2k} \quad B_{2k+1}$$

**OU**

$$R_1 \quad B_2 \quad R_3 \quad B_4 \dots \dots R_{2k-1} \quad B_{2k} \quad R_{2k+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_{2k+1} &= \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^k \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^k \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^k \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{16}\right)^k \times \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^k \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^k \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{P_{2k+1} = \left(\frac{3}{16}\right)^k.}$

## Exercice 4 : (10 pts)

### Partie I

On considère la fonction numérique $f$ définie sur l'intervalle $I = ]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

et soit $\left(\mathcal{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0.5 pt

**1 - Montrer que la fonction $f$ est continue en $0$ .**

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) \\ &= \lim_{\substack{u \to 1 \\ u = 1+2x}} \left(\frac{2 \ln u}{u-1}\right) \\ &= 2 \lim_{u \to 1} \left(\frac{\ln u - \ln 1}{u-1}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{1}\right) = 2 = f(0) \end{aligned}$$

En effet : Pour tout $x_0 > 0$, on a : $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}\right) = \ln'(x_0) = \frac{1}{x_0}$

D'où : $\boxed{f \text{ est une fonction continue au point zéro.}}$

**2 -** Pour tout réel non nul $a$ de l'intervalle $I$, on considère la fonction numérique $h_a$ de variable réelle $x$ définie sur l'intervalle $I$ par :

$$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$$

0.5 pt

$a)$ **Calculer $h_a(a)$ et $h_a(0)$ puis déduire qu'il existe un réelle $b$ compris entre $0$ et $a$ tel que :**

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

$$h_a(a) = (\ln(1+2a)-2a)a^2 - (\ln(1+2a)-2a)a^2 = 0$$
$$h_a(0) = -(\ln(1))a^2 = 0$$

Et comme $h_a$ est une fonction continue et dérivable sur $[0,a]$ et $h_a(0) = h_a(a)$,
Alors d'après le théorème de Rolle il excite un réel de $[0,a]$ tel que $h'_a(b) = 0$.
Donc :

$$\begin{aligned} h'_a(b) = 0 &\Leftrightarrow 2(\ln(1+2a)-2a)b = a^2\left(-2+\frac{2}{1+2b}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b} \end{aligned}$$

0.75 pt

$b)$ **En déduire que la fonction $f$ est dérivable en 0 et que : $f'(0) = -2$**

On a : $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}\right) : \\ = \lim_{\substack{a\to 0\\ a=x}}\left(\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}\right)$$

• Selon la question $2-a)$,le nombre $b$ est lié à $a$ de telle manière que : $a < b < 0$ et

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b},$$

• Si $a$ tend vers zéro, alors $b$ tend également vers zéro cela est dû à l'encadrement : $0 < b < 0$
Par conséquent, la limite devient :

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}\right) = \lim_{b\to 0}\left(\frac{-2}{1+2b}\right) = -2 \in \mathbb{R}$$

donc : $\boxed{f \text{ est dérivable en zéro et on a :} f'(0) = -2}$

0.5 pt

**3 -** $a)$ **Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $I\backslash\{0\}$ et que :**

$$(\forall x \in I\backslash\{0\}); \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)} \quad \textbf{avec} \quad g(x) = 2x-(1+2x)\ln(1+2x)$$

• On a : $x \mapsto \ln(1+2x)$ est dérivable sur $I$ comme composée de deux fonctions dérivables.
• La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $I\backslash\{0\}$.
D'où : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } I\backslash\{0\}}$

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{\frac{2x}{1+2x}-\ln(1+2x)}{x^2}\right) &\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right) \\ &\Leftrightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)} \end{aligned}$$

0.5 pt

$b)$ **Montrer que : $(\forall x \in I\backslash\{0\}); g(x) < 0$.**
On a $g$ une fonction définie, continue et dérivable sur $I$.
Et on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2-\left(2\ln(1+2x)+\frac{2(1+2x)}{(1+2x)}\right) \\ &= -2\ln(1+2x). \end{aligned}$$

D'où $\begin{cases} g'(x) = 0 & \text{si : } x = 0. \\ g'(x) < 0 & \text{si : } x > 0. \\ g'(x) > 0 & \text{si : } x < 0 \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{-1}{2}^+} g(x) &= \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} 2x - (1+2x)\ln(1+2x) \\ &= -1 - \lim_{x \to \frac{-1}{2}^+} (1+2x)\ln(1+2x) \\ &= -1 - \lim_{\substack{u \to 0^+ \\ u = 1+2x}} u\ln(u) \\ &= -1 - 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} g(x) &= \lim_{x \to +\infty} 2x - (1+2x)\ln(1+2x) \\ &= \lim_{x \to +\infty} x\left(2 - \left(\frac{1}{x} + 2\right)\ln(1+2x)\right) \\ &= (+\infty)(-\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

D'où le tableau de variation de la fonction $g$ :

| $x$ | $\frac{-1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | -1 | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Le tableau ci-dessus indique que la fonction $g$ admet la valeur 0 comme valeur maximale.
Donc : $(\forall x \in I)\,;\, g(x) \leq 0$ d'où : $\boxed{(\forall x \in I\backslash\{0\})\,;\, g(x) < 0}$

0.25 pt c) **En déduire les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$.**
Le signe de $f'$ sur $I\backslash 0$ et celui de $g$ **(Car :**$(\forall x \in I\backslash 0)$**;** $x^2(1+2x) > 0$ **)** et puisque $(\forall x \in I\backslash 0)\,;\, g(x) < 0$, alors : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } I\backslash 0.}$
En résumé on a le tableau suivant :

| $x$ | $\frac{-1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $x^2(1+2x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

0.5 pt **4 -** a) **Calculer les deux limites $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter les deux résultats obtenus géométriquement.** On a :

$$\lim_{x \to \frac{-1}{2}^+} f(x) = \lim_{\substack{u \to 0^+ \\ u = 2x+1}} \left(\frac{2\ln u}{u-1}\right) = +\infty$$

En effet : $\begin{cases} \lim\limits_{u\to 0^+} 2\ln u = -\infty. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} u-1 = -1 \end{cases}$

Donc : $\boxed{\text{la droite d'équation } x = \frac{-1}{2} \text{ est une asymptote verticale de } C_f.}$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{\substack{u\to+\infty \\ u=2x+1}} \left(\frac{2\ln u}{u-1}\right) : \\ &= \lim_{u\to+\infty} 2\left(\frac{\ln u}{u}\right)\left(\frac{u}{u-1}\right) = 0 \end{aligned}$$

En effet : $\begin{cases} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{\ln u}{u} = 0. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{u}{u-1} = 1 \end{cases}$

Donc : $\boxed{\text{l'axe des abscisses est une asymptote au voisinage de } +\infty.}$

**0.5 pt** $b)$ **Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ de l'intervalle $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$**

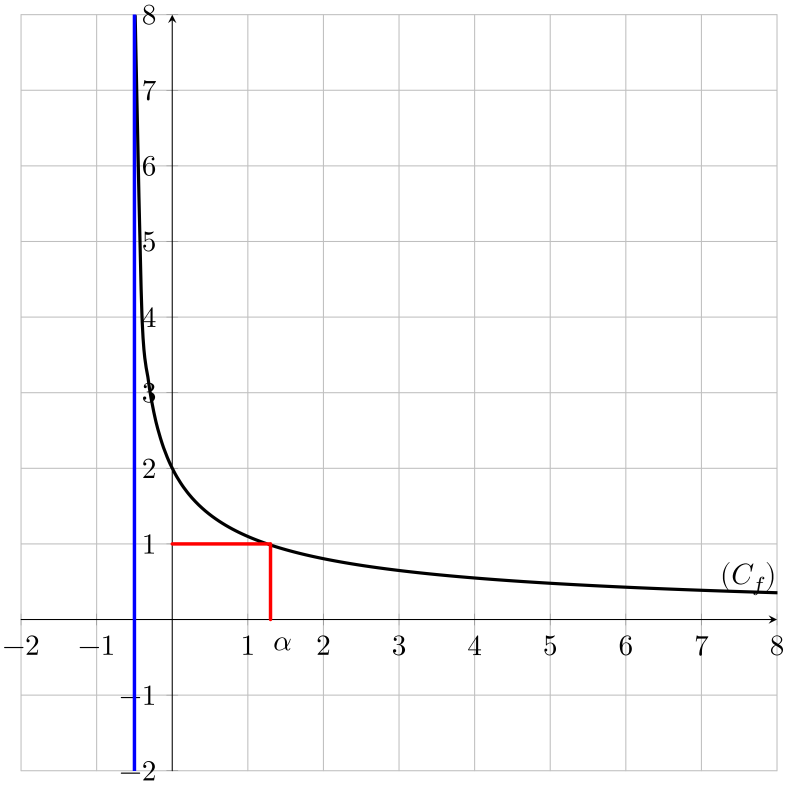
• On a la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\frac{1}{2};+\infty[$ donc elle est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;2]$ **(Car :** $[1;2] \subset ]-\frac{1}{2};+\infty[$ **)**

Donc $f$ est une bijection de $[1;2]$ vers $[f(2);f(1)]$.

Or $\begin{cases} f(2) = 0,8 \\ f(1) = 1,1 \\ 1 \in [0.8;1.1] \end{cases}$ Alors : le nombre réel 1 admet antécédent $\alpha$ dans l'intervalle $[1;2]$.

Autrement-dit : $\boxed{(\exists!\alpha \in [1;2])/f(\alpha) = 1}$

**0.5 pt** $c)$ **Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 1,3$ )**




**Partie II**

**1 -** On considère la fonction $\phi$ définie sur l'intervalle $I$ par : $\phi(x) = \ln(1+2x)$ et on pose $J = [1;\alpha]$

**0.5 pt** *a)* **Montrer que la fonction $\phi$ est dérivable sur l'intervalle $I$ et que :**

$$(\forall x \geqslant 1); \quad 0 < \phi'(x) \leqslant \frac{2}{3}$$

La fonction $\phi$ est la composée de deux fonctions ($x \longmapsto 2x+1$ et $x \longmapsto \ln(x)$) dérivables sur $I$. Donc : $\boxed{\text{la fonction } \phi \text{ est dérivable sur } I.}$
Et on a :

$$\phi'(x) = \frac{2}{1+2x}$$

On a :

$$\begin{aligned} 1 \leq x &\Leftrightarrow 6 \leq 2(1+2x) \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{1+2x} \leq \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \phi'(x) \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} x \in I &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \\ &\Leftrightarrow 0 < 1+2x \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{1+2x} \\ &\Leftrightarrow 0 < \phi'(x) \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(\forall x \geq 1); \quad 0 < \phi'(x) \leq \frac{2}{3}}$

**0.75 pt** *b)* **Vérifier que : $\phi(\alpha) = \alpha$ et que : $\phi(J) \subset J$.**
D'après la question : $4-b)$ dans $\boxed{\textbf{la Partie I}}$ On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 1 &\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad \phi(\alpha) = \alpha \end{aligned}$$

Et nous avons : $\phi'(x) = \frac{2}{1+2x}$ donc : $\phi$ est une fonction strictement croissante sur $I$

$$\phi([1;\alpha]) = [\phi(1);\phi(\alpha)] = [\ln 3;\alpha] \subset \underbrace{[\ln 3;\alpha] \subset [1,1;\alpha]}_{\text{Car : } \ln(3) \approx 1,1} \subset [1;\alpha]$$

D'où : $\boxed{\phi(J) \subset J}$

**2 -** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \ln(1+2u_n); \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 &= 1 \end{cases}$$

**0.5 pt** *a)* **Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $u_n \in J$**
En utilisant un raisonnement par récurrence, on a :
• Pour $n = 0$ on a : $U_0 = 1 \in [1,\alpha] = J$
• Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $u_n \in J$ et Montrons que $u_{n+1} \in J$.
Or : $\begin{cases} u_{n+1} = \phi(u_n) \\ \phi(J) \subset J \\ u_n \in J \end{cases}$ donc $U_{n+1} \in J$ d'où : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in J}$

**0.5 pt** $b)$ **Montrer que :** $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

On a la fonction $\phi$ est dérivable sur l'intervalle I On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[u_n, \alpha] \subset I$.

D'où l'existence d'un nombre réel $c \in ]u_n; \alpha[$ tel que :

$$\frac{\phi(u_n) - \phi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \phi'(c)$$

Ce qui implique que :

$$\left|\frac{\phi(u_n) - \phi(\alpha)}{u_n - \alpha}\right| = |\phi'(c)| \Rightarrow |\phi(u_n) - \phi(\alpha)| = |\phi'(c)|\,|u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$$

$$\text{En effet : } \begin{cases} 1 \leqslant u_n < c \\ (\forall x \geqslant 1); \quad 0 < \phi'(x) \leqslant \frac{2}{3} \end{cases}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_n - \alpha| &\leq \frac{2}{3}|u_{n-1} - \alpha| \\ &\leq \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}|u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}|u_{n-3} - \alpha| \\ &\ \vdots \quad \vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{En effet : } \begin{cases} & u_0 = 1 \\ \alpha > 0 & \Longrightarrow 1 - \alpha < 1 \\ & \Longrightarrow |1 - \alpha| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

**0.5 pt** $c)$ **En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.**

Puisque : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ $\left(\text{Car : } 0 < \frac{2}{3} < 1\right)$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha.}$

## Partie III

On considère la fonction numérique $F$ définies sur l'intervalle $I$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

**0.5 pt** **1 -** $a)$ **Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur l'intervalle $I$ puis calculer $F'(x)$.**

D'après les questions précédentes, on a : $f$ une fonction continue sur $I$ donc $f$ continue sur un intervalle de la forme $[0, x]$ avec $x \in I$.

d'où : $\boxed{F \text{ est dérivable sur } I\text{, et on a : } \quad F'(x) = f(x)}$

**0.25 pt** $b)$ **Déduire les variations de la fonction $F$ sur l'intervalle $I$.**

On sait que : $(\forall x \in I) \quad f(x) > 0$ donc : $(\forall x \in I) \quad F'(x) > 0$.

d'où : $\boxed{F \text{ est strictement Croissante sur } I}$

**0.5 pt** **2 -** $a)$ **Montrer que :** $(\forall x \geqslant 1);\quad F(x) \geqslant \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\, dt$.

On a :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 1 &\implies 2t+1 > t \\ &\implies \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t+1}. \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 1 &\implies 2t+1 > 3 > 1 \\ &\implies \ln(2t+1) > 0. \end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'inéquation $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t+1}$ par le nombre positif $\ln(2t+1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2t+1)}{t} \geq \frac{\ln(2t+1)}{2t+1} &\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{t}\right) dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt \\ &\Rightarrow \int_1^x f(t)dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt \\ &\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt}_{=F(x)} - \int_0^1 f(t)dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt \\ &\Rightarrow F(x) - \int_0^1 f(t)dt \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt. \end{aligned}$$

Or $f$ est continue et positif sur $[0;1]$ ; alors $\int_0^1 f(t)dt \geq 0$.

D'où : $\boxed{(\forall t \geq 1); F(x) \geq \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt.}$

**0.5 pt** $b)$ **Déduire que :** $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

On a :

$$\begin{aligned} [(\ln(1+2t))^2]' = \frac{4\ln(1+2t)}{(1+2t)} &\implies \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)}\right) dt = \frac{1}{4}\left[(\ln(1+2t))^2\right]_1^x \\ &\implies \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{(1+2t)}\right) dt = \frac{1}{4}\left((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2\right) \end{aligned}$$

Or : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\left((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2\right)\right) = +\infty \\ (\forall x \geq 1); \quad \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt \leq F(x) \end{cases}$ Donc : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

**3 -** On suppose que la fonction $F$ admet une limite finie $l$ à droite en $-\frac{1}{2}$. On considère la fonction $\tilde{F}$ définie sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x); & x \in I \\ \tilde{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = l \end{cases}$$

**0.5 pt** $a)$ **En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :**

$$(\forall x \in I);\quad F(x) - l \geqslant f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Soit $x \in I$, on a $F$ est dérivable sur et comme $\tilde{F}$ et le prolongement par continuité de $F$ en $\frac{-1}{2}$, alors on a :

- $\tilde{F}$ est continue sur $[\frac{-1}{2}; x]$.
- $\tilde{F}$ est dérivable sur $]\frac{-1}{2}; x[$. donc d'après le théorème des accroissements finis, On a :

$$\exists c \in \left]\frac{-1}{2}; x\right[; \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \tilde{F}'(c). \Leftrightarrow \quad \exists c \in \left]\frac{-1}{2}; x\right[; \quad \frac{F(x) - \ell}{x + \frac{1}{2}} = f(c).$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in \left]\frac{-1}{2}; x\right[; \quad (F(x) - \ell) = f(c)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

D'autre part, on a : $c \in \left]-\frac{1}{2}, x\right[$ donc $c < x$. Ce qui implique que $f(x) \leq f(c)$ car $f$ est strictement décroissante.
Donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[; \quad \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x) < \left(x + \frac{1}{2}\right) f(c)$.
Puisque $\exists c \in \left]-\frac{1}{2}, x\right[; \quad (F(x) - l) = f(c)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Alors : $\boxed{(\forall x \in I); \quad F(x) - l \geqslant \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x).}$

**0.5 pt**

$b)$ **Déduire que la fonction $\tilde{F}$ n'est pas dérivable à droite en $-\frac{1}{2}$.**

D'après la question précédente on a : $(\forall x \in I)$; $\left(\frac{F(x)-\rho}{x+\frac{1}{2}}\right) \geqslant f(x)$ et on sait que $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$.

Donc : $\boxed{F \text{ n'est pas dérivable à droite en } -\frac{1}{2}.}$

# FIN

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : normal 2009** juin 2009

# MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................. **3,00 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .................................. **4,00 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .................................. **3,00 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .................................. **10,00 points**

## Exercice 1 : (3,00 pts)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire dont l'élément neutre est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices carrées $M(x;y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M(x;y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (x;y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$.

0,50 pt **b)** Montrer que $(\mathcal{F}; \times)$ est un groupe non commutatif.

**2 -** Soit $G$ l'ensemble des matrices $M(x;0)$ de $\mathcal{F}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.

1,00 pt Montrer que l'ensemble $G$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{F}; \times)$.

**3 -** On pose $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On munit l'ensemble $E$ de la loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$(\forall (x;y) \in E)(\forall (a;b) \in E) \; ; \; (x;y) \perp (a;b) = (ax; bx + \frac{y}{a})$$

et on considère l'application $\begin{array}{rccc} \phi : & (\mathcal{F}; \times) & \longrightarrow & (E; \perp) \\ & M(x,y) & \longmapsto & \phi(M(x;y)) = (x,y) \end{array}$

0,25 pt **a)** Calculer $(1;1) \perp (2;3)$ et $(2;3) \perp (1;1)$.

0,50 pt **b)** Montrer que $\phi$ est un isomorphisme.

0,50 pt **c)** En déduire la structure de $(E; \perp)$.

## Exercice 2 : (4,00 pts)

Soit $m$ un nombre complexe différent de 1.

**I)** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(E) \; : \; z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation $(E)$ est : $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$

0,25 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

0,50 pt **c)** Déterminer sous forme algébrique les deux valeurs du complexe $m$ afin que le produit des deux solutions de l'équation $(E)$ est égal à 1.

**2 -** On pose $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

1,00 pt Écrire $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique dans le cas où $m = e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

**II)** Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

On considère les points $M$ , $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectivement $m$ ; $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

0,50 pt **1 -** Déterminer l'ensemble des points $M$ pour lesquels les points $M$ , $M_1$ et $M_2$ soient alignés.

0,50 pt **a)** Montrer que la transformation $R$ reliant chaque point $M$ d'affixe $z$ au point $M'$ d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation dont on déterminera l'affixe de son centre $\Omega$ et une mesure de son angle.

0,50 pt **b)** Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est un imaginaire pure si et seulement si $\Re e(m) + \Im m(z) = 1$.

0,50 pt **c)** En déduire l'ensemble des points $M$ tel que les points $\Omega$ , $M$ , $M_1$ et $M_2$ soient cocycliques.

## Exercice 3 : (3,00 pts)

Pour tout $n$ entier naturel non nul, on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ , $a_n$ est pair.

0,50 pt **b)** Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles : $a_n \equiv 0\ [3]$

**2 -** Soit $p$ un entier premier tel que : $p > 3$

0,75 pt **a)** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ , $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $6^{p-1} \equiv 1\ [p]$

0,75 pt **b)** Montrer que l'entier $p$ divise $a_{p-2}$

0,75 pt **c)** Montrer que pour tout entier naturel $q$, il existe un entier naturel non nul $n$ tel que :

$$a_n \wedge q = q$$

($a_n \wedge q$ désigne le plus grand commun diviseur de $a_n$ et $q$)

## Exercice 4 : (10,00 pts)

Soit $n$ un entier naturel non nul.

On considère la fonction $f_n$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x(1-\ln(x))^n & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

**Partie I :**

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité $2cm$)

0,50 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $f_n$ est continue à droite au point 0. (poser $x = t^n$)

0,25 pt **b)** Étudier la dérivabilité de la fonction $f_n$ à droite au point 0.

1,00 pt **c)** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$

0,50 pt **2 - a)** Étudier les variations de la fonction $f_1$.

0,50 pt **b)** Étudier les variations de la fonction $f_2$.

0,25 pt **3 - a)** Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

0,50 pt **b)** Construire les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

(On admet que le point $A(1;1)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C}_2)$).

**Partie II :**

On considère la fonction $F$ définie sur $]-\infty;0]$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

0,50 pt **1 - a)** Montrer que $F$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et que : $(\forall x<0)\ :\ F'(x)=\dfrac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

0,25 pt **b)** En déduire le sens de variations de la fonction $F$ sur $]-\infty;0]$.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x<0)\ :\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\leqslant F(x)\leqslant\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$

0,25 pt **b)** Vérifier que la fonction $x\mapsto x^2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\ln(x)}{2}\right)$ est une primitive de la fonction $f_1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,25 pt **c)** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\frac{3}{4}$

**3 -** On suppose que la fonction $F$ admet une limite finie $L$ quand $x$ tend vers $-\infty$.

0,25 pt Montrer que $\dfrac{3}{8}\leqslant L\leqslant\dfrac{3}{4}$.

**Partie III :**

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $U_n=\displaystyle\int_{1}^{e}f_n(x)dx$

0,50 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 1)\ ;\ U_n\geqslant 0$

0,50 pt **b)** Déterminer le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ sur l'intervalle $[1;e]$.

0,25 pt **c)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 1)\ ;\ U_{n+1}\leqslant U_n$.

0,25 pt **d)** En déduire que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

0,50 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 1)\ ;\ U_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+1}{2}U_n$

0,50 pt **b)** En déduire en $cm^2$ l'aire du domaine délimité par les deux courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 2)\ ;\ \dfrac{1}{n+1}\leqslant U_n\leqslant\dfrac{1}{n-1}$

0,50 pt **b)** Calculer les limites $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}U_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nU_n$.

**4 -** Soit $a$ un nombre réel différent de $U_1$.

On considère la suite numérique $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases}V_1=a\\ V_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+1}{2}V_n\ ;\quad(\forall n\geqslant 1)\end{cases}$

et pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $d_n=|V_n-U_n|$

0,25 pt **a)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 1)\ :\ d_n=\dfrac{n!}{2^{n-1}}d_1$

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\geqslant 2)\ :\ \dfrac{n!}{2}\geqslant 3^{n-2}$

0,25 pt **c)** Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}d_n=+\infty$

0,25 pt **d)** En déduire que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.

**FIN**

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

**Session : NORMALE 2009**

## MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3 pts)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire dont l'élément neutre est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices carrées $M(x;y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M(x;y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (x;y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

**0.25 pt**

**1 - a)** Montrons que l'ensemble $\mathcal{F}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

Soient $M(x;y)$ et $M(a;b)$ deux matrices de $\mathcal{F}$ On a :

$$\begin{aligned} M(x;y) \times M(a;b) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb + \frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix} \\ &= M\left(xa; xb + \frac{y}{a}\right) \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc l'ensemble } \mathcal{F} \text{ est une partie stable de } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)}$

**0.50 pt**

**b)** Montrons que $(\mathcal{F};\times)$ est un groupe non commutatif

On a $\mathcal{F}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

Donc $\times$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{F}$

Soient $M(a;b)$ et $M(c;d)$ et $M(e;f)$ trois éléments de $\mathcal{F}$

On a :

$$\begin{aligned}(M(a;b)\times M(c;d))\times M(e;f) &= M\left(ac;ad+\frac{b}{c}\right)\times M(e;f)\\ &= M\left(eac;acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)\end{aligned}$$

Et on a aussi :

$$\begin{aligned}M(a;b)\times M(c;d)\times M(e;f) &= M(a;b)\times M\left(ce;cf+\frac{d}{e}\right)\\ &= M\left(eac;acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)\end{aligned}$$

Donc : $(M(a;b)\times M(c;d))\times M(e;f) = M(a;b)\times M(c;d)\times M(e;f)$

C-à-d :La loi $\times$ est une loi associative dans $\mathcal{F}$

Soit $M(e_1;e_2)$ l'élément neutre de $\times$ dans $\mathcal{F}$

$\Leftrightarrow \forall M(a;b)\in\mathcal{F}\ ;\ M(a;b)\times M(e_1;e_2) = M(e_1;e_2)\times M(a;b) = M(a;b)$

$\Leftrightarrow M\left(ae_1;ae_2+\frac{b}{e_1}\right) = M(a;b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ae_1 = a \\ ae_2+\dfrac{b}{e_1} = b\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1\in\mathbb{R} \\ e_2 = 0\in\mathbb{R}^*\end{cases}$

Alors : $M(1;0)$ est l'élément neutre pour multiplier les matrices du groupe dans $\mathcal{F}$.

Soit la matrice $M(x';y')$ symétrique de la matrice $M(x;y)$ par rapport à $\times$ dans $\mathcal{F}$.

$\Leftrightarrow M(x;y)\times M(x';y') = M(x';y')\times M(x;y) = I$

$\Leftrightarrow M(xx';xy'+\frac{y}{x'}) = M(1;0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{x}\in\mathbb{R}^* \\ y' = -y\in\mathbb{R}\end{cases}$

Donc chaque matrice $M(x;y)$ admet une matrice symétrique $M(\dfrac{1}{x};y)$ par rapport à la loi $\times$ dans $\mathcal{F}$.

On a $\times$ non commutative car :

$\begin{cases} M(x;y)\times M(y;x) = M(xy;x^2+1) \\ \text{et} \\ M(y;x)\times M(xy;y^2+1)\end{cases}$

On remarque donc que : $(\forall x\neq y); x^2+1\neq y^2+1$

**Conclusion :**$(\mathcal{F};\times)$ est un groupe non commutatif.

**2 -** Soit $G$ l'ensemble des matrices $M(x;0)$ de $\mathcal{F}$ avec $x\in\mathbb{R}^*$.

**1 pt** Montrons que l'ensemble $G$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{F};\times)$

On a $G$ un ensemble non vide de $\mathcal{F}$ car, contient au moins l'élément $M(1;0)$

Soient $M(a;0)$ et $M(b;0)$ deux matrices de $G$

On a :

$$M(b;0)\times(M(a;0))' = M(b;0)\times M\left(\frac{1}{a};0\right)$$
$$= M\left(\frac{b}{a};0\right)$$

On a : $a\neq b$ donc : $M\left(\frac{b}{a};0\right)\in G$

D'où : $(G;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{F};\times)$.

**3 -** Soit $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. On munit l'ensemble $E$ de la loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$(\forall(x;y)\in E)(\forall(a;b)\in E)\ ;\quad (x;y)\perp(a;b)=(ax;bx+\frac{y}{a})$$

et on considère l'application $\begin{array}{cccc}\phi: & (\mathcal{F};\times) & \longrightarrow & (E;\perp)\\ & M(x,y) & \longmapsto & \phi\left(M(x;y)\right)=(x,y)\end{array}$

**0.25 pt** **a)** Calculons $(1;1)\perp(2;3)$ et $(2;3)\perp(1;1)$

$(1;1)\perp(2;3)=\left(2;3+\frac{1}{2}\right)=\boxed{\left(2;\frac{7}{2}\right)}$

$(2;3)\perp(1;1)=\left(2;2+\frac{3}{1}\right)=\boxed{(2;5)}$

**0.50 pt** **b)** Montrons que $\phi$ est un isomorphisme

Soient $M(a;b)$ et $M(c;d)$ deux matrices de $\mathcal{F}$

On a :
$$\phi\left(M(c;d)\times M(a;b)\right)=\phi\left(M\left(ac;bc+\frac{d}{a}\right)\right)$$
$$=\left(ac;bc+\frac{d}{a}\right)$$
$$=(c;d)\perp(a;b)$$
$$=\phi\left(M(c;d)\right)\perp\phi\left(M(a;b)\right)$$

Donc $\phi$ est un morphisme de $(\mathcal{F};\times)$ vers $(E;\perp)$.

Soit $(a;b)$ un élément de $E$

On va résoudre l'équation d'un seul inconnu $M(x,y)$ suivante :$\phi\left(M(x;y)\right)=(a;b)$

$\Leftrightarrow (x;y)=(a;b)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$

Donc l'équation admet une solution unique : $M(x;y)$

Alors : $\forall(a;b)\in E\ ,\ \exists! M(x;y)\in\mathcal{F}\ ;\ \phi\left(M(x;y)\right)=(a;b)$

D'où : $\phi$ est une bijection de $(\mathcal{F};\times)$ vers $(E;\perp)$

**Conclusion :** $\phi$ est un isomorphisme de $(\mathcal{F};\times)$ vers $(E;\perp)$

**0.5 pt** **c)** En déduire la structure de $(E;\perp)$

On sait que l'isomorphisme conserve la structure du groupe.

Et puisque : $(\mathcal{F};\times)$ est un groupe non commutatif d'élément neutre $M(1;0)$ et chaque matrice de $M(x;y)$ admet une symétrique $M\left(\frac{1}{x};-y\right)$ pour $\times$ dans $\mathcal{F}$.

Donc : $(E;\perp)$ est un groupe non commutatif d'élément neutre le couple $\phi\left(M(1;0)\right)$ et chaque couple $(x;y)$ admet un symétrique $\phi\left(M\left(\frac{1}{x};-y\right)\right)$, tel que :

$$\begin{cases}\phi\left(M(1;0)\right)=(1;0)\\ \phi\left(M\left(\frac{1}{x};-y\right)\right)=\left(\frac{1}{x};-y\right)\end{cases}$$

## Exercice 2 : (4 pts)

Soit $m$ un nombre complexe différent de 1.

**I)** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(E)\ :\ z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que le discriminant de l'équation $(E)$ est : $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$

$$\begin{aligned}\Delta&=(1-i)^2(m+1)^2+4i(m^2+1)\\&=-2i(m^2+2m+1)4im^2+4i\\&=2im^2-4im+2i\\&=2i(m^2-2m+1)\\&=(1+i)^2(m-1)^2\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } \Delta=[(1+i)(m-1)]^2}$

0.25 pt **b)** Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$

On a $z_1=\dfrac{(1-i)(m+1)-(1+i)(m-1)}{2}=\boxed{(1-im)}$

0.5 pt Et $z_2=\dfrac{(1-i)(m+1)+(1+i)(m-1)}{2}=\boxed{(m-i)}$

**c)** Déterminons sous forme algébrique les deux valeurs du complexe $m$ afin que le produit des deux solutions de l'équation $(E)$ est égal à 1

On pose : $m=re^{i\theta}$ :

$$\begin{aligned}z_1z_2=1&\Leftrightarrow(1-im)(m-i)=1\\&\Leftrightarrow m-i-m^2i-m=1\\&\Leftrightarrow m^2=-1+i\\&\Leftrightarrow re^{i\theta}=\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\&\Leftrightarrow re^{i\theta}=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \quad ; \quad k \in \{0,1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{8} \quad \text{ou} \quad \theta = \dfrac{11\pi}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{3i\pi}{8}} \\ m_2 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{11i\pi}{8}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{2}+4}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}\right) \\ \\ m_2 = \sqrt[4]{2}\left(-\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{2}+4}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}\right) \end{cases}$$

**2 -** On pose $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

1 pt — Écrire $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique dans le cas où $m = e^{i\theta}$ avec $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

On pose : $z_1 = re^{i\phi}$

On a :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - im = 1 - e^{i\theta} \\ &= 1 - i(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (1 + \sin\theta) - i\cos\theta \end{aligned}$$

Écrivons les inconnus $r$ et $\phi$ en fonction de $\theta$, tel que : $(1+\sin\theta) - i\cos\theta = r\cos\phi + i\cos\phi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r\cos\phi = 1 + \sin\theta \\ r\sin\phi = -\cos\theta \end{cases}$$

On a : $(r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2 = r^2$

Donc : $(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta = r^2$

D'où :

$$\begin{aligned} r^2 = 2(1+\sin\theta) &= 2\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\theta\right) \\ &= 2\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc : $r = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

On remplace $r$ par sa valeur dans la deuxième équation du système :

$$\begin{aligned}
\sin\phi &= \frac{-\cos\theta}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos(\pi-\theta)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2}+\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{-\cancel{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}} \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'où : $\phi = \left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+[k\pi]$

$\boxed{\text{Alors : } z_1 = \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$

De la même manière, on pose : $z_2 = re^{i\phi}$

On a : $z_2 = m - i = e^{i\theta} - i = (\cos\theta) + i(\sin\theta - 1)$

Écrivons les inconnus $r$ et $\phi$ en fonction de $\theta$, tel que : $r\cos\phi + ir\sin\phi = \cos\theta + i(\sin\theta - 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = r\cos\phi \\ \sin\theta - 1 = r\sin\phi \end{cases}$$

On a : $(r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2 = r^2$

Donc : $\cos^2\theta + (\sin\theta - 1)^2 = r^2$

Alors :$r^2 = 2(1-\sin\theta)$

D'où : $r^2 = 2(1+\sin(-\theta))$

D'après la première partie de la question, on sait que :

$2(1+\sin\theta) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

Donc : $2(1+\sin(-\theta)) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

D'où : $r^2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

Alors : $r = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

On remplace $r$ par sa valeur dans la deuxième équation du système et on a :

$$\begin{aligned}
\cos\phi &= \frac{\cos\theta}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\\
&= \frac{-\cos(\pi-\theta)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\\
&= \frac{-\sin\left(\frac{-\pi}{2}+\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\\
&= \frac{-2\sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\\
&= \frac{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}\\
&= \cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'où : $\phi = \left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) + [k\pi]$

$\boxed{\text{Alors : } z_2 = \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$

**II)** Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

On considère les points $M$ , $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectivement $m$ ; $z_1 = 1-im$ et $z_2 = m-i$

**1 -** Déterminons l'ensemble des points $M$ pour lesquels les points $M$ , $M_1$ et $M_2$ soient alignés

0.5 pt

On a M et $M_1$ et $M_2$ sont alignés $\Leftrightarrow M \in (M_1M-2)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{z_1-m}{z_2-m}\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \frac{1-im-m}{m-i-m}\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow i+m-im\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow (x+y)+i(y-x+1)\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow y-x+1=0\\
&\Leftrightarrow y=x-1
\end{aligned}$$

On pose : $m = x+iy$

$\boxed{\text{Donc : l'ensemble des points M est une droite d'équation : } y = x-1}$

0.5 pt

**2 - a)** Montrons que la transformation $R$ reliant chaque point $M$ d'affixe $z$ au point $M'$ d'affixe $z' = 1-iz$ est une rotation dont on déterminera l'affixe de son centre $\Omega$ et une mesure de son angle

On a :$z' = 1-iz$

Écrivons cette équation sous la forme : $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$ tel que $\omega\in\mathbb{C}$

On a : $\begin{cases} e^{i\theta} = -i \\ -\omega e^{i\theta}+\omega = 1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \theta = \dfrac{-\pi}{2} \\ \omega = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i \end{cases}$

Alors : $z' = e^{\frac{-\pi}{2}}\left(z - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}\right)$

Donc la transformation $R$ est une rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$.

**0.5 pt**

**b)** Montrons que le nombre complexe $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est un imaginaire pure si et seulement si $\mathfrak{Re}(m) + \mathfrak{Im}(z) = 1$

On pose : $\mathcal{Re}(m) = x$ et $\mathcal{Im}(m) = y$ et $m = x + iy$

$$\begin{aligned}
\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \text{ est imaginaire pure } &\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right)} = -\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\overline{m} + i - 1 - i\overline{m}}{i} = \frac{m - i - 1 + im}{i} \\
&\Leftrightarrow (x - iy) + i - 1 - i(x - iy) = (x + iy) - i - 1 + i(x + iy) \\
&\Leftrightarrow -2ix + 2i - 2iy = 0 \\
&\Leftrightarrow x + y = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathcal{Re}(m) + \mathcal{Im}(m) = 1
\end{aligned}$$

Donc : $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est imaginaire pure si et seulement si $\mathcal{Re}(m) + \mathcal{Im}(m) = 1$

**0.5 pt**

**c)** Déduisons l'ensemble des points $M$ tel que les points $\Omega$ , $M$ , $M_1$ et $M_2$ soient cocycliques

On a les points $\Omega$ et $M$ et $M_1$ et $M_2$ sont cocycliques :

$\Leftrightarrow arg\left(\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right) \equiv arg\left(\dfrac{z_2 - z_\Omega}{z_2 - z_\Omega}\right)$

Et on a : $\left(\dfrac{z_2 - z_\Omega}{z_2 - z_\Omega}\right) = \dfrac{-i\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m\right)} = -i$

Donc : $\left(\dfrac{z_2 - z_\Omega}{z_2 - z_\Omega}\right)$ est un imaginaire pure.

D'où : $\left(\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right)$ est aussi un imaginaire pure.

$\Leftrightarrow \mathcal{Re}(m) + \mathcal{Im}(m) = 1$

$\Leftrightarrow y = -x + 1$

Donc l'ensemble de points $M$ tel que $\Omega$ et $M$ et $M_1$ et $M_2$ sont cocycliques, est une droite $(\Delta)$ d'équation : $(\Delta) : y = -x + 1$.

## Exercice 3 : (3 pts)

**1 - a)** Pour tout $n$ entier naturel non nul, on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

Vérifions que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ , $a_n$ est pair :

On a :

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$
$$= (2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n)$$

Et on a : $3 \equiv 1\,[2]$ et $2 \equiv 0\,[2]$

Donc : $3^n \equiv 1\,[2]$ et $2^n \equiv 0\,[2]$

D'où : $\begin{cases} 2^n - 1 \equiv 1\,[2] & (1) \\ 2^n + 1 \equiv 1\,[2] & (2) \end{cases}$ et $3^n \equiv 1\,[2]$ (3)

De (2) et (3), on a : $3^n(1 + 2^n) \equiv 1\,[2]$ (4)

Et de (1) et (4), on a : $(2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n) \equiv 2\,[2]$

Alors : $(2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n) \equiv 0\,[2]$ puisque : $2 \equiv 0\,[2]$

Donc : $a_n \equiv 0\,[2]$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*; a_n$ est pair.

**b)** Déterminons les valeurs de $n$ pour lesquelles : $a_n \equiv 0\,[3]$

On a : $a_n = 2^n + 3^n + 3^n 2^n - 1$

Donc : $a_n = 2^n(3^n + 1)(3^n - 1)$

Or : $3 \equiv 0\,[3]$ Donc : $3^n \equiv 0\,[3]$

Alors : $(3^n - 1) \equiv -1\,[3]$ (5) et $(3^n + 1) \equiv 1\,[3]$ (6)

De (5) et (6), on obtient : $2^n(3^n + 1) + (3^n - 1) \equiv 2^n - 1\,[3]$

Alors : $a_n \equiv (2^n - 1)\,[3]$ (7)

Finalement, on a : $2 \equiv -1[3]$ donc : $2^n \equiv (-1)^n\,[3]$

C-à-d : $(2^n - 1) \equiv ((-1)^n - 1)\,[3]$ (8)

De (7) et (8) on déduit que : $a_n \equiv (-1)^n - 1[3]$

Pour $n$ pair, on obtient : $(-1)^{2k} - 1 = 0$

D'où : $a_n \equiv 0[3]$

Et pour $n$ impair, on obtient : $(-1)^{2k+1} - 1 = -2$

D'où : $a_n \equiv -2[3]$

**2 -** Soit $p$ un entier premier tel que : $p > 3$

**a)** Montrons que : $2^{p-1} \equiv 1\,[p]$ , $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $6^{p-1} \equiv 1\,[p]$

En appliquant le Théorème de Fermat deux fois on a :

$$\begin{cases} p \text{ premier} \\ p \wedge 2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow 2^{p-1} \equiv 1[p] \qquad (1)$$

et

$$\begin{cases} p \text{ premier} \\ p \wedge 3 = 1 \end{cases} \implies \quad 3^{p-1} \equiv 1[p] \qquad (2)$$

On multipliant (1) et (2) côte à côte et on obtient : $3^{p-1}.2^{p1} \equiv 1[p]$

Donc : $6^{p-1} \equiv 1[p]$

**b)** Montrons que l'entier $p$ divise $a_{p-2}$

On a : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ donc : $3.2^{p-1} \equiv 3[p]$ (1)

On a aussi : $3^{p-1} \equiv 1[p]$ donc : $2.3^{p-1} \equiv 2[p]$ (2)

Et on a encore : $6^{p-1} \equiv 1[p]$ donc : $6.6^{p-2} \equiv 1[p]$ (3)

Et on sait que : $-6 \equiv 6[p]$ (4)

On ajoute (1),(2),(3) et (4) côte à côte et on obtient :

$$\Leftrightarrow .2^{p-1} + 2.3p - 1 + 6.6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6.2^{p-2} + 6.3^{p-2} + 6.6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6\left(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1\right) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6\left(a_{p-2}\right) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow p/6\left(a_{p-2}\right) \qquad (5)$$

Décomposons le nombre 6 en facteurs premiers : $6 = 2^1 \times 3^1$

Or : $6 \wedge p = 1$ (6)

De (5) et (6) on déduis selon Gauss que : $p/a_{p-2}$

**c)** Montrons que pour tout entier naturel $q$, il existe un entier naturel non nul $n$ tel que :

$a_n \wedge q = q$ ($a_n \wedge q$ désigne le plus grand commun diviseur de $a_n$ et $q$)

Soit $q$ un nombre premier, on a trois cas pour le nombre $q$ :

**Cas 1** : si $q = 2$ :

Donc, d'après le résultat de la question **1-a)** : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 2/a_n$ D'où : $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$

**Cas 2** : si $q = 3$ :

Donc, d'après le résultat de la question **1-b)** : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 3/a_n$ D'où : $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$

**Cas 3** : si $q > 3$ :

Donc, d'après le résultat de la question **2-b)** : $(\forall q > 3) : q/a_{q-2}$ D'où : $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$

**Conclusion :** on conclus de ces trois cas que : $(\forall q \in \mathbb{P}), (\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$.

## Exercice 4 : (10 pts)

Soit $n$ un entier naturel non nul.

On considère la fonction $f_n$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x(1-\ln(x))^n & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

### Partie I

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité $2cm$)

**1 - a)** Montrons que la fonction $f_n$ est continue à droite au point 0. (poser $x = t^n$)

0.5 pt

On pose : $x = t^n$ d'où : $\ln x = n \ln t$

Donc : $t = e^{\left(\frac{\ln x}{n}\right)}$

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f_n(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x(1-\ln x)^n \\
&= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} t^n(1-n\ln t)^n \\
&= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} (t - nt\ln t)^n = 0 = f_n(0) \qquad \text{car : } \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} nt\ln t = 0
\end{aligned}$$

Donc $f_n$ est une fonction continue à droite de 0.

**b)** Étudions la dérivabilité de la fonction $f_n$ à droite au point 0

0.25 pt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1-\ln x)^n = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc $f_n$ est non dérivable à droite en 0.

**c)** Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ , $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x)$ , $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$

1 pt

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f_2(x)}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} (1-\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} x(1-\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f_1(x)}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} (1-\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} x(1-\ln x) = -\infty$$

0.5 pt

**2 - a)** Étudions les variations de la fonction $f_1$

On a : $f_1(x) = x(1 - \ln x)$

Donc :
$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (x - x\ln x)' \\ &= 1 - (\ln x + 1) \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

D'où $f_1'$ s'annule en 1.

- Si $x > 1$ alors : $f_1'(x) < 0$
- Si $x < 1$ alors : $f_1'(x) > 0$

On déduire donc le tableau des variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f_1$ | \|\| $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

0.5 pt

**b)** Étudions les variations de la fonction $f_2$

On a :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \left(x(1-\ln x)^2\right)' \\ &= (1-\ln x)^2 - \frac{2x}{x}(1-\ln x) \\ &= (1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x) \\ &= (1-\ln x)(1-\ln x - 2) \\ &= (1-\ln x)(-1-\ln x) \end{aligned}$$

On remarque que : $f_2'$ s'annule en $\frac{1}{e}$ et $e$, d'où le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1 - \ln x$ | \|\| | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $-1 - \ln x$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f_2'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_2$ | \|\| $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{e}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**0.25 pt**

**3 - a)** Étudions la position relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$

On a :

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= x(1-\ln x) - x(1-\ln x)^2 \\ &= x(1-\ln x)(\ln x) \end{aligned}$$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(1-\ln x)$ | ‖ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x(1-\ln x)(\ln x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

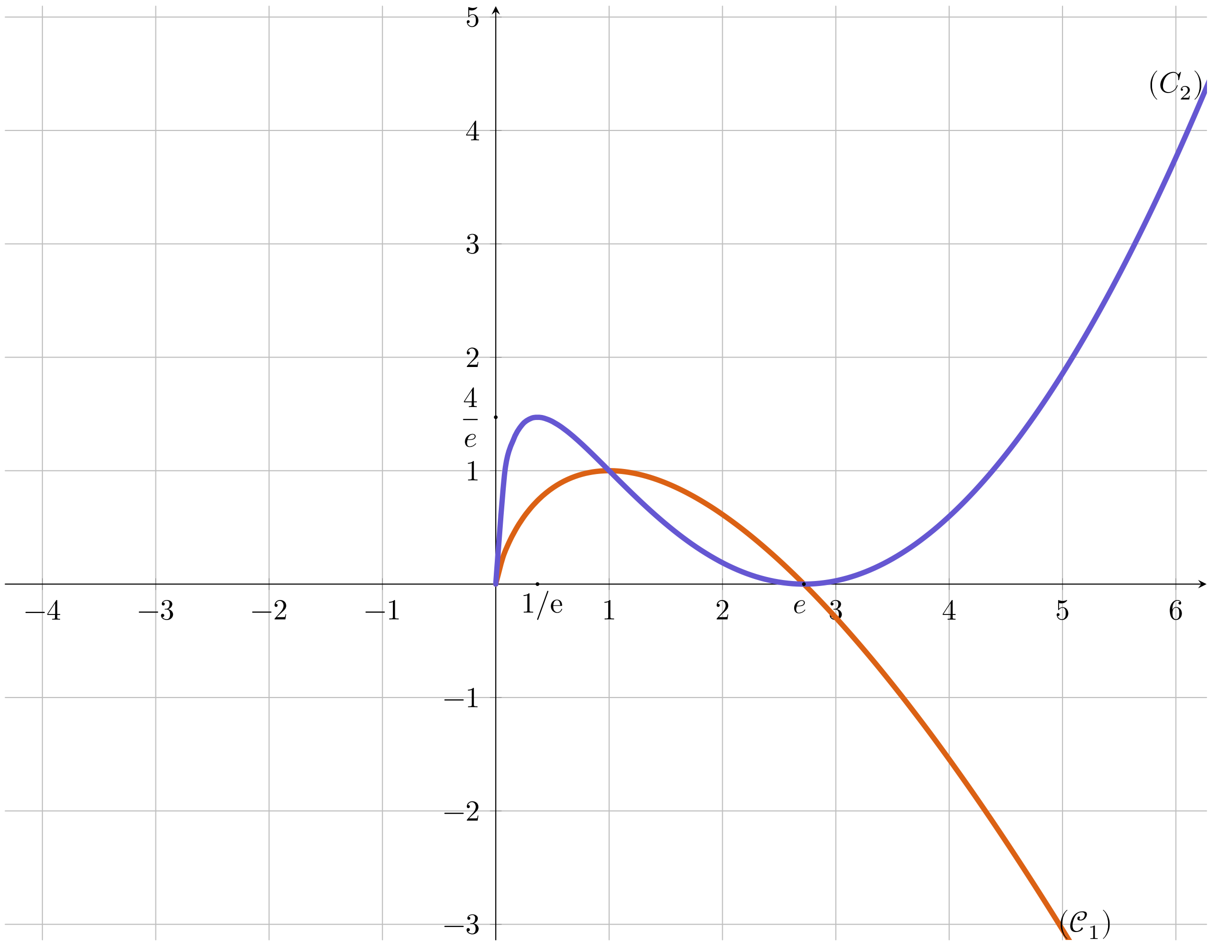
Donc $(\mathcal{C}_1)$ est en dessous de $(\mathcal{C}_2)$ sur $[1;e]$ et $(\mathcal{C}_1)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_2)$ sur $[0;1]$ et $[e;+\infty[$

**0.5 pt**

**b)** Construisons les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$

(On admet que le point $A(1;1)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C}_2)$)

Les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ :



## PARTIE II

On considère la fonction $F$ définie sur $]-\infty;0]$ par : $F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

**1 - a)** Montrons que $F$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et que : $(\forall x<0)$ : $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

0.5 pt On a la fonction : $x\mapsto\frac{f_1(x)}{1+x^2}$ continue sur $]0,+\infty[$

Donc elle admet une primitive $\psi$ tel que :

$F(x)=\psi(1)-\psi(e^x)$ et $\psi'(x)=\frac{f_1(x)}{1+x^2}$

Alors : $F$ est dérivable sur $]-\infty;0[$

On a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\psi(1))'-(\psi(e^x))' \\ &= 0-e^x\psi'(e^x) \\ &= \frac{-e^x f_1(e^x)}{1+e^{2x}} \\ &= \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x<0)$ : $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

**b)** Déduisons le sens de variations de la fonction $F$ sur $]-\infty;0]$

0.25 pt On a : $(\forall x<0)$ : $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Or : $(\forall x<0)$ : $\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}>0$

Donc le signe de $F'(x)$ dépend uniquement du signe de $(x-1)$

Et on a : $x<0\Rightarrow x<1$ donc : $x-1<0$ d'où : $F'(x)<0$

Donc $F$ est décroissante sur $]-\infty;0]$.

**2 - a)** Montrons que : $(\forall x<0)$ : $\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\leqslant F(x)\leqslant\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$

Soit $t\in[e^x;1]$ tel que : $x<0$

0.25 pt Alors : $e^x<t<1$

$$\Leftrightarrow 1+e^x < 1+t^2 < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}f_1(t) < \frac{f_1(t)}{1+t^2} < \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \int_{e^x}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t < \int_{e^x}^{1}\left(\frac{f_1(t)}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t < \int_{e^x}^{1}\left(\frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}\right)\mathrm{d}t$$

Donc : $\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t < F(x) < \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t \qquad (*)$

**0,25 pt**

**b)** Vérifions que la fonction $x \mapsto x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln(x)}{2}\right)$ est une primitive de la fonction $f_1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

On a :

$$\begin{aligned}\left(x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)\right)' &= 2x\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)+x^2\left(\frac{-1}{2x}\right)\\ &= \frac{3x}{2}-x\ln x-\frac{x}{2}\\ &= x(1-\ln x)^1\\ &= f_1(x)\end{aligned}$$

Donc la fonction : $x \mapsto x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ est une primitive de $f_1$ sur $]0;+\infty[$

**0,25 pt**

**c)** Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt = \frac{3}{4}$

On a :

$$\begin{aligned}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t &= \left[x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)\right]_{e^x}^{1}\\ &= \frac{3}{4}-e^{2x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)\\ &= \frac{3}{4}-\frac{3e^{2x}}{4}+\frac{xe^{2x}}{2}\end{aligned}$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0^+ = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0^- = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}-\frac{3e^{2x}}{4}+\frac{xe^{2x}}{2}\right) = \frac{3}{4}$

**3 -** On suppose que la fonction $F$ admet une limite finie $L$ quand $x$ tend vers $-\infty$.

**0,25 pt**

Montrons que $\frac{3}{8} \leqslant L \leqslant \frac{3}{4}$

A partir de l'encadrement $(*)$ de la question 2-a), on a : $\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t < F(x) < \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t$

$$\text{Donc : } \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t\right) < \lim_{x\to-\infty} F(x) < \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$\boxed{\text{Alors : } \frac{3}{8} < l < \frac{3}{4}}$$

## Partie III

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $U_n = \displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$

**1 - a)** Montrons que : $(\forall n \geqslant 1)$ ; $U_n \geqslant 0$

**0,50 pt** Soient $1 \leq w \leq e$ et $n \geq 1$

Donc : $0 \leq \ln x \leq 1$ d'où : $(1-\ln x) \geq 0$

Alors : $x(1-\ln x)^n \geq 0$ donc : $\displaystyle\int_1^e f_n(x)\mathrm{d}x \geq 0$

$$\boxed{\text{D'où : } u_n \geq 0}$$

**b)** Déterminons le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[1;e]$

**0,50 pt** On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x(1-\ln x)^{n+1} - x(1\ln x)^n \\ &= x(1-\ln x)^n(-\ln x) \end{aligned}$$

Puisque : $1 \leq x \leq e$ Alors : $(1-\ln x) \geq 0$ et $-\ln x \leq 0$

Donc : $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

$$\boxed{\text{D'où : } f_{n+1}(x) \leq f_n(x)}$$

**c)** Montrons que : $(\forall n \geqslant 1)$ ; $U_{n+1} \leqslant U_n$

**0,25 pt** Puisque : $\forall x \in [1;e]$ ; $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

Alors : $\displaystyle\int_1^e f_{n+1}(x)\mathrm{d}x \leq \int_1^e f_n(x)\mathrm{d}x$

$$\boxed{\text{D'où : } u_{n+1} \leq u_n}$$

**d)** Déduisons que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente

**0,25 pt** On a : $u_{n+1} \leq u_n$ donc : $\boxed{(u_{n+1})_{n\geq 1} \text{ est décroissante.}}$

Et on a : $(\forall n \geq 1); u_n \geq 0$ donc : $\boxed{(u_{n+1})_{n\geq 1} \text{ est minorée par 0.}}$

**2 - a)** Montrons que : $(\forall n \geqslant 1)$ ; $U_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{n+1}{2}U_n$

**0,50 pt** On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_1^e f_{n+1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^e x(1-\ln x)^{n+1}\mathrm{d}x \qquad (\text{on pose : } u' = x \text{ et } v = (1-\ln x)^{n+1}) \\
&= \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{(n+1)}{2}\int_1^e x^2\left(\frac{-1}{x}\right)(1-\ln x)^n\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}\int_1^e x(1-\ln x)^n\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } (\forall n \geq 1)\,;\ u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n}$$

0,50 pt

**b)** Déduisons en $cm^2$ l'aire du domaine délimité par les deux courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Le domaine $\mathcal{S}$ dont on cherche à calculer l'aire, est définie par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \left|\int_1^e (f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_1^e f_2(x)\mathrm{d}x - \int_1^e f_1(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= |u_1 - u_2|
\end{aligned}$$

Et on a : $u_{n+1} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{(n+1)}{2}u_n$

Donc : $u_0 = \displaystyle\int_1^e x\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

et $u_1 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{3}{4}$

et $u_2 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{5}{4}$

Alors : $\mathcal{S} = |u_1 - u_2| = \left(\dfrac{e^2}{4} - \dfrac{3}{4}\right) - \left(\dfrac{e^2}{4} - \dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(unit\acute{e})^2$

Puisque : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ donc : $unit\acute{e} = 2cm$ Alors :$(unit\acute{e})^2 = 4cm^2$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathcal{S} = \frac{1}{2}(unit\acute{e})^2 = 2cm^2}$$

**3 - a)** Montrons que : $(\forall n \geqslant 2)$ ; $\dfrac{1}{n+1} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

0,75 pt

On a d'après ce qui précèdent : $0 \leq u_{n+1}$

Donc : $0 \leq \dfrac{-1}{2} + \dfrac{(n+1)}{2}u_n$

D'où : $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{(n+1)}{2}u_n$

Donc : $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)} \leq u_n}$ (1)

Et on a aussi : $u_{n+1} \leq u_n$

Donc :

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n \leq u_n$$
$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} + \frac{nu_n}{2} + \frac{u_n}{2} \leq u_n$$
$$\Leftrightarrow u_n\left(\frac{n+1-2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow u_n\left(\frac{n-1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{(\forall n \geq 2); u_n \leq \frac{1}{n-1}} \qquad (2)$$

De (1) et (2) on déduit que :$(\forall n \geq 2)$ ; $\dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n-1}$ (3)

**0,50 pt**

**b)** Calculons les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$

On a d'après l'encadrement (3) :$(\forall n \geq 2)$ ; $\dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n-1}$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2); \frac{n}{n+1} \leq nu_n \leq \frac{n}{n-1}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{(\forall n \geq 2); \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq nu_n \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \qquad (4)$$

On a : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n-1}\right) = 0$

Donc d'après l'encadrement (3) on déduit : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Et on a : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = 1$

Donc d'après l'encadrement (4) on déduit : $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 1$

**4 -** Soit $a$ un nombre réel différent de $U_1$.

On considère la suite numérique $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} V_1 = a \\ V_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{n+1}{2}V_n \ ; \quad (\forall n \geqslant 1) \end{cases}$

et pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $d_n = |V_n - U_n|$

**a)** Montrons que : $(\forall n \geqslant 1)\ :\ d_n = \dfrac{n!}{2^{n-1}} d_1$

**0,25 pt**

Soit $n \geq 1$ On a :

$$\begin{aligned} d_n &= |v_n - u_n| \\ &= \left|\frac{-1}{2} + \frac{n}{2} v_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} u_{n-1}\right| \\ &= \frac{n}{2} |v_{n-1} + u_{n-1}| \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |v_n - u_n| &= \frac{n}{2} |v_{n-1} + u_{n-1}| \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) |v_{n-2} + u_{n-2}| \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right) |v_{n-3} + u_{n-3}| \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right) \cdots \left(\frac{2}{2}\right) |v_1 + u_1| \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } (\forall n \geq 1)\,;\, d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1}$$

**b)** Montrons que : $(\forall n \geqslant 2)\ :\ \dfrac{n!}{2} \geqslant 3^{n-2}$

**0,25 pt**

Démontrons que : $(\forall n \geq 2)\,;\, \dfrac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

Par récurrence, on a pour $n = 2$ : $\dfrac{2!}{2} \geq 3^0$

On suppose que : $(\forall n \geq 2)\,;\, \dfrac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

On a : $\dfrac{(n+1)!}{2} = (n+1)\dfrac{n!}{2} \geq (n+1)3^{n-2}$

Puisque : $n \geq 2$ Alors : $(n+1) \geq 3$

D'où : $(n+1)3^{n-2} \geq 3.3^{n-2}$ alors : $(n+1)^{n-2} \geq 3^{n-1}$

Donc : $\dfrac{(n+1)!}{2} \geq 3^{(n+1)-2}$ $\boxed{\text{D'où : } (\forall n \geq 2)\,;\, \dfrac{n!}{2} \geq 3^{n-2}}$

**c)** Montrons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = +\infty$

**0,25 pt**

On a :

$$\begin{aligned}(\forall n \geq 2);\ \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} &\Leftrightarrow n! \geq 3^{n-2}.2\\ &\Leftrightarrow n! \geq \frac{3^{n-2}.2^{n-1}}{2^{n-2}}\\ &\Leftrightarrow \frac{n!}{2^{n-2}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\\ &\Leftrightarrow d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1\end{aligned}$$

Puisque : $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2} > 1$.

Alors : $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to\infty} d_n = +\infty$

**d)** Déduisons que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente

**0,25 pt** On a : $d_n = |v_n - u_n|$

On suppose que $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

On sait que $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

Donc : $(d_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

Or, d'après la question 4-c) : $d_n \to +\infty$

Donc, par absurde, on déduit que $(v_n)_{n\geq 1}$ est divergente.

FIN

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage 2009** Juillet 2009

# MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ........ **3,00 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ........ **4,00 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ........ **3,00 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ........ **10,00 points**

## Exercice 1 : (3,00 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique $I_2$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; .)$ est un espace vectoriel réel.

On pose pour tous réels $a$ et $b$ : $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ , et soit $V = \{M_{(a;b)} \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

**0,75 pt** **1 -** Montrer que $V$ est un sous-espace vectoriel réel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; .)$ et déterminer une base de $V$.

**0,25 pt** **2 - a)** Montrer que l'ensemble $V$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$

**0,50 pt** **b)** Montrer que $(V; +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

**0,25 pt** **3 - a)** Calculer $M_{\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)}$.

**0,25 pt** **b)** L'anneau $(V; +; \times)$ est-il un corps ?

**4 -** Soit $X$ une matrice de l'ensemble $V$ telle que : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

**0,50 pt** **a)** Montrer que $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I_2 = 0$

**b)** On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$

**0,50 pt** Montrer que la matrice $X$ admet un inverse dans $V$ qu'on déterminera.

## Exercice 2 : (4,00 pts)

Soit $u$ un nombre complexe différent de $(1 - i)$.

**0,25 pt** **1 - a)** Développer $(iu - 1 - i)^2$.

**0,75 pt** **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :$(E)$ : $z^2 - 2(u + 1 - i)z + 2u^2 - 4i = 0$

**2 -** Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient les points $A\left((1+i)u - 2i\right)$, $B\left((1-i)u + 2\right)$, $U(u)$ et $\Omega(2 - 2i)$

**0,50 pt** **a)** Déterminer l'affixe du point $I$ le milieu du segment $[AB]$, puis déterminer le vecteur de la translation $t$ qui transforme $U$ au point $I$.

**0,50 pt** **b)** Soit $R$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que $R(A) = B$.

**0,50 pt** **c)** En déduire que les droite $(\Omega I)$ et $(AB)$ sont perpendiculaires.

**0,75 pt** **d)** A partir du point $U$ , expliquer une méthode de construction des points $A$ et $B$.

**3 -** On pose $u = (1 + i)a - 2i$ tel que : $a \in \mathbb{R}$

**0,50 pt** **a)** Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de $a$.

**0,25 pt** **b)** En déduire que les points $A$ , $B$ et $U$ sont alignés.

## Exercice 3 : (3,00 pts)

$n$ un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On a trois urnes $U_1$, $U_2$ et $U_3$

L'urne $U_1$ contient une boule rouge et $(n-1)$ boules noires.

L'urne $U_2$ contient $n$ deux boules rouges et $(n-2)$ boules noires.

L'urne $U_3$ contient $n$ trois boules rouges et $(n-3)$ boules noires.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On choisit aléatoirement une urne parmi les trois urnes précédentes, puis on en tire simultanément deux boules.

Soit $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges tirées.

**0,25 pt** **1 -** Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire $X$.

**0,75 pt** **2 - a)** Montrer que $P[X=2] = \dfrac{8}{3n(n-1)}$

**0,75 pt** **b)** Montrer que $P[X=1] = \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

**0,50 pt** **c)** En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.

**0,75 pt** **3 -** Sachant que les deux boules tirées sont rouges , quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne $U_3$ ?

## Exercice 4 : (10,00 pts)

**Partie I :**

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 2(1-e^{-x}) - x$

**0,50 pt** **1 - a)** Étudier les variations de la fonction $g$

**0,50 pt** **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.

**0,50 pt** **2 - a)** Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ de l'intervalle $]\ln(4);\ln(6)[$.
(On prend $\ln(4) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$)

**0,50 pt** **b)** Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

**3 -** On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} U_{n+1} &= 2\left(1-e^{-U_n}\right) \ ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ U_0 &= 1 \end{cases}$

**0,50 pt** **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leqslant U_n < \alpha$.

**0,25 pt** **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ U_{n+1} - U_n = g(U_n)$.

**0,25 pt** **c)** Montrer que la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

**0,50 pt** **d)** Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

**Partie II :**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1-e^x}{x^2}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1,00 pt **1 -** Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

0,50 pt **2 - a)** Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$.

0,75 pt **b)** Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)e^x}{x^3}$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

0,50 pt **3 -** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 1,5$)

**Partie III :**

On considère la fonction $F$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt \ ; \quad (\forall x > 0) \\ F(0) = -\ln(2) \end{cases}$$

0,50 pt **1 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x > 0) \quad F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$$

0,50 pt **b)** Montrer que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $e^x\ln(2) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leqslant e^{2x}\ln(2)$

0,50 pt **c)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$ puis en déduire que $F$ est continue à droite au point 0.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $F(x) \leqslant \dfrac{1-e^x}{2x}$

0,25 pt **b)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,50 pt **3 -** Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x > 0) \ ; \ F'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$

**4 - a)** Soit $x$ un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$

0,75 pt Montrer qu'il existe un réel $c$ de l'intervalle $]0;x[$ tel que : $F(x) - F(0) = -\dfrac{1}{2}xe^{2c}$

(Utiliser le théorème des accroissements finis deux fois)

0,25 pt **b)** Démontrer que pour tout $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ : $-\dfrac{1}{2}e^{2x} \leqslant \dfrac{F(x)-F(0)}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}$

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction $F$ est dérivable à droite au point 0 et que : $F'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$

**FIN**

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : RATTRAPAGE 2009**

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $0$ et dont l'unité est la matrice identique $I_2$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel réel.

On pose pour tous réels $a$ et $b$ : $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ , et soit $V = \{M_{(a;b)} \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

0,75 pt **1 - Montrons que $V$ est un sous-espace vectoriel réel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$ et déterminons une base de $V$.**

On a $V \neq \emptyset$ car $O_2 = M_{(0;0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$.

Soient $M_{(a;b)}$ et $M_{(c;d)}$ deux matrices de $V$ et soient $x$ et $y$ deux réels, on a :

$$\begin{aligned} xM_{(a;b)} + yM_{(c;d)} &= x \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 4d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb \\ 4xb & xa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} yc & yd \\ 4yd & yc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ 4(xb+yd) & xa+yc \end{pmatrix} \\ &= M_{(xa+yc;xb+yd)} \in V \end{aligned}$$

Donc $V$ est un sous-espace vectoriel réel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$.

On pose : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $M_{(a;b)}$ de $V$ :

On a : $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ$

Donc : $\big(\forall M_{(a;b)} \in V\big)\,(\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2)\ ;\ M_{(a;b)} = aI + bJ$

Ce qui signifie que $(I;J)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-ev $V$. **(1)**

Soient $x$ et $y$ deux réels, on a : $xI + yJ = O_2 \iff \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 4y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} x & y \\ 4y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

Alors $(I;J)$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-ev $V$. **(2)**

Par suite de **(1)** et **(2)**, la famille $(I;J)$ est une base de l'espace vectoriel réel $J$.

Ainsi : $dim(V) = 2$.

0,25 pt

**2 - a) Montrons que l'ensemble $V$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$**

Tout d'abord, on a : $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I_2$

Donc : $J^2 = 4I_2$

Soient $M_{(a;b)}$ et $M_{(x;y}$ deux matrices de $V$, on a :

$$\begin{aligned} M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} &= (a \cdot I_2 + b \cdot J) \times (x \cdot I_2 + y \cdot J) \\ &= ax \cdot I_2 + ay \cdot J + bx \cdot J + by \cdot J^2 \\ &= ax \cdot I_2 + ay \cdot J + bx \cdot J + 4by \cdot I_2 \quad (J^2 = 4 \cdot I_2) \\ &= (ax + 4by) \cdot I_2 + (ay + bx) \cdot J \\ &= M_{(ax+4by;ay+bx)} \in V \end{aligned}$$

Donc : $\forall \big(M_{(a;b)}; M_{(x;y)}\big) \in V^2\ ;\ M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} \in V$

D'où : l'ensemble $V$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

0,25 pt

**b) Montrons que $(V;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.**

Sachant que $V$ est un sous-espace vectoriel réel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$, on déduit que $(V;+;\times)$ est un groupe abélien.

Et puisque $V$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$, et comme $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire d'unité de $I_2 = M_{(1;0)}$.

On déduit que la loi $\times$ est associative et distibutive par rapport à la loi $+$ dans $V$ avec la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$.

Et on a : $\forall \big(M_{(a;b)}; M_{(x;y)}\big) \in V^2$ :

$$M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} = M_{(ax+4by;ay+bx)} = M_{(xa+4yb;ya+xb)} = M_{(x;y)} \times M_{(a;b)}$$

Donc la loi $\times$ est commutative dans $V$.

D'où $(V;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

0,25 pt **3 - a)** **Calculons $M_{\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)}$.**

On a : $M_{\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)} = M_{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+4\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4};\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)\right)} = M_{(0;0)} = O_2$

0,25 pt **b)** **L'anneau $(V;+;\times)$ est-il un corps ?**

On sait que tout corps est nécessairement un anneau intègre.

Or d'après la question précédente, l'anneau $(V;+;\times)$ n'est pas intègre.

D'où $(V;+;\times)$ n'est pas un corps.

**4 -** Soit $X$ une matrice de l'ensemble $V$ telle que : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

0,50 pt **a)** **Montrons que ; $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2) \cdot I_2 = 0$**

On a : $X = M_{(a;b)} = a \cdot I_2 + b \cdot J$ et $J^2 = 4I_2$

Donc : 
$$\begin{aligned} X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2) \cdot I_2 &= (a \cdot I_2 + b \cdot J)^2 - 2a\,(a \cdot I_2 + b \cdot J) + (a^2 - 4b^2) \cdot I_2 \\ &= a^2 \cdot I_2 + b^2 \cdot J^2 + 2ab \cdot J - 2a^2 \cdot I_2 - 2abJ + (a^2 - 4b^2) \cdot I_2 \\ &= (a^2 + 4b^2 - 2a^2 + a^2 - 4b^2) \cdot I_2 + (2ab - 2ab) \cdot J \\ &= (ax + 4by) \cdot I_2 + (ay + bx) \cdot J \\ &= 0 \cdot I_2 + 0 \cdot J \\ &= O_2 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

**b)** On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$

0,50 pt **Montrons que la matrice $X$ admet un inverse dans $V$ qu'on déterminera.**

On a : 
$$\begin{aligned} X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2) \cdot I_2 = O_2 &\Longleftrightarrow X^2 - 2aX = (4b^2 - a^2) \cdot I_2 \\ &\Longleftrightarrow X \times (X - 2a \cdot I_2) = (4b^2 - a^2) \cdot I_2 \\ &\Longleftrightarrow X \times \left(\frac{X - 2a \cdot I_2}{4b^2 - a^2}\right) = I_2 \quad (4b^2 - a^2 \neq 0) \\ &\Longleftrightarrow X \times \left(\frac{a \cdot I_2 + b \cdot J - 2a \cdot I_2}{4b^2 - a^2}\right) = I_2 \quad (4b^2 - a^2 \neq 0) \\ &\Longleftrightarrow X \times \left(\frac{-a \cdot I_2 + b \cdot J}{4b^2 - a^2}\right) = I_2 \quad (4b^2 - a^2 \neq 0) \\ &\Longleftrightarrow X \times M_{\left(\frac{-a}{4b^2 - a^2};\frac{b}{4b^2 - a^2}\right)} = I_2 \quad (4b^2 - a^2 \neq 0) \end{aligned}$$

Par suite la matrice $X = M_{(a;b)}$ admet un inverse dans $V$ qui est définie comme suit :

$$\boxed{X^{-1} = M_{\left(\frac{-a}{4b^2 - a^2};\frac{b}{4b^2 - a^2}\right)} \in V}$$

## Exercice 2 : (4 pts)

Soit $u$ un nombre complexe différent de $(1-i)$.

0,25 pt **1 - a) Développons $(iu-1-i)^2$.**

On a : $$\begin{aligned}(iu-1-i)^2 &= (iu-(1+i))^2\\ &= (iu)^2 - 2iu\,(1+i) + (1+i)^2\\ &= -u^2 + u\,(2-2i) + 1 + 2i + i^2\\ &= -u^2 + u\,(2-2i) + 2i\end{aligned}$$

0,75 pt **b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :$(E)\ :\ z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$.**

On a : $$\begin{aligned}\Delta &= (-2(u+1-i))^2 - 4\,(2u^2-4i)\\ &= 4\,(u^2+2u(1-i)+(1-i)^2) - 4\,(2u^2-4i)\\ &= 4\,(u^2+2u(1-i)+1-2i+i^2-2u^2+4i)\\ &= 4\,(-u^2+u(2-2i)+2i)\\ &= 4(iu-1-i)^2\\ &= [2(iu-1-i)]^2\end{aligned}$$

On pose : $\delta = 2(iu-1-i)$

Donc : $\Delta = \delta^2 \neq 0$, par suite l'équation $(E)$ admet deux solutions complexes et distinctes $z_1$ et $z_2$ définies par :

$$z_1 = \frac{2(u+1-i)+\delta}{2} = \frac{2(u+1-i)+2(iu-1-i)}{2} = (1+i)u-2i$$
$$z_2 = \frac{2(u+1-i)-\delta}{2} = \frac{2(u+1-i)-2(iu-1-i)}{2} = (1-i)u+2$$

**2 -** Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.

Soient les points $A\,((1+i)u-2i)$, $B\,((1-i)u+2)$, $U(u)$ et $\Omega(2-2i)$

0,50 pt **a) Déterminons l'affixe du point $I$ le milieu du segment $[AB]$, puis déterminer le vecteur de la translation $t$ qui transforme $U$ au point $I$.**

on a l'affixe du point $I$ est : $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{(1+i)u-2i+(1-i)u+2}{2} = u-i+1$

Soit $\vec{t}$ le vecteur de translation $t$, on a : $$\begin{aligned}t\,(U) = I &\iff \vec{t} = \overrightarrow{UI}\\ &\iff z_{\vec{t}} = z_{\overrightarrow{UI}}\\ &\iff z_{\vec{t}} = z_I - z_U\\ &\iff z_{\vec{t}} = u-i+1-u\\ &\iff z_{\vec{t}} = 1-i\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\vec{t}\,(1-i) \text{ est le vecteur de la translation } t.}$

0,50 pt **b) Soit $R$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que $R(A)=B$.**

Déterminons tout d'abord l'écriture complexe de la rotation $R$.

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe $(\mathcal{P})$ tels que : $R\,(M) = M'$

On a : $R(M) = M' \Longleftrightarrow z' - z_\Omega = e^{-\frac{i\pi}{2}}(z - z_\Omega)$

$$\Longleftrightarrow z' = -i(z - (2-2i)) + (2-2i)$$

$$\Longleftrightarrow z' = -iz + 2i + 2 + 2 - 2i$$

$$\Longleftrightarrow z' = -iz + 4$$

Donc : $R(M) = M' \Longleftrightarrow z' = -iz + 4$

Et on a : $-iz_A + 4 = -i((1+i)u - 2i) + 4$

$$= (1-i)u - 2 + 4$$

$$= (1-i)u + 2$$

$$= z_B$$

Par suite : $\boxed{z_B = -iz_A + 4 \Longleftrightarrow R(A) = B}$

0,50 pt **c) En déduire que les droite $(\Omega I)$ et $(AB)$ sont perpendiculaires.**

On a : $R(A) = B \Longleftrightarrow z_B - z_\Omega = e^{-\frac{i\pi}{2}}(z_A - z_\Omega)$

$$\Longleftrightarrow \frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = e^{-\frac{i\pi}{2}} \quad (z_A \neq z_\Omega)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right| = \left|e^{-\frac{i\pi}{2}}\right| \\ \arg\left(\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right) \equiv \arg\left(e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z_B - z_\Omega|}{|z_A - z_\Omega|} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |z_B - z_\Omega| = |z_A - z_\Omega| \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ **$\Omega$ A B est un rectangle triangle et isocèle en $\Omega$**

Et comme $I$ est le milieu du segment $[AB]$ et d'après la définition de la médiatrice d'un segment, on déduit que la droite $(\Omega I)$ est la médiatrice du segment $[AB]$

D'où : $\boxed{(\Omega I) \perp (AB)}$

0,75 pt **d) A partir du point $U$ , expliquons une méthode de construction des points $A$ et $B$.**

La construction des points $A$ et $B$ passe par plusieurs étapes :

I. A partir du point $U$, on construit le point $I$ en utilisant la relation : $t(U) = I \Longleftrightarrow \vec{t} = \overrightarrow{UI}$

II. On dessine la droite $(D)$ passant par la point $I$ et perpendiculaire à la droite $(\Omega I)$.

III. D'après la question précédente on a : $(\Omega I) \perp (AB)$

Donc nécéssairement $A$ et $B$ appartiennent à la droite $(D)$.

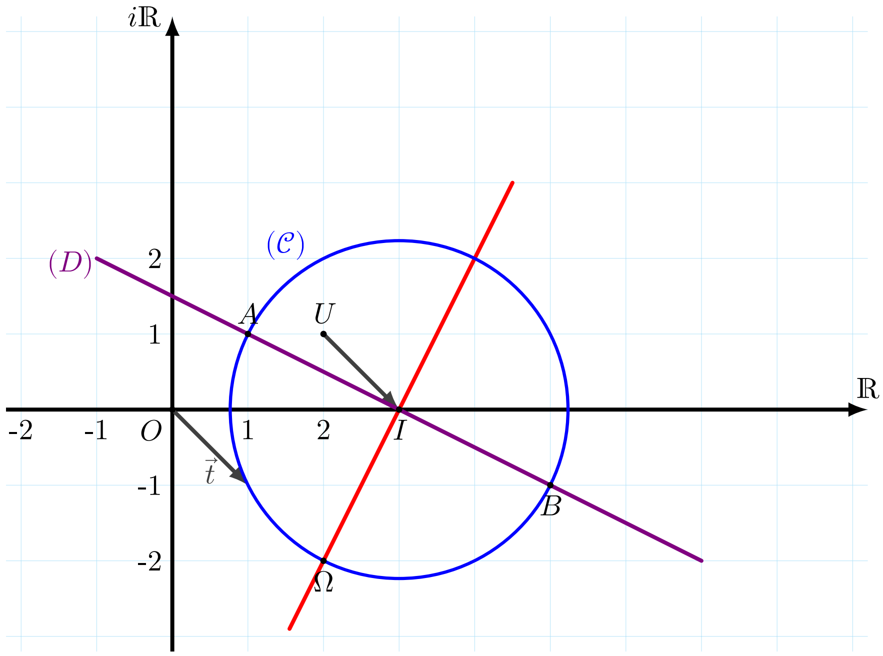
Et on a : $\Omega AB$ est un triangle rectangle et isocèle en $\Omega$ et $I$ est le milieu de l'hypothénus $[AB]$

Donc : $\Omega I = \Omega A = \Omega B$

Par suite $A$ et $B$ appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre $I$ et de rayon $\Omega I$.

Alors on trace le cercle $(\mathcal{C})$ et on prend les deux points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et la droite $(D)$.

Par exemple on prend : $u = 2 + i$ et on obtient la figure suivante :




**3 -** On pose $u = (1+i)a - 2i$ tel que : $a \in \mathbb{R}$.

0,50 pt **a)** **Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de $a$.**

On a : 
$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= ((1-i)u + 2) - ((1+i)u - 2i) \\ &= -2iu + 2 + 2i \\ &= -2i\left((1+i)a - 2i\right) + 2 + 2i \quad (u = (1+i)a - 2i) \\ &= -2ia(1+i) - 4 + 2 + 2i \\ &= 2\left(i - 1 - ia(1+i)\right) \\ &= 2\left(i - 1 - a(i-1)\right) \\ &= 2\left(i-1\right)\left(1-a\right) \end{aligned}$$

et on a : $z_{\overrightarrow{AU}} = z_U - z_A$

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AU}} &= z_U - z_A \\ &= u - ((1+i)u - 2i) \\ &= (1+i)a - 2i - (1+i)u + 2i \quad (u = (1+i)a - 2i) \\ &= (1+i)(a-u) \\ &= (1+i)\left(a - (1+i)a + 2i\right) \\ &= (1+i)\left(2i - ai\right) \\ &= i\left(1+i\right)\left(2-a\right) \\ &= \left(i-1\right)\left(2-a\right) \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = 2\left(i-1\right)\left(1-a\right) \text{ et } z_{\overrightarrow{AU}} = \left(i-1\right)\left(2-a\right)}$

0,25 pt **b) En déduire que les points $A$ , $B$ et $U$ sont alignés.**

Avant de répondre à cette question, il faut tout d'abord remarquer que :

$$u \neq 1-i \Leftrightarrow u = (1+i)a - 2i \neq 1-i \Leftrightarrow (1+i)a \neq 1+i \Leftrightarrow a \neq 1$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AU}} &= \left(i-1\right)\left(2-a\right) \\ &= \left(2-a\right)\left(i-1\right) \\ &= \frac{(2-a)}{2\left(1-a\right)} 2\left(1-a\right)\left(i-1\right) \; ; \; (a \neq 1) \\ &= \frac{(2-a)}{2\left(1-a\right)} z_{\overrightarrow{AB}} \\ &= k.z_{\overrightarrow{AB}} \; ; \; k = \frac{(2-a)}{2\left(1-a\right)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi : $z_{\overrightarrow{AU}} = k.z_{\overrightarrow{AB}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AU} = k.\overrightarrow{AB}$

ce qui signifie que les trois points $A$ , $B$ et $U$ sont alignés.

## Exercice 3 : (3 pts)

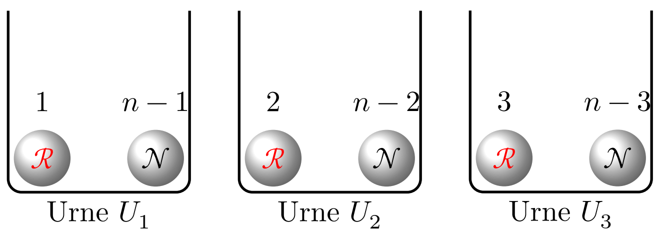
$n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On a trois urnes $U_1$, $U_2$ et $U_3$

L'urne $U_1$ contient une boule rouge et $(n-1)$ boules noires.

L'urne $U_2$ contient deux boules rouges et $(n-2)$ boules noires.

L'urne $U_3$ contient trois boules rouges et $(n-3)$ boules noires.




On considère l'expérience aléatoire suivante :

On choisit aléatoirement une urne parmi les trois urnes précédentes, puis on en tire simultanément deux boules.

Soit $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges tirées.

**0,25 pt** **1 - Déterminons les valeurs possibles de la variable aléatoire $X$.**

Quand on tire simultanément deux boules d'une des trois urnes, on a trois possibilités :

- Tirer deux boules rouges.
- Tirer une boule rouge et une boule noires.
- Tirer deux boules noires.

Donc les valeurs de la variable aléatoire $X$ sont : 0, 1 et 2.

D'une autre façon, le support de la variable aléatoire $X$ est : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

**0,75 pt** **2 - a) Montrons que $P[X = 2] = \dfrac{8}{3n(n-1)}$.**

D'après le théorème des probabilités totales on a :

$$P([X=2]) = P(U_1) \times P_{U_1}([X=2]) + P(U_2) \times P_{U_2}([X=2]) + P(U_3) \times P_{U_3}([X=2])$$

Or on a : $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \dfrac{1}{3}$

et on a : $P_{U_1}([X=2]) = 0$ (**car il n'y a qu'une seule boule rouge**)

$$P_{U_2}([X=2]) = \frac{C_2^2 \times C_0^{n-2}}{C_2^n} = \frac{1}{\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)} = \frac{2}{n(n-1)}$$

$$P_{U_3}([X=2]) = \frac{C_2^3 \times C_0^{n-3}}{C_2^n} = \frac{3}{\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)} = \frac{3}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)} = \frac{6}{n(n-1)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P([X=2]) &= P(U_1) \times P_{U_1}([X=2]) + P(U_2) \times P_{U_2}([X=2]) + P(U_3) \times P_{U_3}([X=2]) \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{n(n-1)} \\ &= \frac{8}{3n(n-1)} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{P([X=2]) = \dfrac{8}{3n(n-1)}}$

**0,75 pt** **b) Montrons que $P[X = 1] = \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$**

D'après le théorème des probabilités totales on a :

$$P([X=1]) = P(U_1) \times P_{U_1}([X=1]) + P(U_2) \times P_{U_2}([X=1]) + P(U_3) \times P_{U_3}([X=1])$$

Or on a : $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \dfrac{1}{3}$

et on a : $P_{U_1}([X=1]) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^{n-1}}{C_2^n} = \dfrac{1 \times (n-1)}{\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)} = \dfrac{(n-1)}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)} = \dfrac{2}{n}$

$$P_{U_2}([X=1]) = \frac{C_1^2 \times C_1^{n-2}}{C_2^n} = \frac{2 \times (n-2)}{\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)} = \frac{2(n-2)}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

$$P_{U_3}([X=1]) = \frac{C_1^3 \times C_1^{n-3}}{C_2^n} = \frac{3 \times (n-3)}{\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)} = \frac{3(n-3)}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)} = \frac{6(n-3)}{n(n-1)}$$

Ainsi : $P([X=1]) = P(U_1) \times P_{U_1}([X=1]) + P(U_2) \times P_{U_2}([X=1]) + P(U_3) \times P_{U_3}([X=1])$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{n} + \frac{1}{3} \times \frac{4(n-2)}{n(n-1)} + \frac{1}{3} \times \frac{6(n-3)}{n(n-1)}$$
$$= \frac{2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)}{3n(n-1)}$$
$$= \frac{12n-28}{3n(n-1)}$$
$$= \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$$

D'où : $\boxed{P([X=1]) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}}$

**0,75 pt**

**c)** **Déduisons la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.**

Tout d'abord, on doit calculer la probabilité de l'événement $[X=0]$.

On sait que : $P([X=0]) + P([X=1]) + P([X=2]) = 1$

Donc : $P([X=0]) = 1 - P([X=1]) - P([X=2])$

$$= 1 - \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)} - \frac{8}{3n(n-1)}$$
$$= \frac{3n(n-1)-4(3n-7)-8}{3n(n-1)}$$
$$= \frac{3n^2-3n-12n+28-8}{3n(n-1)}$$
$$= \frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ est présenté comme suit :

| **Valeurs de $X$ :** $x_k$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P([X=x_k])$ | $\frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$ | $\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ | $\frac{8}{3n(n-1)}$ |

**0,75 pt**

**3 -** **Sachant que les deux boules tirées sont rouges, quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne $U_3$ ?**

On a : $P_{[X=2]}(U_3) \times P([X=2]) = P_{U_3}([X=2]) \times P(U_3) \Longleftrightarrow P_{[X=2]}(U_3) = \dfrac{P_{U_3}([X=2]) \times P(U_3)}{P([X=2])}$

$$\Longleftrightarrow P_{[X=2]}(U_3) = \frac{\frac{6}{n(n-1)} \times \frac{1}{3}}{\frac{8}{3n(n-1)}}$$
$$\Longleftrightarrow P_{[X=2]}(U_3) = \frac{6}{8}$$
$$\Longleftrightarrow P_{[X=2]}(U_3) = \frac{3}{4}$$

D'où : $\boxed{P_{[X=2]}(U_3) = \frac{3}{4}}$

## Problème : (10 pts)

### Partie I

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 2(1-e^{-x}) - x$

**0,50 pt** **1 - a)** **Étudions les variations de la fonction $g$.**

On a $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car c'est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ :

- $x \mapsto 2(1-e^{-x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}^+$.
- $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ; $g'(x) = [2(1-e^{-x})-x]'$

$$\begin{aligned} &= [2(1-e^{-x})]' - (x)' \\ &= 2(1-e^{-x})' - 1 \\ &= 2e^{-x} - 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{e^x} - 1 \\ &= \frac{2-e^x}{e^x} \end{aligned}$$

Et puisque $e^x > 0$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}^+$.

Alors le signe de $g'(x)$ est le signe de $x \longmapsto 2-e^x$ dans $\mathbb{R}^+$.

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$

Avec : $g(0) = 2(1-e^{-0}) - 0 = 2(1-1) - 0 = 0$

$$\begin{aligned} g(\ln(2)) &= 2(1-e^{-\ln(2)}) - \ln(2) \\ &= 2(1-e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}) - \ln(2) \\ &= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \ln(2) \\ &= 1-\ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} 2(1-e^{-x}) - x \\ &= 2(1-0) - \infty \\ &= -\infty \end{aligned}$$

car : $\lim_{x\longrightarrow+\infty} -x = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{-x} = 0.$

Le tableau de variations de la fonction $g$ est comme suit :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(2)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-e^x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $1-\ln(2)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**0,50 pt** **2 - a)** **Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]\ln(4);\ln(6)[$.**

On a $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Et d'après le tableau des variations de la fonction $g$ :

- $g$ est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;\ln(2)]$, donc $g$ réalise une bijection de $]-\infty;\ln(2)]$ vers $g\left(]-\infty;\ln(2)]\right) = ]0;1-\ln(2)]$.
  Et comme $0 \notin ]0;1-\ln(2)]$, alors n'admet aucun antécédant dans l'intervalle $]-\infty;\ln(2)]$.
- $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[\ln(2);+\infty[$, donc $g$ réalise une bijection de $[\ln(2);+\infty[$ vers $g\left([\ln(2);+\infty[\right) = [1-\ln(2);+\infty[$.
  Et comme $0 \in [\ln(2);+\infty[$, alors admet un unique antécédant dans l'intervalle $[\ln(2);+\infty[$.

Par suite, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}^+$.

Et on a :

$$g(\ln(4)) = 2(1-e^{-\ln(4)})-\ln(4) = 2(1-e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)})-\ln(2^2) = 2\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)\right)-2\ln(2) = \frac{3}{2}-2\ln(2) > 0$$

$$g(\ln(6)) = 2(1-e^{-\ln(6)})-\ln(6) = 2(1-e^{\ln\left(\frac{1}{6}\right)})-\ln(6) = 2\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)\right)-\ln(6) = \frac{5}{3}-\ln(6) < 0$$

Donc : $g(\ln(4)) \times g(\ln(6)) < 0$

Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiares l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $]\ln(4);\ln(6)[$.

0,50 pt **b) Étudions le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.**

Le tableau de signe de $x \mapsto g(x)$ est comme suit :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(2)$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $1-\ln(2)$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| $g(x)$ | | | $+$ | | $0$ | $-$ | |

**3 -** On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} U_{n+1} &= 2\left(1-e^{-U_n}\right) \ ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ U_0 &= 1 \end{cases}$

0,50 pt — **Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq U_n < \alpha$.**

On procède par un raissonnement par récurrence :

**Initialisation :**

Pour $n = 0$ on a : $\leqslant U_0 = 1 \Rightarrow 1 \leqslant U_0 < \alpha$.

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

**Hérédité :**

On suppose que la proposition est vraie de $0$ jusqu'à un certain $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que : $1 \leqslant U_{n+1} < \alpha$

On a : $1 \leqslant U_n < \alpha \Longrightarrow -\alpha < -U_n \leq -1$

$$\Longrightarrow e^{-\alpha} < e^{-U_n} \leq e^{-1} \text{ (car } t \longmapsto e^t \text{est strictement croissante sur } \mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow -e^{-1} \leq -e^{-U_n} < -e^{-\alpha}$$

$$\Longrightarrow 1-e^{-1} \leq 1-e^{-U_n} < 1-e^{-\alpha}$$

$$\Longrightarrow 2\left(1-e^{-1}\right) \leq 2\left(1-e^{-U_n}\right) < 2\left(1-1-e^{-\alpha}\right)$$

$$\Longrightarrow 2\left(1-e^{-1}\right) \leq U_{n+1} < 2\left(1-e^{-\alpha}\right)$$

Or on a : $2\left(1-e^{-1}\right) \simeq 1,2642 > 1$ et $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\left(1-e^{-1}\right) - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2\left(1-e^{-1}\right) = \alpha$

Par suite : $2\left(1-e^{-1}\right) \leq U_{n+1} < 2\left(1-e^{-\alpha}\right) \Longrightarrow 1 \leq U_{n+1} < 2\left(1-1-e^{-\alpha}\right) < \alpha$

**Conclusion :**

D'après le principe de récurrence, on a : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 1 \leq U_n < \alpha}$

0,25 pt — **Montrons que :** $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; U_{n+1} - U_n = g(U_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $g(U_n) = 2\left(1-e^{-U_n}\right) - U_n = U_{n+1} - U_n$.

D'où le résultat.

0,25 pt — **Montrons que la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - U_n = g(U_n)$

et on sait que la fonction $g$ est stricetment décroissante sur l'intervalle $[\ln 2; +\infty[$, donc en particulier sur $[1; \alpha[$.

Et on a : $g(\alpha) = \alpha > 0$ car $\alpha \in ]\ln(4); \ln(6)[$.

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 1 \leq U_n < \alpha \Rightarrow g(\alpha) < g(U_n) \leq g(1) \Rightarrow 0 < \alpha < U_{n+1} - U_n$

Par suite, la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

0,50 pt — **Montrons que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.**

On a $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante et majorée par $\alpha$.

Donc d'après le théorème de convergence, la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite réelle $l$.

Déterminons la limite $L$ :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq U_n < \alpha$

Donc quand $n$ tend vers $+\infty$ on obtient : $1 \leq L \leq \alpha$

Et on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $g(U_n) = U_{n+1} - U_n$ et que $g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en particulier sur $[1; \alpha]$

Alors on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} - U_n \Longrightarrow g(L) = L - L = 0$.

Donc $L$ est une solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $\mathbb{R}^+$, et d'après la question **(2-a)** l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $\mathbb{R}^+$ est $\alpha$.

Par suite : $\boxed{L = \alpha}$

## Partie II

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1-e^x}{x^2}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1,00 pt **1 - Calculer les limites :** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

On a :
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \times \frac{1-e^x}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} \times \frac{e^x-1}{x} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{e^x}{x^2}$

$= -\infty$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{e^x}{x^3}$

$= -\infty$

car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$.

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty}$

0,50 pt **2 - a) Vérifions que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$.**

On a : $g(\alpha) = 0 \iff 2\left(1-e^{-\alpha}\right) - \alpha = 0$

$\iff 2\left(1 - \dfrac{1}{e^\alpha}\right) = \alpha$

$\iff 2\left(e^\alpha - 1\right) = \alpha e^\alpha$

$\iff \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha} = \dfrac{e^\alpha}{2}$

$\iff \dfrac{1-e^\alpha}{\alpha} = -\dfrac{e^\alpha}{2}$

Ainsi : $f(\alpha) = \dfrac{1-e^\alpha}{\alpha^2}$

$= \dfrac{1}{\alpha} \times \dfrac{1-e^\alpha}{\alpha}$

$= \dfrac{1}{\alpha} \times \left(-\dfrac{e^\alpha}{2}\right)$

$= -\dfrac{e^\alpha}{2\alpha}$

Et on a : $g(\alpha) = 0 \iff 2\left(1-e^{-\alpha}\right) - \alpha = 0$

$\iff 2\left(1-e^{-\alpha}\right) = \alpha$

$\iff 1 - e^{-\alpha} = \dfrac{\alpha}{2}$

$\iff -e^{-\alpha} = \dfrac{\alpha}{2} - 1 = \dfrac{\alpha-2}{2}$

$\iff e^{-\alpha} = \dfrac{2-\alpha}{2}$

$\iff e^{\alpha} = \dfrac{2}{2-\alpha}$

$\iff -e^{\alpha} = \dfrac{2}{\alpha-2}$

Donc : $f(\alpha) = -\dfrac{e^\alpha}{2\alpha} = \dfrac{2}{\alpha-2)\times 2\alpha} = \dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

D'où : $\boxed{f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}}$

0,75 pt **b) Montrons que : $f'(x) = \dfrac{g(x)e^x}{x^3}$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, puis dressons le tableau de**

**variations de la fonction $f$.** On a $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto -e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $x \mapsto 1-e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et on a $x \mapsto x^2$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

Par suite $x \mapsto \dfrac{1-e^x}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1-e^x}{x^2}\right)' \\
&= \frac{(1-e^x)' \times x^2 - (1-e^x) \times (x^2)'}{x^4} \\
&= \frac{-x^2e^x - 2x(1-e^x)}{x^4} \\
&= \frac{-xe^x - 2(1-e^x)}{x^3} \\
&= \frac{-xe^x - 2e^x(e^{-x}-1)}{x^3} \\
&= \frac{e^x(-x+2(1-e^{-x}))}{x^3} \\
&= \frac{e^x(2(1-e^{-x})-x)}{x^3} \\
&= \frac{g(x)e^x}{x^3}
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ f'(x) = \dfrac{g(x)e^x}{x^3}}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ e^x > 0$ et $x^3 > 0$.

Donc le signe de $x \mapsto f'(x)$ est le même de $x \mapsto g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par suite le tableau de variations de la fonction $f$ est comme suit :

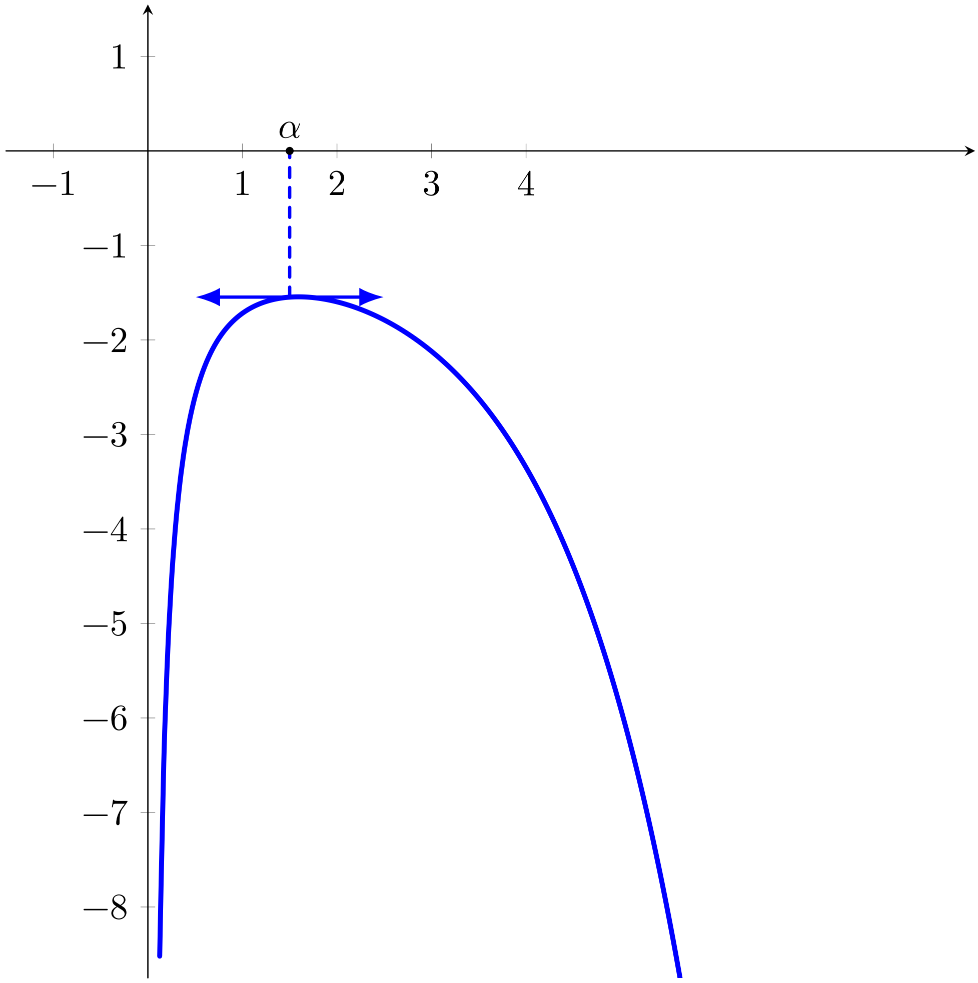
| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**0,50 pt** **3 - Traçons la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 1,5$).**

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ à droite en 0.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

et on a $f$ admet une valeur maximal en $\alpha$.




## Partie III

On considère la fonction $F$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} F(x) & = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt \ ; \quad (\forall x>0) \\ F(0) & = -\ln(2) \end{cases}$

0,50 pt **1 - a) En utilisant une intégration par parties, montrons que :**

$$(\forall x>0) \quad F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$$

On prend : $\begin{cases} v(t) & = 1-e^t \\ u'(t) & = \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v'(t) & = -e^t \\ u'(t) & = -\dfrac{1}{t} \end{cases}$

Donc on obtient pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^*$ : 
$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt &= \left[-\frac{1}{t} \times (1-e^t)\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{-1}{t} \times (-e^t)dt \\ &= \left[\frac{e^t-t}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \\ &= \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(\forall x>0) \ ; \ F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt}$

0,50 pt **b) Montrons que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ :** $e^x \ln(2) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leqslant e^{2x}\ln(2)$

On sait que la fonction $t \longmapsto e^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]0;+\infty[$.

Ainsi pour tout $x$ de $]0;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
0 < x \leq t \leq 2x &\Longrightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x} \text{ et } \frac{1}{t} > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t} \\
&\Longrightarrow \int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt \\
&\Longrightarrow e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \\
&\Longrightarrow e^x \left[\ln(t)\right]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \left[\ln(t)\right]_x^{2x} \\
&\Longrightarrow e^x \left[\ln(2x) - \ln(x)\right] \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \left[\ln(2x) - \ln(x)\right] \\
&\Longrightarrow e^x \ln\left(\frac{2x}{x}\right) \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \left(\frac{2x}{x}\right) \\
&\Longrightarrow e^x \ln(2) \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln(2)
\end{aligned}$$

Par suite : $\boxed{(\forall x > 0) \ ; \ e^x \ln(2) \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leqslant e^{2x} \ln(2)}$

**0,50 pt** **c)** **Calculons la limite** $\lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ puis déduisons que $F$ est continue à droite au point 0.

On a : $(\forall x > 0) \ ; \ e^x \ln(2) \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leqslant e^{2x} \ln(2)$

Avec : $\lim\limits_{\substack{0 \to e \\ 0 > e}}{}^{x} \ln(2) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{\substack{0 \to e \\ 0 > e}}{}^{2x} \ln(2) = \ln(2)$

Donc d'après le théorème de **Gendarmes**, on obtient : $\lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln(2)$.

Et on a : $(\forall x > 0) \ ; \ F(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$

Avec : $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{t \to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad (t = 2x)$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln(2)$

Donc : $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = 1 - 1 - \ln(2) = -\ln(2) = F(0)$

Par suite la fonction $F$ est continue à droite en 0.

**0,25 pt** **2 - a)** **Montrons que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ :** $F(x) \leqslant \frac{1 - e^x}{2x}$

Soit $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $0 < x \leq t \leq 2x \Longrightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x}$ et $\dfrac{1}{t} > 0$

$$\Longrightarrow -e^{2x} \leq -e^t \leq -e^x \text{ et } \frac{1}{t^2} > 0$$

$$\Longrightarrow 1-e^{2x} \leq 1-e^t \leq 1-e^x \text{ et } \frac{1}{t^2} > 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1-e^{2x}}{t^2} \leq \frac{1-e^t}{t^2} \leq \frac{1-e^x}{t^2}$$

$$\Longrightarrow \int_x^{2x} \frac{1-e^{2x}}{t^2}dt \leq \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt \leq \int_x^{2x} \frac{1-e^x}{t^2}dt$$

$$\Longrightarrow F(x) \leq (1-e^x)\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt$$

$$\Longrightarrow F(x) \leq (1-e^x)\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x}$$

$$\Longrightarrow F(x) \leq (1-e^x)\left[-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\right]$$

$$\Longrightarrow F(x) \leq (1-e^x)\times\frac{1}{2x}$$

$$\Longrightarrow F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$$

D'où : $\boxed{(\forall x > 0) \ ; \ F(x) \leqslant \dfrac{1-e^x}{2x}}$

0,25 pt **b) Calculons la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.**

On a : $(\forall x > 0) \ ; \ F(x) \leqslant \dfrac{1-e^x}{2x}$

Avec : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-e^x}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x} - \dfrac{e^x}{2x} = 0 - \infty = -\infty$

car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2x} = +\infty$

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$

0,50 pt **3 - Montrons que la fonction $F$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :**

$$(\forall x > 0) \ ; \ F'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$

On a : $(\forall x > 0) \ ; \ F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt = \int_x^{2x} f(t)dt$

Donc d'après la question **I-2-a** $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc $f$ est continue sur $]0;+\infty[$.

Par suite la fonction $f$ admet une primitive $G$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

Et comme $h \ : \ x \longmapsto x$ et $k \ : \ x \longmapsto 2x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0;+\infty[$ avec $h\left(]0;+\infty[\right) \subseteq ]0;+\infty[$ et $k\left(]0;+\infty[\right) \subseteq ]0;+\infty[$.

Ainsi les fonctions $x \longmapsto G(2x)$ et $x \longmapsto G(x)$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$.

Par suite $F \ : \ x \longmapsto F(x) = G(2x) - G(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= (G(2x)-G(x))' \\
&= (2x)'\times G'(2x)-(x)'\times G'(x) \\
&= 2\times f(2x)-f(x) \\
&= 2\times\frac{1-e^{2x}}{(2x)^2}-\frac{1-e^{x}}{x^2} \\
&= \frac{1-e^{2x}}{2x^2}-\frac{1-e^{x}}{x^2} \\
&= \frac{1-e^{2x}}{2x^2}-\frac{2(1-e^{x})}{2x^2} \\
&= \frac{1-e^{2x}-2(1-e^{x})}{2x^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1-e^{2x}-2+2e^{x}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{-e^{2x}+2e^{x}-1}{x^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{x^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{(e^{x}-1)^2}{x^2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)^2
\end{aligned}
$$

D'où : $\boxed{(\forall x>0)\ ;\ F'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)^2}$

**0,75 pt**

**4 - a)** **Soit $x$ un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$. Montrons qu'il existe un réel $c$ de l'intervalle $]0;x[$ tel que : $F(x)-F(0)=-\frac{1}{2}xe^{2c}$**

Soit $x$ un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On a $F$ est une fonction continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis on obtient :

$$(\exists y\in]0;x[)\ ;\ \frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(y)\Longleftrightarrow F(x)-F(0)=-\frac{1}{2}x\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)^2$$

Et on a la fonction $h\ ;\ x\longmapsto e^{x}$ est continue sur $[0;y]$ et dérivable sur $]0;y[$, donc d'après le théorème des accroissements finis on obtient :

$$(\exists c\in]0;y[)\ ;\ \frac{h(y)-h(0)}{y-0}=h'(c)\Longleftrightarrow\frac{e^{y}-1}{y}=e^{c}\Rightarrow\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)^2=e^{2c}$$

En combinant les deux résultats, on trouve que : $\boxed{(\exists c\in]0;y[\subset]0;x[)\ ;\ F(x)-F(0)=-\frac{1}{2}xe^{2c}}$

D'où le résultat.

**0,25 pt**

**b)** **Démontrons que pour tout $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ :** $-\frac{1}{2}e^{2x}\leqslant\frac{F(x)-F(0)}{x}\leqslant-\frac{1}{2}$.

D'après la question précédente :

$$(\exists c\in]0;x[)\ ;\ F(x)-F(0)=-\frac{1}{2}xe^{2c}\Leftrightarrow\frac{F(x)-F(0)}{x}=-\frac{1}{2}e^{2c}$$

$$\text{Ainsi on a : } c \in ]0;x[ \iff 0 < c < x$$
$$\iff 0 < 2c < 2x$$
$$\iff e^0 < e^{2c} < e^{2x}$$
$$\iff -\frac{1}{2}e^{2x} < -\frac{1}{2}e^{2c} < -\frac{1}{2}e^0 = -\frac{1}{2}$$
$$\iff -\frac{1}{2}e^{2x} < \frac{F(x)-F(0)}{x} < -\frac{1}{2}$$
$$\implies -\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$$

D'où : $\boxed{(\forall x > 0) \;;\; -\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}}$

**0,25 pt**

**c) Déduisons que la fonction $F$ est dérivable à droite au point $0$ et que : $F'_d(0) = -\frac{1}{2}$.**

On a : $(\forall x > 0) \;;\; -\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$

Avec : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{2}e^{2x} = -\frac{1}{2}e^0 = -\frac{1}{2}$

Donc d'après le théorème de **Gendarmes**, on obtient : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x} = -\frac{1}{2}$

Par suite $F$ est dérivable à droite au point 0 et on a : $\boxed{F'_d(0) = -\frac{1}{2}}$

R O Y A U M E D U M A R O C

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : normal 2010** juin 2010

# MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ........ **3,50 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ........ **3,50 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ........ **3,00 points**
- Exercice 4 : **Analyse** ........ **6,25 points**
- Exercice 5 : **Analyse** ........ **3,75 points**

## Exercice 1 : (3,50 pts)

**Les parties I et II sont indépendantes**

**Partie I :**

On munit l'ensemble $I = ]0;+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (a;b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

0,50 pt **1 -** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative sur $I$.

0,25 pt **2 -** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre $\varepsilon$ dans $I$ à déterminer.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $(I\backslash\{1\}, *)$ est un groupe commutatif. ($(I\backslash\{1\})$ désigne l'ensemble $I$ privé de 1)

0,25 pt **b)** Montrer que $J = ]1;+\infty[$ est un sous-groupe de $(I\backslash\{1\}, *)$.

**4 -** On munit $I$ de la loi de composition interne $\times$ ($\times$ est la multiplication dans $\mathbb{R}$).

0,25 pt **a)** Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$.

0,50 pt **b)** Montrer que $(I, \times, *)$ un corps commutatif.

**Partie II :**

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

0,50 pt **1 -** Calculer $A^2$ et $A^3$.

0,50 pt **2 -** En déduire que la matrice $A$ est non inversible.

## Exercice 2 : (3,50 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0,25 pt **1 - a)** Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe : $3 + 4i$.

0,50 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)$ : $4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$

**2 -** Soient $a$ et $b$ les solutions de l'équation $(E)$ avec $\text{Re}(a) < 0$ et les deux points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a$ et $b$ dans le plan complexe.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $\dfrac{b}{a} = 1 - i$.

0,75 pt **b)** En déduire que le triangle $AOB$ est rectangle et isocèle en $A$.

**3 -** Soient $C$ un point d'affixe $c$ du plan différent du point $A$ et $D$ l'image du point $B$ par la rotation de centre $C$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ ; et soit $L$ l'image du point $D$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

0,50 pt **a)** Déterminer en fonction de $c$ le complexe $d$ l'affixe du point $D$.

0,50 pt **b)** Déterminer en fonction de $c$ le complexe $l$ l'affixe du point $L$.

0,75 pt **c)** Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{l-c}{a-c}$ puis en déduire la nature du triangle $ACL$ .

## Exercice 3 : (3,00 pts)

1,00 pt **1 -** Déterminer tous les nombres entiers naturels $m$ tels que : $m^2+1 \equiv 0\ [5]$.

**2 -** Soit $p$ un nombre premier tel que : $p = 3+4k$ où $k$ est un entier naturel.
soit $n$ un entier naturel tel que : $n^2+1 \equiv 0\ [p]$.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1\ [p]$

0,50 pt **b)** Montrer que $n$ et $p$ sont premiers entre eux.

0,75 pt **c)** En déduire que : $(n^2)^{2k+1} \equiv 1\ [p]$

0,50 pt **d)** Déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel $n$ vérifiant : $n^2+1 \equiv 0\ [p]$.

## Exercice 4 : (6,25 pts)

**Partie I :**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$.
Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

0,50 pt **1 -** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.

0,75 pt **2 -** Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

0,75 pt **3 -** Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ à l'origine du repère puis construire la courbe $(\mathcal{C})$. (on prend $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2$ cm Et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$).

0,50 pt **4 -** Calculer l'intégrale $a = \int_0^1 f(x)\,dx$ puis en déduire en cm$^2$ l'aire de la partie plane limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

**Partie II :**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction numérique $f_n$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$.

0,25 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 1)$; $e^{-x^2} < e^{-x}$.

0,25 pt **b)** En déduire la limite de la fonction $f_n$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

0,75 pt **2 -** Étudier les variations de la fonction $f_n$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

0,50 pt **3 -** Montrer qu'il existe un nombre réel unique $u_n$ de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $f_n(u_n) = 1$.

0,25 pt **4 - a)** Vérifier que : $(\forall n \geqslant 2)$; $f_{n+1}(u_n) = u_n$.

0,75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

**5 -** On pose : $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

0,25 pt **a)** Montrer que : $0 < l \leqslant 1$.

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $-\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$.

0,50 pt **c)** En déduire que : $l = 1$.

## Exercice 5 : (3,75 pts)

On considère la fonction numérique $F$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.

**0,25 pt** **1 -** Montrer que $F$ est impaire.

**2 -** Pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ on pose : $\varphi(x)=\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.

**0,25 pt** **a)** Vérifier que : $(\forall x>0)$; $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$.

**0,50 pt** **b)** Montrer que $F$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x>0$.

**0,50 pt** **c)** En déduire le sens de variations de la fonction $F$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

**0,50 pt** **3 - a)** En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer que :

$$(\forall x>0)(\exists c\in]x;2x[):\quad F(x)=\frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

**0,25 pt** **b)** En déduire que : $(\forall x>0)$; $\frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$

**0,75 pt** **c)** Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

**0,75 pt** **d)** Vérifier que : $F\left(\sqrt{e-1}\right)<\sqrt{e-1}$ et $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\sqrt{e-1}}{2}$

Puis déduire que l'équation $F(x)=x$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : NORMAL 2010**

## Mathématiques

### Exercice 1 : (3.5 pts)

On muni l'ensemble $I = ]0; +\infty[$ par une loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall\,(a;b) \in I \times I) \ : \quad a * b = e^{ln(a).ln(b)}$$

### Partie I

0.5 pt **1 -** Montrons que la loi $*$ est commutative dans $I$.

Soit $a, b \in I$

$$\texttt{On a} \quad \begin{aligned} a * b &= e^{ln(a).ln(b)} \\ &= e^{ln(b).ln(a)} \\ &= b * a \end{aligned}$$

Donc $(\forall (a,b) \in I^2)\ a * b = b * a$. C-à-d que la loi $*$ est commutative.

Montrons que la loi $*$ est associative dans I.

Soit $(a, b, c) \in I^3$, on a

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= e^{ln(a).ln(b*c)} \\ &= e^{ln(a).ln\left(e^{ln(b).ln(c)}\right)} \\ &= e^{ln(a).ln(b)ln(c)} \\ &= e^{ln\left(e^{ln(a)ln(b)}\right).ln(c)} \\ &= e^{ln(a*b).ln(c)} \\ &= (a * b) * c \end{aligned}$$

Donc $(a, b, c \in I^3)\ \ a * (b * c) = (a * b) * c$. C-à-d que la loi $*$ est associative.

**0.25 pt** **2 -** Montrons que la loi $*$ admet un élément neutre $\epsilon$ dans $I$ à déterminer.

On a $\epsilon$ l'élément neutre de la loi $*$ dans I $\Leftrightarrow$ $(\forall a \in I) : a * \epsilon = \epsilon * a = a$.

Comme la loi $*$ est commutative, alors pour déterminer $\epsilon$ il suffit de résoudre l'une des équations $a * \epsilon = a$ ou $\epsilon * a = a$ pour tout $a \in I$.

Soit $a \in I$ , on a

$$\begin{aligned} a * \epsilon = a &\Leftrightarrow e^{ln(a).ln(\epsilon)} = a \\ &\Leftrightarrow ln\,(a)\,.ln\,(\epsilon) = ln\,(a) \\ &\Leftrightarrow ln\,(\epsilon) = \frac{ln\,(a)}{ln\,(a)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \epsilon = e \in I \end{aligned}$$

Ainsi la loi $*$ admet un élément neutre $\epsilon = e$.

**0.75 pt** **3 - a)** Montrons que $(I\backslash\{1\}, *)$ est un groupe abélien.

Soient $a$ et $b \in I\backslash\{1\}$.

On a $a$ et $b \in I\backslash\{1\}$ donc $ln\,(a) \neq 0$ et $ln\,(b) \neq 0$

Alors $ln\,(a)\,ln\,(b) \neq 0$

D'où $e^{ln(a)ln(b)} \neq 1$ et puisque $e^{ln(a)ln(b)} > 0$

Ainsi $(\forall a, b \in I\backslash\{1\}) : a * b \in I\backslash\{1\}$

Par suite $I\backslash\{1\}$ une partie stable pour la loi $*$

Comme la loi $*$ est commutative et associative dans I, alors l'est aussi dans $I\backslash\{1\}$.

On a $e$ est l'élément neutre de la loi $*$ dans I. Donc $e$ est l'élément neutre de $*$ dans $I\backslash\{1\}$ : car $e \neq 1$ .

Soit $a \in I\backslash\{1\}$.

Un élément x est le symétrie de a dans $I\backslash\{1\}$ $\Leftrightarrow$ $a * x = x * a = e$

On a

$$\begin{aligned} x * a = e &\Leftrightarrow e^{ln(x).ln(a)} = e \\ &\Leftrightarrow ln\,(x)\,.ln\,(a) = ln\,(e) = 1 \\ &\Leftrightarrow ln\,(x) = \frac{1}{ln\,(a)} \quad ( \quad \text{car } \; a \in I \setminus \{1\} \;\Rightarrow\; ln(a) \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{ln(a)}} \neq 1 \end{aligned}$$

Ainsi tout élément a de $I\backslash\{1\}$ admet un symétrique $e^{\frac{1}{ln(a)}}$ pour la loi $*$.

Conclusion : On a : $*$ est un loi de composition interne sur $I\backslash\{1\}$ qui est commutative et associative, il admet un élément neutre et dont tous les éléments de $I\backslash\{1\}$ sont symétrisable dans $I\backslash\{1\}$.

D'où $(I\backslash\{1\}, *)$ est un groupe abélien.

**0.25 pt** **b)** Montrons que $]1; +\infty[$ est un sous-groupe du groupe $(I\backslash\{1\}, *)$.

On a $]1; +\infty[ \subset I\backslash\{1\}$ car : $I\backslash\{1\} = ]0; 1[\bigcup]1; +\infty[$, de plus $]1; +\infty[ \neq \emptyset$.

Cela signifie que $]1; +\infty[$ est une partie non vide dans $I\backslash\{1\}$.

Soient $a, b \in ]1; +\infty[$.

Montrons que $a * b' \in ]1;+\infty[$ avec $b'$ le symétrique de b dans $I\backslash\{1\}$.

On a

$$\begin{aligned} a * b' &= a * e^{\left(\frac{1}{ln(b)}\right)} \\ &= e^{ln(a).ln\left(e^{\left(\frac{1}{ln(b)}\right)}\right)} \\ &= e^{\frac{ln(a)}{ln(b)}} \end{aligned}$$

D'autre part on a $a \in ]1;+\infty[$ et $b \in ]1;+\infty[$

C-à-d que $a > 1$ et $b > 1$, ce qui implique que $ln\,(a) > 0$ et $ln\,(b) > 0$.Par suite $\dfrac{ln\,(a)}{ln\,(b)} > 0$

Ainsi $e^{\left(\frac{ln(a)}{ln(b)}\right)} > 1$. C-à-d que $a * b' \in ]1;+\infty[$

En conclusion $(\forall a, b \in ]1;+\infty[)\,; a * b' \in ]1;+\infty[$.

De ce qui précède on déduit que $]1;+\infty[$ est un sous-groupe de $(I\backslash\{1\}, *)$.

**4 -** on muni $I$ avec une loi de composition interne $\times$ ($\times$ la multiplication dans $\mathbb{R}$).

**0.25 pt** **a)** Montrons que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$.

Soient $a, b, c \in I$,on a

$$\begin{aligned} a * (b \times c) &= e^{ln(a).ln(b\times c)} \\ &= e^{ln(a).ln(b)+ln(a).ln(c)} \\ &= e^{ln(a).ln(b)} \times e^{ln(a).ln(c)} \\ &= (a * b) \times (a * c) \end{aligned}$$

Donc $a * (b \times c) = (a * b) \times (a * c)$. comme la loi $*$ est commutative alors, on a aussi $(b \times c) * a = (b * a) \times (c * a)$

D'où la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$ dans $I$.

**0.5 pt** **b)** Montrons que $(I, \times, *)$ est un corps.

On a $I$ une partie non vide de $\mathbb{R}^*$

Soient $x, y \in I$, on a

$$\begin{aligned} x, y \in I &\Longrightarrow x > 0 \text{ et } y > 0 \\ &\Longrightarrow \frac{x}{y} > 0 \\ &\Longrightarrow x \times y^{-1} > 0 \\ &\Longrightarrow (x \times y^{-1}) \in I \end{aligned}$$

D'où $(I, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ : $(I, \times)$ est un groupe abélien

D'autre part on a $(I\backslash\{1\}, *)$ est un groupe abélien et la loi $*$ est distributive par rapport à $\times$

Ainsi $(I, \times, *)$ est un corps commutative.

## Partie II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

0.5 pt **1 -** Calculons $A^2$ et $A^3$.

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Après le calcule on trouve que $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0.5 pt **2 -** Déduisons que la matrice $A$ n'admet pas d'inverse.

Par l'absurde supposons que la matrice A est inversible dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Donc $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$ avec $\times$ le produit des matrices et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A \times A^{-1} = I$. On multiplions les deux extrémités de l'équation par $A^2$

On trouve $A^3 \times A^{-1} = A^2$. Comme $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ( la matrice nulle ) alors $A^2$ est une matrice nulle.

Ce qui est absurde car $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où la matrice A n'est pas inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

## Exercice 2 : (3.5 pts)

On considère l'espace complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

0.25 pt **1 - a)** Déterminons les deux racines carrés du nombre complexe $3 + 4i$. Soit $x + iy$ un racine carré du nombre complexe $3 + 4i$.

Ce qui signifie que : $(x + iy)^2 = 3 + 4i$

$$\begin{aligned}(x+iy)^2 = 3+4i &\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy = 3+4i\\ &\Leftrightarrow x^2-y^2 = 3 \text{ et } 2xy = 4\\ &\Leftrightarrow x^2-y^2 = 3 \text{ et } xy = 2\\ &\Leftrightarrow x^2-y^2 = 3 \text{ et } x = \frac{2}{y}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{y}\right)^2 - y^2 = 3 \text{ et } xy = 2\\ &\Leftrightarrow y^4+3y^2-4 = 0 \text{ et } x = \frac{2}{y}\end{aligned}$$

Résoudre l'équation $y^4+3y^2-4=0$

En pose $t=y^2$ en trouve $t^2+3t-4=0$

Cette dernière équation admet deux solutions $t=1$ ou $t=-4$

Donc l'équation $y^4+3y^2-4=0$ admet quatre solutions $-1; 1; -2i$ et $2i$

Si y=-1 alors : x= -2

Si y=1 alors : x= 2

Si y=-2i alors : x= i

Si y=2i alors : x= -i

D'où $3+4i$ admet deux racines carré : $2+i$ et $-2-i$.

**0.5 pt** **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 4z^2-10iz-7-i=0$

Calcule le discriminent

$$\begin{aligned}\texttt{On a}\quad \Delta &= (10i)^2 - 4\times 4\times(-7-i)\\ &= -100+16(7+i)\\ &= 4(3+4i)\\ &= (2(2+i))^2 \neq 0 \quad \text{d'après 1-a}\end{aligned}$$

Alors l'équation admet deux solutions complexes différentes :
$z_1 = \dfrac{10i-4-2i}{8} = \dfrac{8i-4}{8}$ et $z_1 = \dfrac{12i+4}{8}$

Donc l'équation $(E)$ admet deux solutions a et b tels que : $a = -\dfrac{1}{2}+i$ et $b = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$

**0.25 pt** **2 - a)** Vérifions que : $\dfrac{b}{a} = 1-i$.

On a : $a = -\dfrac{1}{2}+i$ et $b = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}{-\frac{1}{2}+i}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-i\right)}{\left(-\frac{1}{2}+i\right)\left(-\frac{1}{2}-i\right)}\\ &= \frac{\frac{5}{4}-\frac{5}{4}i}{\frac{5}{4}}\\ &= 1-i\end{aligned}$$

D'où $\frac{b}{a} = 1-i$

**0.75 pt** **b)** Déduisons que le triangle $AOB$ isocèle et rectangle en $A$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{0-a} &= -\frac{b}{a}+1\\ &= -(1-i)+1\\ &= i\\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

Donc $\frac{b-a}{0-a} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Signifie que

$$\begin{cases}\frac{AB}{AO} & = & 1\\ \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right) & \equiv & \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{cases}$$

Signifie que

$$\begin{cases}AB & = & AO\\ \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right) & \equiv & \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{cases}$$

Par suite $AOB$ est un triangle rectangle isocèle et rectangle en point $A$.

**3 -** Soit $C$ un point d'affixe $c$ et différent du point $A$, soit $D$ l'image du point $B$ par la rotation de centre $C$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit $L$ l'image du point $D$ par la translation du vecteur $\overrightarrow{AO}$.

**0.5 pt** **a)** Déterminons $c$ en fonction du nombre complexe $d$ l'affixe du point $D$.

On a $D$ l'image de $B$ par la rotation de centre $C$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Donc par définition de la rotation complexe

$$\text{On a}\quad (d-c)=e^{i\frac{\pi}{2}}(b-c) \Leftrightarrow d=c+i(b-c)$$
$$\Leftrightarrow d=c+ib-ic$$
$$\Leftrightarrow c(1-i)=d-ib$$
$$\Leftrightarrow c(1-i)=d-i\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)$$
$$\Leftrightarrow c(1-i)=d+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$
$$\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}(1+i)d+\left(1+\frac{1}{2}i\right)$$

$\boxed{\text{D'où } c=\frac{1}{2}(1+i)d+\left(1+\frac{1}{2}i\right)}$

**0.5 pt** **b)** Déterminons c en fonction du nombre complexe l l'affixe du point L.

On a L l'image de D par la translation du vecteur $\overrightarrow{AO}$

Par définition de la translation :

$$\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow (l-d)=(0-a)$$
$$\Leftrightarrow l+(i-1)c+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i=-a$$
$$\Leftrightarrow l+(i-1)c+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}-i$$
$$\Leftrightarrow l=(1-i)c-1-\frac{1}{2}i$$

$\boxed{\text{D'où } l=(1-i)c-1-\frac{1}{2}i}$

**0.75 pt** **c)** Déterminons l'écriture algébrique du nombre complexe $\frac{l-c}{a-c}$puis déduisons la nature du triangle $ACL$.

On a

$$\frac{l-c}{a-c}=\frac{(1-i)c-1-\frac{1}{2}i-c}{i-\frac{1}{2}-c}$$
$$=\frac{-ic-1-\frac{1}{2}i}{i-\frac{1}{2}-c}$$
$$=\frac{i\left(-c+i-\frac{1}{2}\right)}{i-\frac{1}{2}-c}$$
$$=i$$

Donc $\dfrac{l-c}{a-c} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Signifie que

$$\begin{cases} \dfrac{CL}{CA} & = & 1 \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CL}\right) & \equiv & \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$$

Par suite le triangle $ALC$ est isocèle et rectangle en point C.

## Exercice 3 : (3 pts)

1 pt

**1 -** Déterminons les entiers naturels m tel que : $m^2+1 \equiv 0\,[5]$.

On a

$$m^2+1 \equiv 0\,[5] \Leftrightarrow 5/\left(m^2+1\right)$$

Et on sait que $5/\left(-5\right)$

Par suite $5/m^2+1-5$

C-à-d que $5/\left(m-2\right)\left(m+2\right)$

Comme 5 est un nombre premier alors, $5/m-2$ ou $5/m+2$

Ce qui implique que $5/m-2$ ou $5/m+2-5$

Signifie que $m \equiv 2\,[5]$ ou $m \equiv 3\,[5]$

Dans l'ensemble $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on a $m \in \left\{\overline{2};\overline{3}\right\}$.

**2 -** Soit p un un nombre premier tel que : $p = 3+4k$ avec k un entier naturel. Et soit n un entier naturel tel que : $n^2+1 \equiv 0\,[p]$.

0.25 pt

**a)** Vérifions que : $\left(n^2\right)^{1+2k} \equiv -1\,[p]$.

On a

$$\begin{aligned} n^2+1 \equiv 0\,[p] &\Rightarrow n^2 \equiv -1\,[p] \\ &\Rightarrow \left(n^2\right)^{1+2k} \equiv \left(-1\right)^{1+2k}\,[p] \\ &\Rightarrow \left(n^2\right)^{1+2k} \equiv -1\,[p] \quad \text{car 1+2k un nombre impaire} \end{aligned}$$

D'où $\left(n^2\right)^{1+2k} \equiv -1\,[p]$

0.5 pt

**b)** Montrons que n et p sont premier entre eux.

On a d'apres -3-a

$$\begin{aligned}(n^2)^{1+2k} \equiv -1\,[p] &\Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z}) : (n^2)^{1+2k} + 1 = pu \\ &\Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z}) : pu + n\,\underbrace{(-n^{1+4k})}_{v} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists u, v \in \mathbb{Z}) : pu + nv = 1 \\ &\overset{T.B}{\Leftrightarrow} p \wedge n = 1\end{aligned}$$

D'où n et p sont premier entre eux.

0.75 pt **c)** Déduisons que : $(n^2)^{1+2k} \equiv 1\,[p]$.

On a p est un nombre premier et $p \wedge n = 1$

Donc, d'après le théorème de Fermat : $n^{p-1} \equiv 1\,[p]$

On a $p = 4k + 3$, donc $(n^2)\,2k + 1 \equiv 1\,[p]$.

D'où $(n^2)\,2k + 1 \equiv 1\,[p]$

0.5 pt **d)** Déduisons qu'il n'existe aucun entier naturel n tel que : $n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un nombre n tel que $n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$

Donc

$$\begin{cases} (n^2)^{1+2k} & \equiv & -1\,[p] \\ (n^2)^{1+2k} & \equiv & 1\,[p] \end{cases}$$

Donc $1 \equiv -1\,[p]$

Signifie que $2 \equiv 0\,[p]$, ce qui équivalent à $p/2$.

Comme p est premier alors : $p = 2$

ce implique qu'il existe k dans $\mathbb{N}$ : $3 + 4k = 2$ Signifie que $(\exists k \in \mathbb{N}) : 4k = -1$

Ce qui impossible.

Ainsi il n'existe aucune entier naturel n qui vérifier $n^2 + 1 \equiv 0\,[p]$

## Exercice 4 : (6.25 pts)

### Partie I

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$. $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de la fonction $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0.5 pt **1 -** Calculons la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} 4xe^{-x^2}\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{4}{x}\right)\times\frac{1}{\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)} \text{ on pose } t=x^2\\ &= \lim_{t\longrightarrow+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right)\times\frac{1}{\left(\frac{e^{t}}{t}\right)}\\ &= 0\end{aligned}$$

D'où $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=0$

**0.75 pt** **2 -** Étudions les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dressons son tableau des variations.

La fonction $f$ est dérivable sur $[0:+\infty[$ comme le produit et composée de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

$$\texttt{On a}\quad (\forall x\in[0;+\infty[)\ f'(x) = \left(4xe^{-x^2}\right)' = 4e^{-x^2}+4x\times\left(-2xe^{-x^2}\right) = 4\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$$

Comme pour tout x dans $[0:+\infty[$ : $4e^{-x^2}>0$ alors, le signe de $f'(x)$ est le signe de $1-2x^2$.

Si : $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $f'(x)=0$

Si : $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $f'(x)<0$

Si : $x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $f'(x)>0$

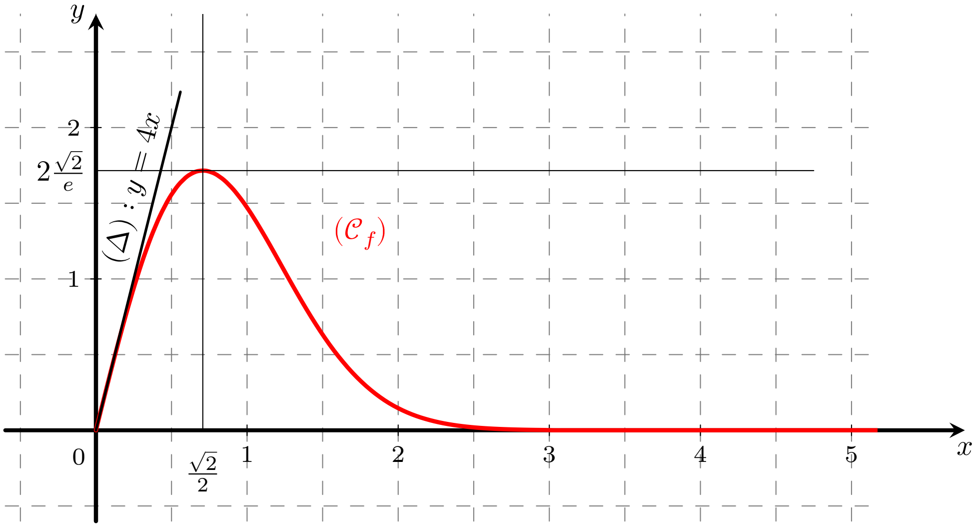
| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$ | $\searrow$ | $0$ |

**0.75 pt** **3 -** Déterminons l'équation de la demie-tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ à l'origine du repère, puis construisons $(\mathcal{C}_f)$.

L'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en point O est :

$(\Delta): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

Signifie que $(\Delta) : y = 4x$ avec $x \geq 0$




**0.5 pt** **4 -** Calculons l'intégrale $a = \int_0^1 f(x)\,dx$, puis déduisons en centimètre carré l'aire déterminé par $(\mathcal{C}_f)$ , les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R})\quad \left(e^{-x^2}\right)' = -2e^{-x^2}$

C-à-d $(\forall x \in \mathbb{R})\quad -2\left(e^{-x^2}\right)' = 4xe^{-x^2}$

$$\texttt{Alors}\quad \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 4xe^{-x^2}dx$$
$$= \int_0^1 \left(-2e^{-x^2}\right)' dx$$
$$= -2\left[e^{-x^2}\right]_0^1$$
$$= -2\left(e^{-1} - 1\right)$$
$$= 2\left(1 - e^{-1}\right)$$

D'où $\int_0^1 f(x) = 2\left(1 - e^{-1}\right)$

Comme $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2cm$

$$\texttt{Alors}\quad a = \int_0^1 |f(x)|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$
$$= \int_0^1 f(x)\,dx \times 2cm \times 2cm$$
$$= 2\left(1 - e^{-1}\right) \times 4cm^2$$
$$= 8\left(1 - e^{-1}\right) cm^2$$

D'où $a = 8\left(1 - e^{-1}\right) cm^2$

## PARTIE II

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2 .

On considère la fonction numérique $f_n$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$ .

**0.25 pt**

**1 - a)** Montrons que $(\forall x > 1) \quad e^{-x^2} < e^{-x}$.

Soit $x > 1$. On a

$$\begin{aligned} x^2 > x &\Rightarrow -x^2 < -x \\ &\Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x} \text{ car le fonction } x \longmapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où } (\forall x > 1) \quad e^{-x^2} < e^{-x}}$

**0.25 pt**

**b)** Déduisons la limite de la fonction $f_n$ quand $x$ tende vers $+\infty$.

On a $(\forall x > 1) \quad 0 < e^{-x^2} < e^{-x}$

Donc $(\forall x > 1) \quad 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

D'autre part

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^n e^{-x} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^n e^{-\frac{nx}{n}} \\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(xe^{-\frac{x}{n}}\right)^n \\ &= \lim_{u\longrightarrow-\infty} (-nue^u)^n \qquad \text{On pose } u = \frac{x}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\longrightarrow+\infty} 4x^n e^{-x} = 0$ et comme $(\forall x > 1) \quad 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

$\boxed{\text{Alors } \lim_{x\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 0}$

**0.75 pt**

**2 -** Étudions les variations de la fonction $f_n$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dressons son tableau des variations.

La fonction $f_n$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} \texttt{On a} \quad (\forall x \in [0;+\infty[)\ f_n'(x) &= \left(4x^n e^{-x^2}\right)' \\ &= 4nx^{n-1}e^{-x^2} - 8x^{n+1}x^{-x^2} \\ &= 4x^{n-1}e^{-x^2}(n - 2x^2) \end{aligned}$$

Comme $(\forall x \in [0;+\infty[)\ 4x^{n-1}e^{-x^2} > 0$ alors le signe de $f_n'(x)$ est le signe de $n - 2x^2$ sur $[0;+\infty[$.

Si : $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ alors $f'_n(x) = 0$

Si : $x > \sqrt{\frac{n}{2}}$ alors $f'_n(x) < 0$

Si : $x < \sqrt{\frac{n}{2}}$ alors $f'_n(x) > 0$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{\frac{n}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_n(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n$ | $0$ | $\nearrow$ | $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$ | $\searrow$ | $0$ |

**0.5 pt** **3 -** Montrons que : $(\exists! U_n \in ]0;1[) : f_n(U_n) = 1$ .

D'après le tableau des variations de la fonction $f_n$. $f_n$ est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[1;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

Montrons que $[0;1] \subset \left[0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

Soit $x \in [0;1]$

Donc $0 \leq x^2 \leq 1$ et on a $0 \leq 2 \leq n$

Alors : $0 \leq 2x^2 \leq n$

Donc $1 \leq x \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$,par suite $\left(\forall x \in [0;1] : x \in \left[0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\right.$

D'où $[0;1] \subset \left[0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

Comme $f_n$ est continue et strictement croissante sur $\left[0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ et $[0;1] \subset \left[0;\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ alors, $f_n$ continue et strictement croissante vers $[0;1]$

Par suite $f_n$ est une bijection de $[0;1]$ sur $f_n([0;1]) = \left[0;\frac{4}{e}\right]$.

En pose $g_n(x) = f_n(x) - 1$ pour tout $x$ de $[0;1]$

$$\texttt{On a} \quad \begin{aligned} g_n(0).g_n(1) &= (f_n(0) - 1)(f_n(1) - 1) \\ &= (0-1)\left(\frac{4}{e} - 1\right) \\ &\approx -0,47 < 0 \end{aligned}$$

D'après ce qui précède et d'après le théorème des valeurs intermédiaire $(T.V.I)$ L'équation $g_n(x) = 0$ a une seule solution dans l'intervalle $]0;1[$ : $(\exists! U_n \in ]0;1[)$ : $g_n(U_n) = 0$

$\boxed{\text{Autrement dit l'équation } f_n(x) = 1 \text{ admet une seule solution dans l'intervalle } ]0;1[.}$

**0.25 pt** **4 - a)** Vérifions que : $(\forall n \geq 2) \quad f_{n+1}(U_n) = U_n$ .

Soit $x \in ]0;1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

On a

$$\begin{aligned} f_n(x) = 4x^{n+1}e^{-x^2} &\Rightarrow f_{n+1}(x) = 4x^{n+1}e^{-x^2} \\ &\Rightarrow f_{n+1}(x) = x\left(4x^n e^{-x^2}\right) \\ &\Rightarrow f_{n+1}(x) = x f_n(x) \\ &\Rightarrow f_{n+1}(U_n) = U_n f_n(U_n) \text{ car } U_n \in ]0;1[ \end{aligned}$$

D'après la question (3) on a : $f_n(U_n) = 1$

$\boxed{\text{Donc } (\forall n \geq 2) \quad f_{n+1}(U_n) = U_n.1 = U_n.}$

0.75 pt **b)** Montrons que la suite $(U_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante, puis déduisons qu'elle est convergente.

Soit $n \geq 2$

On a $f_n$ une fonction continue et croissante sur $[0;1]$, on a aussi $U_n < 1$ car $U_n \in ]0;1[$

Donc $f_{n+1}(U_n) < f_{n+1}(U_{n+1})$

Car $f_{n+1}(U_n) = U_n$ et $f_{n+1}(U_{n+1}) = 1$

Comme $f_n$ est un bijection de $[0;1]$ vers $\left[0;\dfrac{4}{e}\right]$

Alors $(\forall n \geq 2) \quad U_n < U_{n+1}$

$\boxed{\text{D'où } (U_n)_n \text{ est une suite croissante,et comme elle est majorée par 1 alors elle est convergente.}}$

**5 -** En pose $l = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n$

0.25 pt **a)** Montrons que : $0 < l \leq 1$ .

On a $(\forall n \geq 2) \quad 0 < U_n < 1$

Donc $0 \leq \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n \leq 1$

$\boxed{\text{D'où } 0 < l \leq 1}$

La suite $(U_n)_n$ est majorée et croissante donc il impossible que 0 sera sa limite, cela justifie l'écriture $0 < l \leq 1$.

0.25 pt **b)** Montrons que : $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{ln(4)}{n} < ln(U_n) < \dfrac{1}{n} - \frac{ln(4)}{n}$ .

Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \texttt{On a} \quad 0 < U_n < 1 &\Rightarrow 0 < (U_n)^2 < 1 \\ &\Rightarrow 1 < e^{(U_n)^2} < e \text{ car la fonction } x \longmapsto e^x \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

On a $f_n(U_n) = 1$ signifie que $4(U_n)^n e^{-(U_n)^2} = 1$

Donc $e^{(U_n)^2} = 4(U_n)^n$

On a $1 < e^{(U_n)^2} < e \Rightarrow 1 < 4(U_n)^n < e$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < (U_n)^n < \frac{e}{4}$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{1}{4}\right) < ln\left((U_n)^n\right) < ln\left(\frac{e}{4}\right) \text{ car la fonction ln est croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow -ln(4) < nln(U_n) < 1 - ln(4)$$

$$\Rightarrow -\frac{ln(4)}{n} < ln(U_n) < \frac{1}{n} - \frac{ln(4)}{n}$$

$\boxed{\text{D'où } (\forall n \geq 2) \quad -\frac{ln(4)}{n} < ln(U_n) < \frac{1}{n} - \frac{ln(4)}{n}\ .}$

**0.5 pt** **c)** Déduisons que : $l = 1$ .

On a $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{ln(4)}{n} < ln(U_n) < \frac{1}{n} - \frac{ln(4)}{n}$

Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} -\frac{ln(4)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{ln(4)}{n} = 0$

Alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} ln(U_n) = 0$

$$\text{On a } \lim_{n \longrightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{ln(U_n)}$$
$$= e^0 = 1$$

Car $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} ln(U_n) = 0$ et la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue en 0.

$\boxed{\text{D'où } l = 1}$

## Exercice 5 : (3.75 pts)

On considère la fonction numérique $F$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)} dt$.

**0.25 pt** **1 -** Montrons que la fonction $F$ est impaire.

On a $D_F = \mathbb{R}^*$, donc pour tout $x$ dans $D_F \quad -x \in D_F$.

Soit $x \in D_F$

$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{ln(1+t^2)} dt$

En pose $y = -t$, donc $dt = -dy$

Si : $t = -x$ alors $y = x$

Si : $t = -2x$ alors $y = 2x$

$$F(-x) = \int_x^{2x} -\frac{1}{ln(1+y^2)} dy$$
$$= -\int_x^{2x} \frac{1}{ln(1+y^2)} dy$$
$$= -F(x)$$

D'où $F$ est une fonction impaire.

**2 -** Soit $x \in ]0;+\infty[$. En pose $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{ln(1+t^2)}dt$

**0.25 pt**

**a)** Vérifions que $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ .

Soit $x > 0$

On a $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{ln(1+t^2)}dt$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)}dt \\ &= \int_x^{1} \frac{1}{ln(1+t^2)}dt + \int_1^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)}dt \quad \text{( relation de Chasles )} \\ &= -\int_1^{x} \frac{1}{ln(1+t^2)}dt + \int_1^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)}dt \\ &= \int_1^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)}dt - \int_1^{x} \frac{1}{ln(1+t^2)}dt \\ &= \varphi(2x) - \varphi(x) \end{aligned}$$

D'où $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

**0.5 pt**

**b)** Montrons que la fonction $F$ est dérivable sur $]0+\infty[$, puis calculons $F'(x)$ pour tout $x > 0$ .

On a $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

La fonction $x \longmapsto \varphi(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Car la fonction $x \longmapsto \frac{1}{ln(1+x^2)}$ est continue, donc elle admet une primitive sur $]0;+\infty[$ qui est $\varphi(x)$ et on a $(\forall x \in ]0;+\infty[) \quad \varphi'(x) = \frac{1}{ln(1+x^2)}$.

La fonction $x \longmapsto \varphi(2x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de deux fonctions le sont.

Par suite la fonction $F$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonctions le sont.

$$\begin{aligned} Etona \forall x \in ]0;+\infty[ \quad F'(x) &= (\varphi(2x) - \varphi(x))' \\ &= (\varphi(2x))' - \varphi'(x) \\ &= (2x)' \times \varphi'(2x) - \varphi'(x) \\ &= 2 \times \frac{1}{ln\left(1+(2x)^2\right)} - \frac{1}{ln(1+x^2)} \\ &= \frac{2}{ln(1+4x^2)} - \frac{1}{ln(1+x^2)} \\ &= \frac{ln\left[(1+x^2)^2\right] - ln(1+4x^2)}{ln(1+4x^2).ln(1+x^2)} \\ &= \frac{ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)}{ln(1+4x^2).ln(1+x^2)} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[)\ F'(x) = \dfrac{ln\left(\dfrac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)}{ln(1+4x^2).ln(1+x^2)}}$

**0.5 pt** **c)** Déduisons les variations de la fonction $F$ sur $]0;+\infty[$ .

Soit $x > 0$

Donc $1+4x^2 > 1 \quad et \quad 1+x^2 > 1$

Par suite $ln(1+4x^2).ln(1+x^2) > 0$

D'où le signe de $F'(x)$ est le signe de $ln\left(\dfrac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)$

Résolvons dans $]0;+\infty[$ l'équation $ln\left(\dfrac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right) = 0$

$$\begin{aligned} \texttt{On a} \quad ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^4+2x^2+1 = 1+4x^2 \\ &\Leftrightarrow x^4-2x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Par suite la solution de l'équation $ln\left(\dfrac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right) = 0$ dans $]0;+\infty[$ est $\sqrt{2}$.

Si : $x = \sqrt{2}$ alors $F'(x) = 0$

Si : $0 < x < \sqrt{2}$ alors $F'(x) < 0$

Si : $x > \sqrt{2}$ alors $F'(x) > 0$

$\boxed{\text{C-à-d que } F \text{ est strictement croissante sur } \left[\sqrt{2};+\infty\right[ \text{ et strictement décroissante sur } \left]0;\sqrt{2}\right].}$

**0.5 pt** **3 - a)** En utilisons le théorème des accroissement finis, montrons que : $(\forall x > 0)\,(\exists c \in ]x;2x[)$ :
$F(x) = \dfrac{x}{ln(1+c^2)}$ .

Soit $x > 0$

Donc $2x > x > 0$ D'où $[x;2x] \subset ]0;+\infty[$

Comme $\varphi$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ alors, $\varphi$ continue et dérivable sur $[x;2x]$

D'après le théorème des accroissement finis $(T.A.F)$

$(\exists c \in ]x;2x[) : \varphi(2x) - \varphi(x) = \varphi'(c)(2x-x)$

Signifie que : $(\exists c \in ]x;2x[) : \varphi(2x) - \varphi(x) = x\varphi'(c)$

Signifie que : $(\exists c \in ]x;2x[) : F(x) = \dfrac{x}{ln(1+c^2)}$

$\boxed{\text{D'où } (\forall x > 0)\,(\exists c \in ]x;2x[) : F(x) = \dfrac{x}{ln(1+c^2)}.}$

**0.25 pt** **b)** Déduisons que : $(\forall x > 0) : \dfrac{x}{ln(1+4x^2)} < F(x) < \dfrac{x}{ln(1+x^2)}$ .

Soit $(x > 0)$

D'après la question précédente $(\exists c \in ]x;2x[) : F(x) = \dfrac{x}{ln\left(1+c^2\right)}$

$$\begin{aligned} On \text{ a } \quad 0 < x < c < 2x &\Rightarrow 0 < x^2 < c^2 < 4x^2 \\ &\Rightarrow 1 < 1+x^2 < 1+c^2 < 1+4x^2 \\ &\Rightarrow 0 < ln\left(1+x^2\right) < ln\left(1+c^2\right) < ln\left(1+4x^2\right) \text{ ( car ln est croissante sur } ]0;+ \\ &\Rightarrow \frac{1}{ln\left(1+4x^2\right)} < \frac{1}{ln\left(1+c^2\right)} < \frac{1}{ln\left(1+x^2\right)} \\ &\Rightarrow \frac{x}{ln\left(1+4x^2\right)} < \frac{x}{ln\left(1+c^2\right)} < \frac{x}{ln\left(1+x^2\right)} \quad (\text{car } x > 0) \\ &\Rightarrow \frac{x}{ln\left(1+4x^2\right)} < F(x) < \frac{x}{ln\left(1+x^2\right)} \end{aligned}$$

D'où $(\forall x > 0) : \dfrac{x}{ln\left(1+4x^2\right)} < F(x) < \dfrac{x}{ln\left(1+x^2\right)}$.

**0.75 pt**

**c)** Calculons les limites : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)$ , $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} F(x)$

En rappel que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x}{ln(x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{ln(1+x)}{x} = 1$.

on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{ln\left(1+4x^2\right)} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{2ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)} \\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{2\sqrt{1+4x^2}} \times \frac{\sqrt{1+4x^2}}{ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)} \\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+4x^2}{x^2}}} \times \frac{\sqrt{1+4x^2}}{ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)} \\ &= \underbrace{\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}}_{=\frac{1}{4}} \times \underbrace{\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{ln\left(\sqrt{1+4x^2}\right)}}_{=+\infty} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Et comme $(\forall x > 0) : \dfrac{x}{ln\left(1+4x^2\right)} < F(x)$

Alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = +\infty$.

On a $(\forall x > 0)$ $\dfrac{x}{ln\left(1+4x^2\right)} < F(x) < \dfrac{x}{ln\left(1+x^2\right)}$

Donc $(\forall x > 0)$ $\dfrac{1}{ln\left(1+4x^2\right)} < \dfrac{F(x)}{x} < \dfrac{1}{ln\left(1+x^2\right)}$

Et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{ln\left(1+x^2\right)} = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{ln\left(1+4x^2\right)} = 0$

Alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x}{ln\left(1+4x^2\right)} &= \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{4x^2}{ln\left(1+4x^2\right)}\times\frac{1}{4x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{4x^2}{ln\left(1+4x^2\right)}\times\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1}{4x}\\
(\text{ En pose } t=4x^2) &= \underbrace{\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{t}{ln\left(1+t\right)}}_{=1}\times\underbrace{\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1}{4x}}_{=+\infty}\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Et comme $(\forall x>0)$ : $\dfrac{x}{ln\left(1+4x^2\right)} < F(x)$

$\boxed{\text{Alors } \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} F(x)=+\infty.}$

0.75 pt **d)** Vérifions que : $F\left(\sqrt{e-1}\right) < \sqrt{e-1}$ et $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \dfrac{\sqrt{e-1}}{2}$, puis déduisons que l'équation $F(x)=x$ admet une seule solution dans $]0;+\infty[$ .

On a d'après la question $3-(b)$ $\quad(\forall x>0)\, F(x) < \dfrac{x}{ln\left(1+x^2\right)}$

On a $\sqrt{e-1}\approx 1,31>0$

Donc $F\left(\sqrt{e-1}\right) < \dfrac{\sqrt{e-1}}{ln\left(1+\left(\sqrt{e-1}\right)\right)}$

D'où

$$\boxed{F\left(\sqrt{e-1}\right) < \sqrt{e-1}} \qquad (1)$$

On a d'apres la question $3-(b)$ $\quad(\forall x>0)\,\dfrac{x}{ln\left(1+4x^2\right)} < F(x)$

On a $\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\approx 0,65>0$

Donc $\dfrac{\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}}{ln\left(1+4\dfrac{e-1}{4}\right)} < F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)$

D'où

$$\boxed{F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}} \qquad (2)$$

En pose $G\left(x\right)=F(x)-x$

On a

$$\begin{aligned}
G\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right).G\left(\sqrt{e-1}\right) &= \left(F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)-\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)\left(F\left(\sqrt{e-1}\right)-\sqrt{e-1}\right)\\
&< 0 \quad \text{d'apres } (1) \text{ et } (2)
\end{aligned}$$

On a $F$ une fonction continue et strictement décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$

Donc la fonction $G$ continue et strictement décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$

En effet $\left(\forall x\in\left]0;\sqrt{2}\right]\right)\quad G'\left(x\right)=F'\left(x\right)-1<0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists! x \in \left]0;\sqrt{2}\right] : G\left(x\right) = 0$.

C-à-d que l'équation $F(x) = x$ admet une seule solution dans $\left]0;\sqrt{2}\right]$.

Soit $x > \sqrt{2}$

On a

$$F(x) < \frac{x}{ln\left(1+x^2\right)} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}
x > \sqrt{2} &\Rightarrow x^2 > 2 \\
&\Rightarrow 1 + x^2 > 3 \\
&\Rightarrow ln\left(1+x^2\right) > ln\left(3\right) \quad \text{car la fonction ln est croissante sur}]0, +\infty[ \\
&\Rightarrow \frac{1}{ln\left(1+x^2\right)} < \frac{1}{ln\left(3\right)} \\
&\Rightarrow \frac{x}{ln\left(1+x^2\right)} < \frac{x}{ln\left(3\right)} \quad \text{car } x > 0 \\
&\Rightarrow F(x) < \frac{x}{ln\left(3\right)} \quad \text{d'après } (3) \\
&\Rightarrow F(x) < x \quad \text{car } ln\left(3\right) > 1
\end{aligned}$$

D'où pou tout $x$ dans $\left]\sqrt{2}; +\infty\right[$ $\quad F(x) \neq x$. C-à-d l'équation $F(x) = x$ n'admet pas de solution dans $\left]\sqrt{2}; +\infty\right[$.

$\boxed{\text{En conclusion l'équation } F(x) = x \text{ admet une seule solution dans } ]0; +\infty[.}$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage 2010** Juillet 2010

# MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................. **3,00 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .................................. **4,00 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .................................. **3,00 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .................................. **10,00 points**

## Exercice 1 : (3,00 pts)

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble : $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$

0,50 pt **1 -** Montrer que $E$ est une partie stable de $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$.

0,50 pt **2 - a)** Montrer que l'application $\varphi$ qui à tout nombre réel $x$ associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$.

0,50 pt **b)** En déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

0,50 pt **c)** Déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$ pour tout réel $x$.

0,50 pt **d)** Résoudre dans l'ensemble $E$ l'équation : $A^5X=B$ où $A=M(2)$ et $B=M(12)$ et $A^5=\underbrace{A\times\cdots\times A}_{5\text{ fois}}$

0,50 pt **3 -** Montrer que l'ensemble $F=\left\{M\left(\ln(x)\right)/x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ est un sous-groupe de $(E,\times)$.

## Exercice 2 : (4,00 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$

**1 -** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)$ : $z^2-4\mathrm{i}z-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}=0$

0,50 pt **a)** Vérifier que le nombre $a=1+\mathrm{i}(2-\sqrt{3})$ est une solution de l'équation $(E)$.

0,50 pt **b)** En déduire $b$ la deuxième solution de l'équation $(E)$.

0,50 pt **2 - a)** Montrer que : $a^2=4(2-\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

0,75 pt **b)** Écrire $a$ sous forme trigonométrique.

**3 -** On considère les points $A$ , $B$ et $C$ dont les affixes sont respectivement $a$, $b$ et $c=2\mathrm{i}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$.
Soit $(\Gamma)$ le cercle de diamètre $[AB]$.

0,50 pt **a)** Déterminer $\omega$, l'affixe du point $\Omega$ centre du cercle $(\Gamma)$

0,50 pt **b)** Montrer que les points $O$ et $C$ appartiennent au cercle $(\Gamma)$.

0,75 pt **c)** Montrer que le nombre complexe $\dfrac{c-a}{c-b}$ est un imaginaire pur.

## Exercice 3 : (3,00 pts)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.
On tire les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête l'expérience.
Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.

0,25 pt **1 - a)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X$.

0,50 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$.

0,50 pt **c)** Montrer que : $p[X=2]=\dfrac{5}{33}$

0,50 pt **d)** Calculer la probabilité de l'événement $[X=3]$

0,50 pt **2 - a)** Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ est : $E(x)=\dfrac{13}{11}$

0,75 pt **b)** Calculer $E(X^2)$, et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire $X$.

## Exercice 4 : (10,00 pts)

**Partie I :**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur l'intervalle $I=[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & ;\ 0\leq x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

Soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 pt **1 -** Montrer que $f$ est continue à gauche au point 1.

0,50 pt **2 -** Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche au point 1.

0,75 pt **3 -** Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ puis dresser son tableau de variations.

0,50 pt **4 - a)** Montrer que la courbe $(C)$ admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\dfrac{e-1}{e}$.

0,75 pt **b)** Tracer la courbe $(C)$ en précisant sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
(on prend $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$)

0,50 pt **5 -** Montrer qu'il existe un nombre réel unique $\alpha$ de l'intervalle $I$ vérifiant : $f(\alpha)=\alpha$

0,25 pt **6 - a)** Montrer que $f$ est une bijection de l'intervalle $I$ vers $I$.

0,50 pt **b)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de l'intervalle $I$.

**Partie II :**

On pose $I_0=\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, et pour tout entier naturel $n$ non nul : $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$

0,75 pt **1 - a)** Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,75 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\geq 0)$ ; $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$, puis déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

**Partie III :**

Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $J=[0;1[$ et pour tout entier naturel $n$ non nul on pose :

$F_0(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t$ et $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ et $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}F_k(x)$

1,00 pt **1 -** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $(\forall x\in J)$ ; $F(x)-S_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$

0,50 pt **2 - a)** Montrer que la fonction $x\mapsto(1-x)\Big(1-\ln(1-x)\Big)$ est strictement décroissante sur $J$.

0,50 pt **b)** Déduire que la fonction $t\mapsto\dfrac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0;x]$ pour $x\in J$.

1,00 pt **3 - a)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $(\forall x\in J)$ ; $0\leq F(x)-S_n(x)\leq\dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

0,50 pt **b)** En déduire que pour tout $x$ de l'intervalle $J$ on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$

**0,50 pt** **4 - a)** Déterminer $F(x)$ pour $x \in J$.

**0,25 pt** **b)** Déterminer la limite : $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : RATTRAPAGE 2010**

## MATHÉMATIQUES

### Exercice 1 : ( 3 pts )

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / \, x \in \mathbb{R} \right\}$

**0,5 pt** **1 -** Montrons que $E$ est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

Soient $M$ et $N$ deux éléments de $E$, donc il existe deux réels $x$ et $y$ tel que $M = M(x)$ et $N = M(y)$.

On $a$ :

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ y^2 & 2y & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ (x+y)^2 & 2(x+y) & 1 \end{pmatrix} = M(x+y)$$

Ainsi : $\forall M, N \in E : \quad M \times N \in E$.

D'où $E$ est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

**0,5 pt** **2 - a)** Montrons que l'application $\varphi$ qui à tout nombre réel $x$ associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$ : On a $\varphi(x+y) = M(x+y) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

  Donc $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.
- Par définition de $E$, pour tout $M$ de $E$ il va exister un réel $x$ tel que $M = M(x)$. donc $\varphi$ est surjective de $\mathbb{R}$ vers $E$.

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi(x)=\varphi(y) \Rightarrow M(x)=M(y) \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2=y^2 \Rightarrow x=y \\ 2x=2y \end{cases}$$

Ainsi $\varphi$ est injective.

$\boxed{\text{D'où } \varphi \text{ est un isomorphisme de } (\mathbb{R},+) \text{ vers } (E,\times).}$

**0,5 pt** **b)** Déduisons que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

On sait que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif et $\varphi$ isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$.

$\boxed{\text{D'où : } (E,\times) \text{ un groupe commutatif.}}$

**0,5 pt** **c)** Pour $x$ un réel, déterminons $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, le symétrie de $x$ dans $\mathbb{R}$ est $-x$.

Puisque $\varphi$ est isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$ alors le symétrie de $\varphi(x)$ est $\varphi(-x)$.

Finalement $M(-x)$, est le symétrie de $M(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{D'où : } M^{-1}(x)=M(-x).}$

**0,5 pt** **d)** Résolvons dans l'ensemble $E$ l'équation $A^5X=B$ où $A=M(2)$ et $B=M(12)$ et $A^5=\underbrace{A\times\cdots\times A}_{\text{5 fois}}$

Soit $X \in E$, il existe $x \in \mathbb{R}$ : $X=M(x)$, puisque $\varphi$ est isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$ alors $\varphi^{-1}$ est aussi isomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{R},+)$ Et on a :

$$\begin{aligned} A^5X=B &\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}: \quad M(2)^5\times M(x)=M(12)\\ &\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}: \quad M(5\times 2)\times M(x)=M(12)\\ &\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}: \quad M(-10)\times M(10)\times M(x)=M(-10)\times M(12)\\ &\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}: \quad M(x)=M(-10+12)\\ &\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}: \quad M(x)=M(2) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où : } S=\{M(2)\}.}$

**0,5 pt** **3 -** Montrons que l'ensemble $F=\left\{M\Big(\ln(x)\Big)/x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ est un sous-groupe de $(E,\times)$

- L'élément neutre de $(\mathbb{R},+)$ est 0 et $\varphi$ l'isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$

  Alors $\varphi(0)$ est l'élément neutre de $(E,\times)$

  Et puisque $\varphi(0)=M(0)=M(\ln(1))$ et $1\in\mathbb{R}_+^*$ donc $M(0)\in F$

  Ainsi $F\neq\emptyset$.
- Soient $a,b\in F$ alors $\exists x,y\in\mathbb{R}_+^*$ : $a=M(\ln(x))$ et $b=M(\ln(y))$ et $b^{-1}=M(-\ln(y))$

On a :

$$\begin{aligned} a \times b^{-1} &= M(\ln x) \times M(-\ln y) \\ &= M(\ln x - \ln y) \\ &= M\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) \end{aligned}$$

et puisque $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}_+^*$ alors $M\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) \in F$

D'où : $F$ est un sous groupe de $E$.

## Exercice 2 : (4 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

**1 -** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ \ z^2 - 4\mathrm{i}z - 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 0$

**0,5 pt**

**a)** Vérifions que le nombre $a = 1 + \mathrm{i}(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation $(E)$

On a :

$$\begin{aligned} & [1 + i(2-\sqrt{3})]^2 - 4i[1 + i(2-\sqrt{3})] - 2 + 2i\sqrt{3} \\ =& 1 + i2(2-\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})^2 - 4i + 4(2-\sqrt{3}) - 2 + 2i\sqrt{3} \\ =& 1 + 4i - i2\sqrt{3} - 4 - 3 + 4\sqrt{3} - 4i + 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} \\ =& 0 + i(4 - 2\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3}) \\ =& 0 \end{aligned}$$

D'où : $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est me solution de $(E)$.

**0,5 pt**

**b)** Déduisons $b$ la deuxième solution de l'équation $(E)$

D'après les formules de Viéte :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow a + b = 4i$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow b = 4i - a \\ &\Rightarrow b = 4i - 2i + i\sqrt{3} - 1 \\ &\Rightarrow b = 2i + i\sqrt{3} - 1 \\ &\Rightarrow b = -1 + i(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

D'où : $b = -1 + i(2 + \sqrt{3})$.

**0,5 pt**

**2 - a)** Montrons que : $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= [1+i(2-\sqrt{3})]^2 \\ &= 1+i2(2-\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})^2 \\ &= 1+4i-2i\sqrt{3}-4-3+4\sqrt{3} \\ &= -6+4\sqrt{3}+i(4-2\sqrt{3}) \\ &= 4(2-\sqrt{3})\left[\frac{2\sqrt{3}(-\sqrt{3}+2)}{4(2-\sqrt{3})}+\frac{2(2-\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})}\right] \\ &= 4(2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \\ &= 4(2-\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où : } a^2 = 4(2-\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

**0,75 pt** **b)** Écrivons $a$ sous forme trigonométrique

D'après a) on a : $a^2 = 4(2-\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ alors $a$ est la racine carré de $4(2-\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, donc

$$a = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \text{ ou } a = -2\sqrt{2-\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$$

Et puisque les parties réel et imaginaire de $a$ sont positives.

$\boxed{\text{Alors : } a = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.}$

**3 -** On considère les points $A$ , $B$ et $C$ dont les affixes sont respectivement $a$, $b$ et $c = 2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$. Soit $(\Gamma)$ le cercle de diamètre $[AB]$.

**0,5 pt** **a)** Déterminons $\omega$, l'affixe du point $\Omega$ centre du cercle $(\Gamma)$

Puisque $[AB]$ diamètre de $(\Gamma)$ alors :

$$\omega = \frac{a+b}{2} = \frac{x+i(2-\sqrt{3})-x+i(2+\sqrt{3})}{2} = 2i$$

$\boxed{\text{D'où : } \omega = 2i.}$

**0,5 pt** **b)** Montrons que les points $O$ et $C$ appartiennent au cercle $(\Gamma)$

On a le rayon $R$ de $(\Gamma)$ est égale à $\frac{AB}{2}$ , donc :

$$\begin{aligned} R &= \frac{AB}{2} = \frac{|b-a|}{2} \\ &= \frac{\left|-1+i(2+\sqrt{3})^2-1-i(2-\sqrt{3})\right|}{2} \\ &= \frac{|-2+2i\sqrt{3}|}{2} = \mid -1+i\sqrt{3} \mid = 2 \end{aligned}$$

$$O\Omega = |\omega - 0| = |\omega| = |2i| = 2$$

$$c\Omega = |\omega - c| = \left|2i-2i-2e^{i\pi/7}\right| = \left|-2e^{i\%/7}\right| = 2$$

$\boxed{\text{Ainsi : } O \text{ et } C \text{ appartiennent au cercle } (\Gamma).}$

0,75 pt

**c)** Montrons que le nombre complexe $\dfrac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

On a $C$ point de $(\Gamma)$ différent de $A$ et de $B$ donc le triangle $ABC$ est rectangle en $C$ c-à-d $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où : $\dfrac{c-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$.

## Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.

On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête l'expérience.

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boule tirée .

0,25 pt

**1 - a)** Déterminons l'ensemble des valeurs prises par $X$

On extrait les boules de l'urne l'une après l'outre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois une boute blanche.

Ainsi les valeurs possible de $X$ sont : 1 ; 2 et 3.

0,5 pt

**b)** Calculons la probabilité de l'événement $(X = 1)$

L'événement $(X = 1)$ c'est l'obtention d'une boule blanche dans le première tirage. Donc :

$$p(X=1) = \frac{\text{card}(X=1)}{\text{card}\,\Omega} = \frac{A_{10}^1}{A_{12}^1} = \frac{5}{6}$$

D'où : $p(X=1) = \frac{5}{6}$

0,5 pt

**c)** Montrons que : $p\,(X=2) = \dfrac{5}{33}$

L'événement $(X = 2)$ c'est l'obtention d'une boule blanche dans la deuxième fois et une boule rouge dans la première fois. Donc :

$$P(X=2) = \frac{\text{Card}(X=2)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{A_2^1 \times A_{10}^1}{A_{12}^2} = \frac{5}{33}$$

D'où : $p(X=2) = \frac{5}{33}$

0,5 pt

**d)** Calculer la probabilité de l'événement $(X = 3)$

L'événement $(X = 3)$ c'est d'avoir une boule rouge dans la première et la deuxième fois et une boule blanche dans la troisième fois. Donc :

$$p(X=3) = \frac{\text{Cond}(x=3)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{A_2^2 \times A_{10}^1}{A_{12}^3} = \frac{2\times 10}{12\times 11\times 10} = \frac{1}{66}$$

D'où : $p(X=1) = \frac{1}{66}$

0,5 pt

**2 - a)** Montrons que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ est : $E(x) = \dfrac{13}{11}$

On sait que $E(x)=\sum_{i=1}^{3} x_i \times p\left(X=x_i\right)$

$$\begin{aligned}
&= 1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+3\times p(X=3)\\
&= \frac{5}{6}+2\cdot\frac{5}{33}+3\cdot\frac{1}{66}\\
&= \frac{13}{11}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où : } E(x)=\frac{13}{11}}$

**0,75 pt** **b)** • Calculons $E(X^2)$ On a :

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p\left(X=x_i\right)\\
&= 1^2\cdot\frac{5}{6}+2^2\cdot\frac{5}{33}+3^2\cdot\frac{1}{66}\\
&= \frac{52}{33}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc : } E(x^2)=\frac{52}{33}}$

• Déduisons la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire $X$. On a :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right)-(E(X))^2\\
&= \frac{52}{33}-\left(\frac{13}{11}\right)^2=\frac{65}{363}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc : } V(X)=\frac{65}{363}}$

## Exercice 4 : (10 pts)

**partie A :** On considère la fonction numérique $f$ définie sur l'intervalle $I=[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & ;\ 0\leq x<1\\ f(1)=0 \end{cases}$$

Soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$

**0,5 pt** **1 -** Montrons que $f$ est continue à gauche au point 1.

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-\ln(1-x)}\\
&= \lim_{t\to0^+}\frac{1}{1-\ln t} \quad \text{avec } t=1-x\\
&= 0=f(1) \quad \left(\text{car : } \lim_{0^+}\ln t=-\infty\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où : } f \text{ est continue à gauche au point 1.}}$

**0,5 pt** **2 -** Étudions la dérivabilité de $f$ à gauche au point 1.

Soit $0 \leqslant x < 1$ ; on $a$ :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{1-\ln(1-x)}}{x-1} = \frac{1}{(x-2)-(x-1)\ln(1-x)}$$
$$= \frac{1}{-(1-x)+(1-x)\ln(1-x)}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0^-$ $\quad (t = 1-x)$
alors $\lim\limits_{x\to 1^-} -(1-x)+(1-x)\ln(1-x) = 0^-$, d'où :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$$

Donc $f$ n'est pas dérivable à gauche au point 1.

**0,75 pt**

**3 -** Étudions les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ puis donner son tableau de variations.

- Soit $x \in [0,1[$ ; la fonction $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $[0,1[$ comme fonction polynôme et elle est strictement positive sur $[0,1[$,

  donc la fonction $x \longmapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $[0,1[$ par composition.

  D'où la fonction : $x \longmapsto 1-\ln(1-x)$ dérivable sur $[0,1[$, de plus elle ne s'annule pas sur $[0,1[$, donc la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{1-\ln(1-x)}$ est dérivable sur $[0,1[$.

  Et pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{1-x}}{(1-\ln(1-x))^2} = \frac{1}{(x-1)(1-\ln(1-x))^2}$$

  Donc $\forall x \in [0,1[$: $\quad f'(x) = \frac{1}{(x-1)(1-\ln(x-x))^2}$

  Et le signe de $f'(x)$ sur $[0,1[$ est celui de $x-1$

  donc $\forall x \in [0,1[$: $\quad f'(x) < 0$..

  D'où $f$ est 1 strictement décroissante sur $[0,1[$.

- Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $1$ |
|---|---|
| $f$ | $1 \searrow 0$ |

**0,5 pt**

**4 - a)** Montrons que la courbe $(C)$ admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\dfrac{e-1}{e}$

On a $f$ est deux fois dérivable sur $[0,1[$, et :

$$\begin{aligned}\forall x\in[0,1[:\quad f''(x) &= \frac{-\left((1-\ln(1-x))^2+2(x-2)(1-\ln(1-x))\times\frac{1}{1-x}\right)}{(x-1)^2(1-\ln(1-x))^4}\\ &= \frac{-(1-\ln(1-x))^2+2(1-\ln(1-x))}{(1-2)^2(1-\ln(1-x))^4}\\ &= \frac{(1-\ln(1-x))(-1+\ln(1-x)+2)}{(x-1)^2(1-\ln(1-x))^4}\\ &= \frac{1+\ln(1-x)}{(x-1)^2(1-\ln(1-x))^3}\end{aligned}$$

Remarquons que $\forall x\in[0,1[:\quad f(x)>0$, d'où $1-\ln(1-x)>0$ et alors le signe de $f''(x)$ sur $[0,1[$ el celui de $1+\ln(1-x)$, donc :

$$\begin{aligned}1+\ln(1-x)=0 &\Leftrightarrow \ln(1-x)=-1\\ &\Leftrightarrow 1-x=e^{-1}\\ &\Leftrightarrow x=1-e^{-1}=\frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x>\frac{e-1}{e} &\Leftrightarrow x>1-e^{-1}\\ &\Leftrightarrow 1-x<e^{-1}\quad(1-x>0)\\ &\Leftrightarrow \ln(1-x)<-1\\ &\Leftrightarrow 1+\ln(1-x)<0\end{aligned}$$

et par suite : $0\leqslant x<\frac{e-1}{e}\Leftrightarrow 1+\ln(1-x)>0$

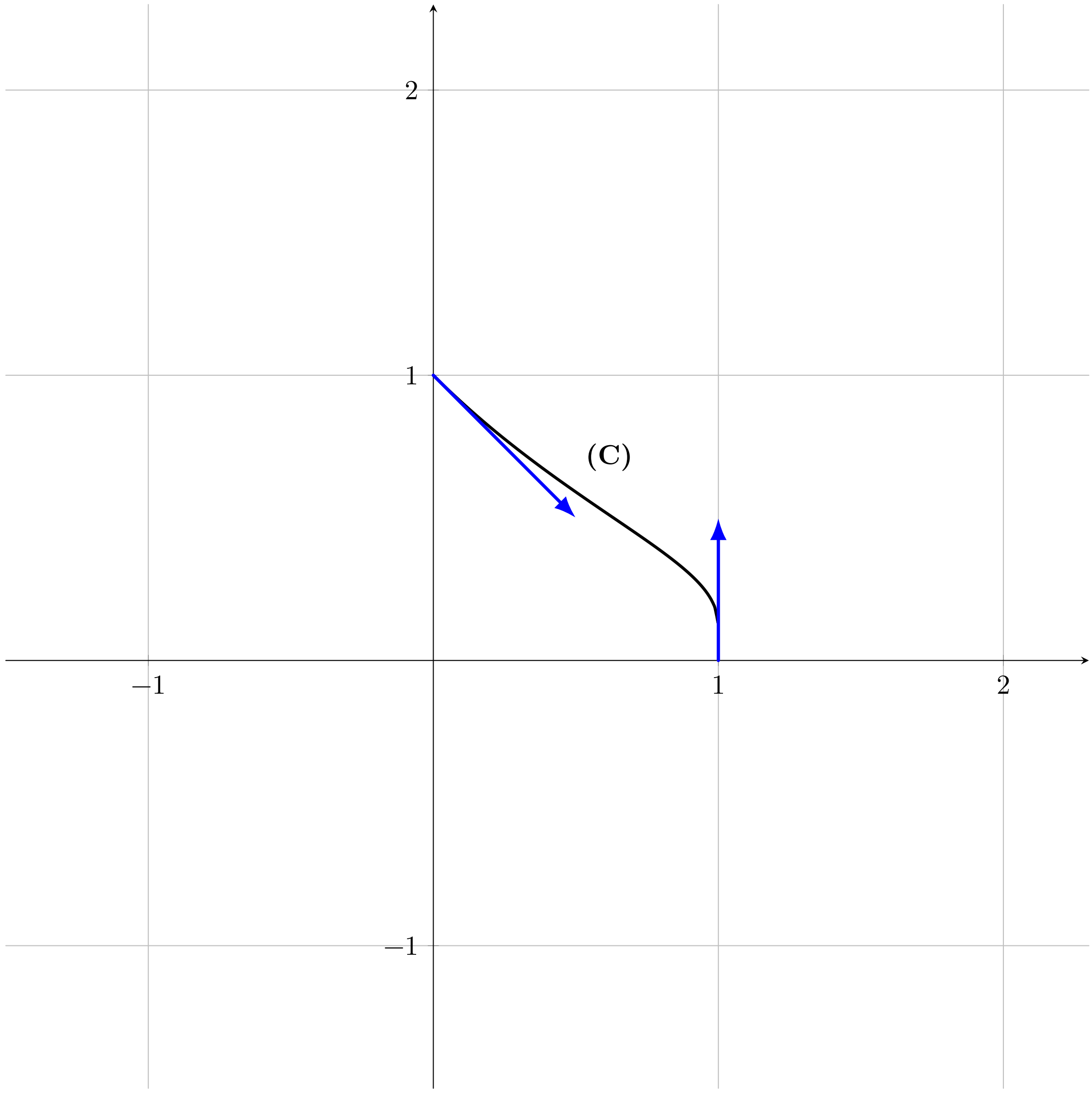
On conclut donc que $f''$ s'annule en un unique point : $\frac{e-1}{e}$ et change de signe.

Donc le point d'abscisse $\frac{e-1}{e}$ est un point d'inflexion pour $(C)$.

**0,75 pt**

**b)** Construire la courbe $(C)$ en précisant sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
(on prendra $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$)

- D'après la question 2) on déduit que $(C)$ admet une demi tangente verticale à gauche du point $(1,0)$ dirigée vers le haut.
- Et comme $f$ est dérivable à gauche en 0 alors $(C)$ admet une demi tangente à droite de $(0;1)$ de pente $f'_d(0)=-1$.




**0,5 pt** **5 -** Montrons qu'il existe un nombre réel unique $\alpha$ de l'intervalle $I$ vérifiant : $f(\alpha) = \alpha$

On considère la fonction $g$ définie sur $I$ par : $g(x) = f(x) - x$

On a $g$ est continue et strictement décroissante su $I$ (Somme de deux fonctions strictement décroissante sur $I$)

de plus $g(0) = f(0) = 1 > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$.

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires on déduit que l'équation $g(x) = 0$ c'est à dire $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in ]0;1[ \subset I$.

$\boxed{\text{Donc : } \exists! \alpha \in I / f(\alpha) = \alpha}$

**0,25 pt** **6 - a)** Montrons que $f$ est une bijection de l'intervalle $I$ vers $I$

On a $f$ est continue et strictement décroissante sur $I$ et $f(I) = [f(1), f(0)] = [0,1] = I$.

$\boxed{\text{donc : } f \text{ est une bijection de l'intervalle } I \text{ vers } I \text{ .}}$

**0,5 pt** **b)** Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de l'intervalle $I$.

Tout d'abord si $x = 0$ alors $f^{-1}(0) = 1$ puisque $f(1) = 0$

Soit maintenant $x \in I$ avec $x \neq 0$ et $y \in I$ avec $y \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln(1-y)} = x \\ &\Leftrightarrow \ln(1-y) = \frac{x-1}{x} \\ &\Leftrightarrow y = 1 - e^{\frac{x-1}{x}} \end{aligned}$$

D'où :

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{x-1}{x}} & x \in ]0,1[ \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

**partie B :** On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, et pour tout entier naturel $n$ non nul $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$

0,75 pt **1 - a)** Montrons que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et Déduisons qu'elle est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 t^{n+1} f(t)dt - \int_0^1 t^n f(t)dt \\ &= \int_0^1 t^n(t-1)f(t)dt \end{aligned}$$

la fonction $t \longmapsto t^n(t-1)f(t)$ est continue et négative sur $[0,1]$

donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, c-a-d $I_{n+1} \leqslant I_n$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \leqslant I_n$

$\boxed{\text{Ce qui montre que la suite } (I_n)_{n\geq 0} \text{ est décroissante.}}$

Et pour $n \in \mathbb{N}$ on a aussi $0 \leqslant t^n f(t) \leqslant 1$ puisque sur $[0,1]$ on a $0 \leq t^n \leq 1$ et $0 \leq f(t) \leq 1$,

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad I_n \geqslant 0$

En conclusion on a $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minoré par 0

$\boxed{\text{D'où : } (I_n)_{n\geq 0} \text{ est convergente.}}$

0,75 pt **b)** Montrons que : $\Big(\forall n \geq 0\Big)$ ; $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, puis déterminons la limite de la suite$(I_n)_{n\geq 0}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ on a sur $[0,1]$ : $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$

  d'où $0 \leq t^n f(t) \leq t^n$ alors $0 \leq \int_0^1 t^n f(t)dt \leq \int_0^1 t^n dt$

  c-á-d. $0 \leqslant I_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ alors $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

  $\boxed{\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{x+1}}$

- Calculons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

  On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ; donc d'après les critères de convergence des suites et en utilisant la double inégalités précédente, $\boxed{\text{on déduit que } \lim I_n = 0.}$

**partie C :** Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $J = [0;1[$ et pour tout entier naturel $n$ non nul on pose : $F_0(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$

1 pt **1 -** Montrons que : $\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall x \in J\Big)$ : $F(x) - S_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
F(x) - S_n(x) &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt - \sum_{k=0}^{n} \int_0^x t^k f(t)dt \\
&= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt - \int_0^x f(t) \sum_{k=0}^{n} t^k dt \\
&= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt - \int_0^x \frac{1-t^{n+1}}{1-t} f(t)dt \\
&= \int_0^x \left( \frac{f(t)}{1-t} - \frac{1-t^{n+1}}{1-t} f(t) \right) dt \\
&= \int_0^x f(t) \left( \frac{1-1+t^{n+1}}{1-t} \right) dt \\
&= \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt
\end{aligned}$$

et Si $n = 0$ alors pour tout $x \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
F(x) - S_0(x) = F(x) - F_0(x) &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt - \int_0^x f(t)dt \\
&= \int_0^x f(t) \left( \frac{1}{1-t} - 1 \right) dt \\
&= \int_0^x \frac{t f(t)}{1-t} dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big) \Big(\forall x \in J\Big) : \quad F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} \mathrm{dt}.}$$

**0,5 pt** **2 - a)** Montrons que la fonction $x \mapsto (1-x)\Big(1 - \ln(1-x)\Big)$ est strictement décroissante sur $J$

On pose $u(x) = (1-x)\Big(1 - \ln(1-x)\Big)$, on a $u$ et dérivable sur $J$ et pour tout $x \in J$ :

$$\begin{aligned}
u'(x) &= -(1 - \ln(1-x)) + (1-x) \times \frac{1}{1-x} \\
&= -1 + \ln(1-x) + 1 \\
&= \ln(1-x)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in J : \quad u'(x) = \ln(1-x)$

on a sur $J$ : $u'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

et si $0 < x < 1$ alors $0 < 1 - x < 1$ d'où $u'(x) < 0$

$$\boxed{\text{et par suite } x \mapsto (1-x)\Big(1 - \ln(1-x)\Big) \text{ est strictement décroissante sur } J.}$$

**0,5 pt** **b)** Montrons que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0; x]$ pour $x \in J$

On pose $v(x) = \dfrac{f(t)}{1-t}$, soit $x \in J$, on a : par tout $t \in [0,x]$ :

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\frac{1}{1-\ln(1-t)}}{1-t} \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} = \frac{1}{u(t)} \end{aligned}$$

Et comme $u$ est strictement décroissante sur $J$, elle est aussi sur $[0,x]$

d'où $v$ est strictement croissante sur $[0,x]$. pour tout $x \in J$.

**1 pt** **3 - a)** Montrons que : $\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big)\ \Big(\forall x \in J\Big) : \quad 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \dfrac{1}{n+2}\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in J$, on sait de la question 1 que :

$$F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt.$$

et de la question $2)b)$ que la fonction $v$ est croissante sur $[0,x]$,

donc pour $t \in [0,x]$ on déduit que $1 = v(0) \leqslant v(t) = \frac{f(t)}{1-t}$

et comme $t^{n+1} \geqslant 0$ on obtient $0 \leqslant t^{n+1} \leq \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t}$ et par suite $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} \mathrm{d}t$

c-a-d :

$$0 \leqslant F(x) - S_n(x)$$

D'autre part on sait que $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ sur $[0,1]$ en particulier sur $[0,x]$ $(x < 1)$,

et sur $[0,x]$ on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq x &\Rightarrow 0 < 1-x \leq 1-t \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \\ &\Rightarrow \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{t^{n+1}}{1-x} \\ &\Rightarrow \frac{t^{n+1}}{1-t} f(t) \leq \frac{t^{n+1}}{1-x} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt &\leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x} dt \\ &\leqslant \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x \\ &\leqslant \frac{1}{1-x}\left(\frac{x^{n+2}}{n+2}\right) \\ &\leqslant \left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{1}{n+2} \qquad (x^{n+2} < 1) \end{aligned}$$

Donc $F(x) - S_n(x) \leqslant \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{n+2}\right)$.

Finalement d'après ce qui précédé on déduit que :

$$\boxed{\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big)\ \Big(\forall x \in J\Big) : \quad 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{n+2}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)}$$

**0,5 pt** **b)** Déduisons que pour tout $x$ de l'intervalle $J$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = F(x)$

Soit $x \in J$, en utilisant le résultat de la question précédente et les critères des convergences des suites, et comme

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{1}{n+2} = 0 \quad \left(\frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}\right)$$

On déduit que $\forall x \in J : \lim S_n(x) = F(x)$

**0,5 pt** **4 - a)** Déterminons $F(x)$ pour $x \in J$

Soit $x \in J$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ Donc pour $t \in [0, x]$, on a,

$$\begin{aligned}
\frac{f(t)}{1-t} &= \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} \\
&= (1-\ln(1-t)) \times \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))^2} \\
&= \frac{1}{f(t)} \times (-f'(t)) \quad \text{ voir 3), } A \\
&= -\frac{f'(t)}{f(t)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt &= -\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt = -[\ln|f(t)|]_0^x \\
&= -(\ln(f(x)) - \ln(f(0))) \quad (f \geq 0) \\
&= -\ln(f(x)) \quad f(0) = 1 \\
&= \ln\left(\frac{1}{f(x)}\right) \\
&= \ln(1-\ln(1-x))
\end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in J : F(x) = \ln(1-\ln(1-x))$

**0,25 pt** **b)** Déterminons la limite : $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to 1^-} 1-x = 0^+$ d'où $\lim\limits_{x \to 1^-} -\ln(1-x) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x \to 1^-} 1-\ln(1-x) = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(1-\ln(1-x)) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = +\infty$.

**FIN**

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2011

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ...................................... **4 points**
- Exercice 2 : **Arithmétiques** ............................................ **2.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ...................................... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Exercice d'analyse** ....................................... **6.5 points**
- Exercice 5 : **Exercice d'analyse** ....................................... **3.5 points**

## Exercice 1 : (4 pts) (Les deux parties sont indépendantes)

**Partie I :** Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ on considère les deux matrices :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0=I \quad A^1=A \quad A^2=A\times A \quad A^{n+1}=A^n\times A$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$)

**0,5 pt** **1 -** Montrer que : $(\forall k\in\mathbb{N})\,;\ A^{2k}=I$ .

**0,5 pt** **2 -** Montrer que $A$ admet une matrice inverse $A^{-1}$ que l'on déterminera.

**Partie II :** Soit $a$ un nombre réel .

Pour tout $x$ et $y$ de l'intervalle $I=]a;+\infty[$ on pose : $x*y=(x-a)(y-a)+a$ .

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $I$ .

**0,5 pt** **b)** Montrer que $*$ est une loi commutative et associative.

**0,5 pt** **c)** Montrer que $(I,*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

**0,5 pt** **2 -** Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

**3 -** On considère l'application : $\begin{array}{rccc}\phi: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^*\\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a}\end{array}$

**0,5 pt** **a)** Montrer que $\phi$ est un isomorphisme de $(I,*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ .

**0,5 pt** **b)** Résoudre dans l'ensemble $I$ l'équation : $x^{(3)}=a^3+a$ où $x^{(3)}=x*x*x$ .

## Exercice 2 : (2.5 pts)

Soit $N$ l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N=\underbrace{11\ldots\ldots\ldots1}_{2010 \text{ fois } 1}$

**0,25 pt** **1 -** Montrer que le nombre $N$ est divisible par 11 .

**0,75 pt** **2 - a)** Vérifier que le nombre 2011 est premier et que : $10^{2010}-1=9N$ .

**0,5 pt** **b)** Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$ .

**0,5 pt** **c)** En déduire que le nombre 2011 divise le nombre $N$ .

**0,5 pt** **3 -** Montrer que le nombre $N$ est divisible par 22121.

## Exercice 3 : (3.5 pts)

**Première Partie :** Soit $m$ un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnu $z$ : $(E_m)$ : $z^2+[(1-\mathrm{i})m-4]z-\mathrm{i}m^2-2(1-\mathrm{i})m+4=0$ .

**0,5 pt** **1 -** Vérifier que le nombre $z_1=-m+2$ est solution de l'équation $(E_m)$ .

**2 -** Soit $z_2$ la deuxième solution de l'équation $(E_m)$ .

**0,5 pt** **a)** Montrer que : $z_1.z_2=1 \Longleftrightarrow im^2+2(1-\mathrm{i})m-3=0$ .

1 pt **b)** Déterminer les deux valeurs de $m$ pour lesquelles on a : $z_1.z_2 = 1$ .

**Deuxième Partie :** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère l'application $S$ qui au point $M$, d'affixe $z$ , fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z'$ , tel que : $z' - 1 = -(z-1)$ et la rotation $R$ de centre le point $\Omega$ d'affixe $(1+\mathrm{i})$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ , et soit $z''$ l'affixe du point $M'' = R(M)$ .

0,25 pt **1 - a)** Montrer que l'application $S$ est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1 .

0,25 pt **b)** Montrer que : $z'' = \mathrm{i}z + 2$

**2 -** Soit $A$ le point d'affixe 2 . On suppose que le point $M$ est distinct du point O origine du repère.

0,5 pt **a)** Calculer : $\dfrac{z''-2}{z'-2}$ , en déduire la nature du triangle $AM'M''$ .

0,5 pt **b)** Déterminer l'ensemble des points $M$ pour lesquels les points $A$ , $\Omega$ , $M'$ et $M''$ sont cocycliques.

## Exercice 4 : ( 6.5 pts )

**Première Partie : Étude des solutions positives de l'équation**$(E)$ : $\mathrm{e}^x = x^n$ **avec** $n$ **un entier naturel non nul.**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur l'ensemble $D = [0;1[\bigcup]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que pour tout $x$ de l'ensemble $D = [0;1[\bigcup]1;+\infty[$ on a : $\mathrm{e}^x = x^n \Longleftrightarrow n = f(x)$ .

0,5 pt **2 -** Montrer que la fonction $f$ est dérivable à droite en 0 .

1,5 pt **3 -** Calculer les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ensuite interpréter graphiquement les résultats obtenus.

**4 -** Étudier les variations de la fonction $f$ sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$ puis
0,75 pt donner son tableau de variations.

0,5 pt **5 -** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées

0,5 pt **6 -** Représenter graphiquement $(\mathcal{C})$ .

0,5 pt **7 -** Montrer que pour $n \geq 3$ , l'équation $(E)$ admet exactement deux solutions $a_n$ et $b_n$ tel que : $1 < a_n < \mathrm{e} < b_n$ .

**Deuxième Partie : Étude des deux suites** $(a_n)_{n\geq3}$ **et** $(b_n)_{n\geq3}$ **.**

0,5 pt **1 -** Montrer que : $(\forall n \geq 3)$ ; $b_n \geq n$ , en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq3}$ .

0,5 pt **2 - a)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 3)$ ; $\dfrac{1}{n} < \ln(a_n) < \dfrac{\mathrm{e}}{n}$ .

0,5 pt **c)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = \mathrm{e}$ .

## Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère le fonction numérique $F$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer que : $(\forall x\geq 0)\,;\quad 0\leq F(x)\leq x\mathrm{e}^{-x^2}$ .

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall x\geq 1)\,;\;\; \mathrm{e}^{-x^2}\leq \mathrm{e}^{-x}$ , en déduire la limite de la fonction $F$ en $+\infty$ .

**0,5 pt** **2 -** Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que :
$(\forall x\geq 0)\quad F'(x)=\mathrm{e}^{-2x^2}-2xF(x)$ .

**3 -** On considère la fonction $G$ définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} G(x)=F\left(\tan x\right)\;\; si\;\; 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ G(\dfrac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

**0,25 pt** **a)** Montrer que la fonction $G$ est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$ .

**0,75 pt** **b)** Montrer qu'il existe un réel $c$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $F'(c)=0$ et que :
$F(c)=\dfrac{\mathrm{e}^{-2c^2}}{2c}$ .

(On pourra appliquer le théorème de ROLLE à la fonction $G$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

**4 -** On considère la fonction numérique $H$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $H(x)=F'(x)\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ .

**0,5 pt** **a)** Montrer que la fonction $H$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ .

**0,5 pt** **b)** En déduire que $c$ est unique, puis donner le tableau de variations de $F$ .

FIN

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : NORMAL 2011

## MATHÉMATIQUES

### Exercice 1 : (3 pts)

### PARTIE I

Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ on considère les deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0 = I$ ; $A^1 = A$ ; $A^2 = A \times A$ et $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$)

0,5 pt **1 -** Montrons que : $(\forall k \in \mathbb{N})\,;\; A^{2k} = I$ .

On a

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $A^2 = I$

Par suite $(\forall k \in \mathbb{N})\,;\; A^{2k} = (A^2)^k = I^k = I$

Alors $\boxed{(\forall k \in \mathbb{N})\,;\; A^{2k} = I}$ .

0,5 pt **2 -** Montrons que $A$ admet une matrice inverse $A^{-1}$ que l'on déterminera.

On a $A^2 = I$

Alors $A \times A = I$

Donc il existe une matrice $A' = A$ telle que $A \times A' = I$ et $A' \times A = I$

Par suite $\boxed{\text{la matrice } A \text{ admet une matrice inverse } A^{-1} = A}$

## Partie II

Soit $a$ un nombre réel .

Pour tout $x$ et $y$ de l'intervalle $I = ]a; +\infty[$ on pose : $\quad x * y = (x-a)(y-a) + a$ .

0,5 pt **1 - a)** Montrons que $*$ est une loi de composition interne dans $I$ .

Soient $x$ et $y$ deux éléments de l'intervalle $I$ .

On a

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x \in I \\ y \in I \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x > a \\ y > a \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x - a > 0 \\ y - a > 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow (x-a)(y-a) + a > a
\end{aligned}$$

Alors $(\forall (x,y) \in I^2 \ : \ x * y \in I$ .

Par suite $\boxed{* \text{ est une loi de composition interne dans } I \text{ .}}$

0,5 pt **b)** Montrons que $*$ est une loi commutative et associative.

• Soient $x$ et $y$ deux éléments de l'intervalle $I$ .

On a

$$\begin{aligned}
x * y &= (x-a)(y-a) + a \\
&= (y-a)(x-a) + a \\
&= y * x
\end{aligned}$$

Par suite $(\forall (x,y) \in I^2 \ : \ x * y = y * x$ .

Alors $\boxed{* \text{ est une loi commutative}}$

• Soient $x$ , $y$ et $z$ trois éléments de l'intervalle $I$ .

On a

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= ((x-a)(y-a) + a) * z \\
&= (x-a)(y-a)(z-a) + a
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x * (y * z) &= x * (y-a)(z-a) + a) \\
&= (x-a)(y-a)(z-a) + a
\end{aligned}$$

Donc $(x * y) * z = x * (y * z)$

Par suite $(\forall (x,y,z) \in I^3 \ : \ (x * y) * z = x * (y * z)$ .

Alors $\boxed{* \text{ est une loi associative.}}$

0,5 pt **c)** Montrons que $(I,*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

Soit $x$ de $I$ , résolvons dans $I$ l'équation $x * e = x$

On a

$$\begin{aligned} x * e = x &\Leftrightarrow (x-a)(e-a)+a = x \\ &\Leftrightarrow (x-a)(e-a) = x-a \\ &\Leftrightarrow (x-a)(e-a-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-a=0 \texttt{ ou } e-a-1=0 \\ &\Leftrightarrow x=a \texttt{ ou } e=a+1 \\ &\Leftrightarrow e=a+1 \texttt{ car } x>a \end{aligned}$$

On a $(\exists e \in I)(\forall x \in I) \ : \ x * e = x$ et loi $*$ est une loi commutative

Donc $\boxed{(I,*) \text{ admet un élément neutre } e = a+1.}$

0,5 pt **2 -** Montrons que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

Montrons que tout élément de $I$ admet un symétrique par rapport à la loi $*$

Soit $x$ de $I$ , résolvons dans $I$ l'équation $x * x' = e$

On a

$$\begin{aligned} x * x' = e &\Leftrightarrow (x-a)(x'-a)+a = a+1 \\ &\Leftrightarrow (x-a)(x'-a) = 1 \\ &\Leftrightarrow x'-a = \frac{1}{x-a} \quad \texttt{car} x-a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x' = \frac{1}{x-a}+a \end{aligned}$$

On a $x' \in I \quad \texttt{car} \quad x \in I \Rightarrow x-a>0 \Rightarrow \dfrac{1}{x-a}+a > a$

Donc $(\forall x \in I)(\exists x' \in I) \ : \ x * x' = e$

Puisque la loi est commutative

Alors tout élément de $I$ admet un symétrique par rapport à la loi $*$

On a

- La loi $*$ est associative dans $I$
- La loi $*$ admet un élément neutre dans $I$
- Tout élément de $I$ admet un symétrique par rapport à la loi $*$

Donc $(I,*)$ est un groupe.

Puisque La loi $*$ est commutative

Alors $\boxed{(I,*) \text{ est un groupe commutatif.}}$

**3 -** On considère l'application : $\begin{array}{rccc} \phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a} \end{array}$

0,5 pt **a)** Montrons que $\varphi$ est un isomorphisme de $(I,*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ .

Montrons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(I,*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ .

Soit $x$ et $y$ deux éléments de $I$.

On a

$$\begin{aligned}\varphi(x*y) &= \frac{1}{x*y-a}\\ &= \frac{1}{(x-a)(y-a)+a-a}\\ &= \frac{1}{(x-a)(y-a)}\\ &= \frac{1}{x-a}\times\frac{1}{y-a}\\ &= \varphi(x)\times\varphi(y)\end{aligned}$$

Alors $(\forall(x;y)\in I^2)\ :\ \varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

Donc $\varphi$ est un homomorphisme de $(I,*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ .

Montrons que l'application $\varphi$ est bijective de $I$ vers $\mathbb{R}_+^*$

Soit $y\in\mathbb{R}_+^*$ ; résolvons dans $I$ l'équation $\varphi(x)=y$

On a

$$\begin{aligned}\varphi(x)=y &\Leftrightarrow \frac{1}{x-a}=y\\ &\Leftrightarrow x-a=\frac{1}{y}\quad (y\neq 0)\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}+a\end{aligned}$$

On a $\frac{1}{y}+a>a$ car $y>0$

Donc $(\forall y\in\mathbb{R}_+^*)(\exists! x=\frac{1}{y}+a\in I)\ :\ \varphi(x)=y$

Par suite l'application $\varphi$ est bijective de $I$ vers $\mathbb{R}_+^*$

Alors $\boxed{\varphi \text{ est un homomorphisme de } (I,*) \text{ vers } (\mathbb{R}_+^*,\times)\ .}$

**0,5 pt** **b)** Résolvons dans l'ensemble $I$ l'équation : $x^{(3)}=a^3+a$ où $x^{(3)}=x*x*x$ .

- Si $a\leq 0$

On a

$$\begin{aligned}a\leq 0 &\Rightarrow a^3+a\leq a\\ &\Rightarrow x^{(3)}\leq a\\ &\Rightarrow x^{(3)}\notin I=]a;+\infty[\end{aligned}$$

Donc l'équation n'a pas solution si $a\leq 0$

- Si $a>0$

On a $a>0\ \Rightarrow a^3+a>a$

Donc

$$\begin{aligned} x^{(3)} = a^3 + a &\Leftrightarrow \varphi(x^{(3)}) = \varphi(a^3 + a) \texttt{ car } \varphi \texttt{ est bijective} \\ &\Leftrightarrow (\varphi(x))^3 = \frac{1}{a^3 + a - a} \texttt{ car } \varphi \texttt{ est homomorphisme} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-a}\right)^3 = \frac{1}{a^3} \\ &\Leftrightarrow (x-a)^3 = a^3 \\ &\Leftrightarrow x - a = a \texttt{ car } x \mapsto x^3 \texttt{ est bijective de } \mathbb{R}_+^* \texttt{ vers } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow x = 2a \end{aligned}$$

Puisque $2a \in I$ alors $2a$ est une solution de l'équation $x^{(3)} = a^3 + a$

Alors $\boxed{\mathcal{S} = \{2a, a > 0\}}$

## Exercice 2 : (3 pts)

Soit $N$ l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N = \underbrace{11............1}_{2010 \text{ fois } 1}$

**1 -** Montrons que le nombre $N$ est divisible par 11 .

0.25 pt

On a $10 \equiv -1\ [11]$

Donc $(\forall i \in \mathbb{N})\ 10^{2i} \equiv 1\ [11]$ et $10^{2i+1} \equiv -1\ [11]$

Et on a

$$\begin{aligned} N &= \underbrace{11............1}_{2010} \\ &= \sum_{i=0}^{i=2009} 1 \times 10^i \\ &= \sum_{i=0}^{i=2009} 10^i \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} N &\equiv \sum_{i=0}^{i=2009} 10^i \quad [11] \\ &\equiv \sum_{i=0}^{i=1004} 10^{2i} + \sum_{i=0}^{i=1004} 10^{2i+1} \quad [11] \\ &\equiv \sum_{i=0}^{i=1004} 1 + \sum_{i=0}^{i=1004} (-1) \quad [11] \\ &\equiv 2005 - 2005 \quad [11] \\ &\equiv 0 \quad [11] \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{le nombre } N \text{ est divisible par } 11}$

0.75 pt **2 - a)** Vérifions que le nombre 2011 est premier et que : $10^{2010} - 1 = 9N$ .

On a les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égale à 2011 sont :

2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37 , 41 , 43

Puisque aucun de ces nombres ne divise le nombre 2011

Alors $\boxed{\text{le nombre 2011 est premier}}$

On a

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=0}^{i=2009} 10^i \\ &= \frac{10^{2010}-1}{10-1} \\ &= \frac{10^{2010}-1}{9} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{9N = 10^{2010} - 1}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que le nombre 2011 divise le nombre $9N$ .

On a 2011 est un nombre premier et $2011 \wedge 10 = 1$

Donc selon le petit théorème de Fermat $10^{2011-1} \equiv 1 \; [2011]$

Alors $10^{2010} - 1 \equiv 0 \; [2011]$

Puisque $10^{2010} - 1 = 9N$ .

Alors $9N \equiv 0 \; [2011]$

Par suite $\boxed{\text{le nombre 2011 divise le nombre } 9N \text{ .}}$

**0.5 pt** **c)** Déduisons que le nombre 2011 divise le nombre $N$ .

On a le nombre 2011 divise le nombre $9N$ .

et $2011 \wedge 9 = 1$

Alors $\boxed{\text{le nombre 2011 divise le nombre } N \text{ .}}$ selon le théorème de Gauss

**0.5 pt** **3 -** Montrons que le nombre $N$ est divisible par 22121.

On a le nombre $N$ est divisible par 11.

et le nombre $N$ est divisible par 2011.

Puisque $2011 \wedge 11 = 1$

Alors le nombre $N$ est divisible par $11 \times 2011$

Donc $\boxed{\text{le nombre } N \text{ est divisible par 22121.}}$

## Exercice 3 : (3 pts)

### Partie I

Soit $m$ un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnu $z$ :

$$(E_m) \; : \; z^2 + [(1-\mathrm{i})m - 4]z - \mathrm{i}m^2 - 2(1-\mathrm{i})m + 4 = 0$$

.

**0.5 pt**

**1 -** Vérifions que le nombre $z_1 = -m+2$ est solution de l'équation $(E_m)$ .

On a

$$z_1^2 + [(1-\mathrm{i})m-4]z_1 - \mathrm{i}m^2 - 2(1-\mathrm{i})m + 4 = (-m+2)^2 + [(1-\mathrm{i})m-4](-m+2) - \mathrm{i}m^2 -2(1-\mathrm{i})m+4$$
$$= m^2 - 4m + 4 - (1-\mathrm{i})m^2 + 2m(1-\mathrm{i}) + 4m - 8 -\mathrm{i}m^2 - 2m + 2\mathrm{i}m + 4$$
$$= m^2(1-(1-\mathrm{i})-i) + m(-4+2(1-\mathrm{i})+4-2+2\mathrm{i}) +4-8+4$$
$$= 0$$

Donc $\boxed{\text{le nombre } z_1 = -m+2 \text{ est solution de l'équation } (E_m) \text{ .}}$

**2 -** Soit $z_2$ la deuxième solution de l'équation $(E_m)$ .

**0.5 pt**

**a)** Montrons que : $z_1.z_2 = 1 \Longleftrightarrow im^2 + 2\,(1-\mathrm{i})\,m - 3 = 0$ .

On a $z_1$ et $z_2$ sont les deux solutions de l'équation $(E_m)$ .

Alors $z_1.z_2 = \dfrac{-\mathrm{i}m^2 - 2(1-\mathrm{i})m+4}{1} = -\mathrm{i}m^2 - 2(1-\mathrm{i})m + 4$ .

Par suite

$$\begin{aligned} z_1.z_2 = 1 &\Leftrightarrow -\mathrm{i}m^2 - 2(1-\mathrm{i})m + 4 = 1 \\ &\Leftrightarrow -\mathrm{i}m^2 - 2(1-\mathrm{i})m + 3 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{z_1.z_2 = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{i}m^2 + 2\,(1-\mathrm{i})\,m - 3 = 0 \text{ .}}$

**1 pt**

**b)** Déterminons les deux valeurs de $m$ pour lesquelles on a : $z_1.z_2 = 1$ .

On a $z_1.z_2 = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{i}m^2 + 2\,(1-\mathrm{i})\,m - 3 = 0$ .

Donc les deux valeurs de $m$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{i}m^2 + 2\,(1-\mathrm{i})\,m - 3 = 0$

On a

$$\begin{aligned}\Delta &= (2(1-\mathrm{i}))^2 - 4\times(-3)\times \mathrm{i}\\ &= -8\mathrm{i}+12\mathrm{i}\\ &= 4\mathrm{i}\\ &= 2(1-1+2\mathrm{i})\\ &= 2(1+\mathrm{i})^2\\ &= (\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2})^2 \neq 0\end{aligned}$$

Donc l'équation $\mathrm{i}m^2+2\,(1+\mathrm{i})\,m-3=0$ admet deux solutions différentes dans $\mathbb{C}$ qui sont :$m_1 = \dfrac{-2(1+\mathrm{i})-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2i}$ et $m_2 = \dfrac{-2(1+\mathrm{i})+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2\mathrm{i}}$

Par suite les deux valeurs de $m$ pour lesquelles on a : $z_1.z_2 = 1$ sont :

$\boxed{\dfrac{2+\sqrt{2}+\mathrm{i}(2-\sqrt{2})}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{2-\sqrt{2}+\mathrm{i}(2+\sqrt{2})}{2}}$ .

## Partie II

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$. On considère l'application $S$ qui à chaque point $M$ d'affixe $z$ , associe le point $M'$ d'affixe $z'$ , tel que : $z'-1=-(z-1)$ et la rotation $R$ de centre le point $\Omega$ d'affixe $(1+\mathrm{i})$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ , et soit $z''$ l'affixe du point $M''=R(M)$

**0.25 pt** **1 - a)** Montrons que l'application $S$ est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1 .

Soit $B$ un point d'affixe 1

On a

$$\begin{aligned}S(M)=M' &\Leftrightarrow z'-1=-(z-1)\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM'} = -\overrightarrow{BM}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM'}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow B\ \texttt{est le milieu du segment}\ [MM']\end{aligned}$$

Alors $\boxed{\text{l'application } S \text{ est la symétrie centrale de centre le point } B \text{ d'affixe } 1 .}$

**0.25 pt** **b)** Montrons que : $z''=\mathrm{i}z+2$

On a $R$ la rotation de centre le point $\Omega$ d'affixe $1+\mathrm{i}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Donc

$$\begin{aligned} M'' = R(M) &\Leftrightarrow z'' - (1+\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z-(1+\mathrm{i})) \\ &\Leftrightarrow z'' - 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z-1-\mathrm{i}) \\ &\Leftrightarrow z'' = \mathrm{i}z - \mathrm{i} + 1 + 1 + \mathrm{i} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{z'' = \mathrm{i}z + 2.}$

**2 -** Soit $A$ le point d'affixe 2 . On suppose que le point $M$ est distinct du point O origine du repère.

**0.5 pt** **a)** • Calculons : $\dfrac{z''-2}{z'-2}$ .

On a $z'-1 = -(z-1) \Leftrightarrow z' = -z+2$ et $z'' = \mathrm{i}z+2$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{z''-2}{z'-2} &= \frac{\mathrm{i}z+2-2}{-z+2-2} \\ &= \frac{\mathrm{i}z}{-z} \\ &= -\mathrm{i} \end{aligned}$$

• Déduisons la nature du triangle $AM'M''$ .

On a $\dfrac{z''-2}{z'-2} = -\mathrm{i}$

Donc $|\dfrac{z''-2}{z'-2}| = |-\mathrm{i}|$ et $arg(\dfrac{z''-2}{z'-2}) \equiv arg(-\mathrm{i})\ [2\pi]$

Alors $AM = AM'$ et $\overline{(\overrightarrow{AM'};\overrightarrow{AM})} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Alors $\boxed{\text{le triangle } AM'M'' \text{ est isocèle et rectangle en } A}$

**0.5 pt** **b)** Déterminons l'ensemble des points $M$ pour lesquels les points $A$ , $\Omega$ , $M'$ et $M''$ sont cocycliques.

On a les points $A$ , $\Omega$ , $M'$ et $M''$ sont cocycliques si et seulement si $z \neq 0$ ; $z' \neq \omega$ ; $z'' \neq \omega\ et \dfrac{z''-2}{z'-2} \times \dfrac{z''-\omega}{z'-\omega} \in \mathbb{R}$.

Soit $z \neq 0$ ; $z \neq \omega\ et\ z \neq \bar{\omega}$

On a

$$\frac{z''-\omega}{z'-\omega}\times\frac{z''-2}{z'-2}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -i\times\frac{z''-\omega}{z'-\omega}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow -i\times\frac{-z+2-1-i}{iz+2-1-i}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-z+1-i}{-z+1+i}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{z+i-1}{-z-1-i}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow Im(\frac{z+i-1}{-z-1-i})=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(y+1)-(x-1)(y-1)=0 \quad z=x+iy$$
$$\Leftrightarrow 2x-2=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

Si $z=\omega$ ; $z=\bar{\omega}$ alors $M'=\Omega$ ; $M''=\Omega$

Par suite l'ensemble des points $M$ pour lesquels les points $A$ , $\Omega$ , $M'$ et $M''$ sont cocycliques est $\boxed{\text{la droite d'équation } x=1}$

## Exercice 4 : (3 pts)

### Partie I

**Étude des solutions positives de l'équation**$(E)$ : $\mathrm{e}^x=x^n$ **avec** $n$ **un entier naturel non nul.**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur l'ensemble $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

0,25 pt **1 -** Vérifions que pour tout $x$ de l'ensemble $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ on a : $\mathrm{e}^x=x^n\iff n=f(x)$ .

Soit $x\in D$

On a

$$\mathrm{e}^x=x^n \Leftrightarrow x=\ln(x^n)$$
$$\Leftrightarrow x=n\ln(x)$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{x}{\ln x}\ \texttt{car}\ x\neq 1$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de l'ensemble } D=[0;1[\cup]1;+\infty[ \text{ on a : } \mathrm{e}^x=x^n\iff n=f(x)\ .}$

**0,5 pt** **2 -** Montrons que la fonction $f$ est dérivable à droite en 0 .

On a

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{x}{\ln x}-0}{x}\\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\ln x}\\ &= 0 \quad (\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ .}}$

**1,5 pt** **3 -** Calculons les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x}{\ln x} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln x = 0^-$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln x = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

  Donc $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ admet une direction parabolique de direction l'axe des abscisses.}}$

Interprétons graphiquement les résultats obtenus.

- On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$

  Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } x = 1 \text{ est une asymptote verticale à la courbe de } f.}$

**0,75 pt** **4 -** Étudions les variations de la fonction $f$ sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$

On a la fonction $f$ est dérivable sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$

Alors $(\forall x \in D)\ f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)' = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$

Donnons son tableau de variations.

On a $(\forall x \in D)\ f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$

Donc le signe de $f'(x)$ sur $D$ est le signe de $\ln(x)-1$ sur $D$

Alors

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $e$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**5 -** Montrons que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées

**0,5 pt**

On a la fonction $f$ est deux fois dérivable sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$

Alors

$$\begin{aligned}(\forall x \in D)\ f''(x) &= \left(\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}\right)' \\ &= \frac{\dfrac{\ln^2(x)}{x} - 2\dfrac{\ln(x)}{x}(\ln(x)-1)}{\ln^4(x)} \\ &= \frac{\ln(x) - 2(\ln(x)-1)}{x\ln^3(x)} \\ &= \frac{\ln(x) - 2\ln(x) + 2}{x\ln^3(x)} \\ &= \frac{-\ln(x)+2}{x\ln^3(x)}\end{aligned}$$

On a le signe de $f''(x)$ est le signe du produit $\ln(x)(-\ln(x)+2)$ sur $D$

On a $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln(x)+2 = 0 \Leftrightarrow x = e^2$

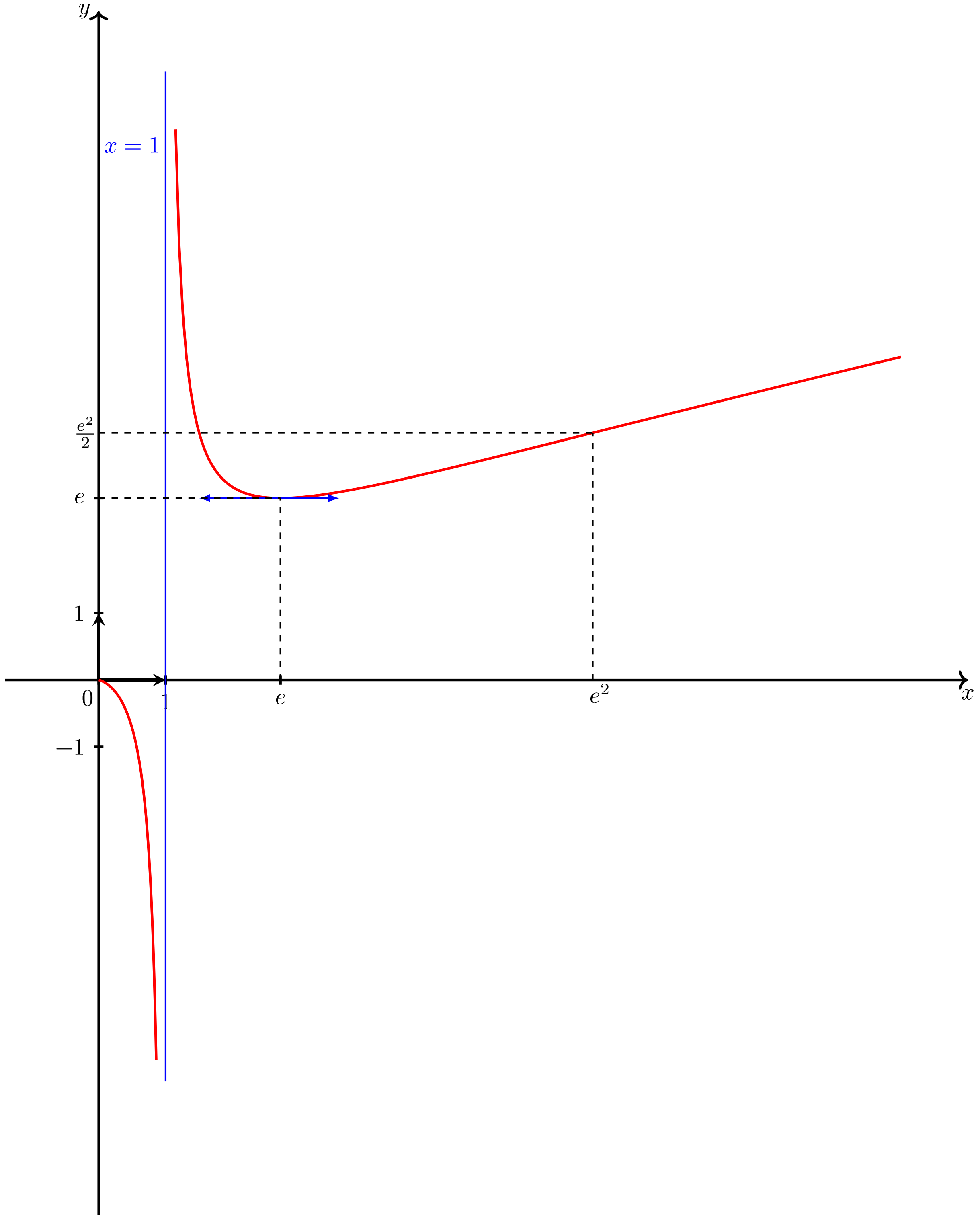
Donc

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |

Puisque $f''$ s'annule en $e^2$ et change de signe au voisinage de $e^2$

Alors $\boxed{\text{la courbe } (\mathcal{C}) \text{ admet un point d'inflexion dont les coordonnées } (e^2; \frac{e^2}{2}).}$

**6 -** Représentons graphiquement $(\mathcal{C})$ .




**0,5 pt**

**0,5 pt**

**7 -** Montrons que pour $n \geq 3$ , l'équation $(E)$ admet exactement deux solutions $a_n$ et $b_n$ tel que : $1 < a_n < \mathrm{e} < b_n$ .

- On a la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1[$
  Donc la fonction $f$ est une bijection de l'intervalle $]0;1[$ vers l'intervalle $f(]0;1[) = ]-\infty;0[$
  Puisque $n \notin f(]0;1[)$ donc $n$ n'a pas d'antécédent par la fonction $f$ sur $]0;1[$
- On a la fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]1;e[$
  Donc la fonction $f$ est une bijection de l'intervalle $]1;e[$ vers l'intervalle $f(]1;e[) = ]e;+\infty[$,

puisque $n \in f(]0;1[)$ car $n \geq 3$ donc $n$ a un antécédent unique $a_n$ par la fonction $f$ sur $]1;e[$

- On a la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]e;+\infty|$

  Donc la fonction $f$ est une bijection de l'intervalle $]e;+\infty|$ vers l'intervalle $f(]e;+\infty|) = ]e;+\infty[$,puisque $n \in f(]e;+\infty|)$ car $n \geq 3$ donc $n$ a un antécédent unique $b_n$ par la fonction $f$ sur $]e;+\infty|$

Alors $\boxed{(\forall n \geq 3\ ,\ (E) \text{ admet exactement deux solutions } a_n \text{ et } b_n \text{ tel que } 1 < a_n < \mathrm{e} < b_n\ .}$

## Partie II

**Étude des deux suites $(a_n)_{n\geq 3}$ et $(b_n)_{n\geq 3}$ .**

0,5 pt **1 -** Montrons que : $(\forall n \geq 3)\,;\quad b_n \geq n$ , en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq 3}$ .

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$

On a $b_n > e \ \Rightarrow\ \ln(b_n) > \ln(e)$

Donc $\ln(b_n) > 1$

D'où $n\ln(b_n) > n$

Puisque $b_n$ est solution de $(E)$ alors $b_n = n\ln(b_n)$

Alors $\boxed{(\forall n \geqslant 3)\ b_n \geqslant n}$

On a $(\forall n \geqslant 3)\ b_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Alors $\boxed{\text{la limite de la suite } (b_n)_{n\geq 3} \text{ égale à } +\infty}$

0,5 pt **2 - a)** Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$

On a $f(a_n) = n\ f(a_{n+1}) = n+1$ et $n+1 > n$

Donc $f(a_{n+1}) > f(a_n)$

Puisque $a_n \in [1;e]$ et $a_{n+1} \in [1;e]$ et la fonction $f$ est strictement décroissante sur $[1;e]$

Alors $a_n < a_{n+1}$.

Donc $(\forall n > 3)\ a_n < a_{n+1}$

Par suite $\boxed{\text{la suite est } (a_n)_{n\geq 3} \text{ décroissante}}$

On a la suite est $(a_n)_{n\geq 3}$ décroissante et minoré par 1

Donc $\boxed{\text{elle est convergente.}}$

0,5 pt **b)** Montrons que : $\quad (\forall n \geq 3)\,;\quad \dfrac{1}{n} < \ln(a_n) < \dfrac{\mathrm{e}}{n}$ .

On a $(\forall n > 3)\ 1 < a_n < e$ et $(\forall n > 3)\ a_n = n\ln(a_n)$

Donc $(\forall n > 3)\ \dfrac{1}{n} < \ln(a_n) < \dfrac{e}{n}$

Par suite $(\forall n > 3)\ e^{\frac{1}{n}} < a_n < e^{\frac{e}{n}}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$ et ; $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{e}{n}} = e^0 = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

0,5 pt

**c)** Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = \mathrm{e}$ .

On a $(\forall n > 3)\ a_n = n\ln(a_n)$

Donc $(\forall n > 3)\ a_n^n = e^{a_n}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ et la fonction $x \mapsto\ e^x$ est continue en 1

Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = e^1 = e.}$

## Exercice 5 : (3 pts)

On considère la fonction numérique $F$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

0,5 pt

**1 - a)** Montrons que : $(\forall x \geq 0)\,;\quad 0 \leq F(x) \leq x\mathrm{e}^{-x^2}$ .

On a

$$\begin{aligned}(\forall x \geq 0)(\forall t \in \mathbb{R})\ 0 \leqslant t \leqslant x\ &\Rightarrow\ -x^2 \leqslant -t^2 \leqslant 0\\ &\Rightarrow\ e^{-x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant 1\\ &\Rightarrow\ 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant 1\end{aligned}$$

Alors $(\forall x \geq 0)\ \ 0 \leqslant \int_0^x e^{-t^2}dt \leqslant \int_0^x 1dt$

Donc $(\forall x \geq 0)\ \ 0 \leqslant \int_0^x e^{-t^2}dt \leqslant x$

Par suite $\boxed{(\forall x \geq 0)\,;\quad 0 \leq F(x) \leq x\mathrm{e}^{-x^2}\ .}$

0,5 pt

**b)** • Montrons que : $(\forall x \geq 1)\,;\ \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$ .

Soit $x \geqslant 1$

On a

$$\begin{aligned}x \geqslant 1\ &\Rightarrow x^2 \geqslant x\\ &\Rightarrow -x \geqslant -x^2\\ &\Rightarrow e^{-x} \geqslant e^{-x^2}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\forall x \geq 1)\,;\ \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}}$

• Déduisons la limite de la fonction $F$ en $+\infty$ .

On a $(\forall x \geq 1)\,;\ \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$ et $(\forall x \geq 0)\,;\quad 0 \leq F(x) \leq x\mathrm{e}^{-x^2}$ .

Donc $(\forall x \geq 1)\,;\quad 0 \leq F(x) \leq x\mathrm{e}^{-x}$ .

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Alors $\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$

**0,5 pt**

**2 -** Montrons que la fonction $F$ est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que : $(\forall x \geq 0) \quad F^{'}(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} - 2xF(x)$ .

On a $(\forall x \geqslant 0) \;\; F(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

On a $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

Alors la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ,en particulier sur l'intervalle $[0;+\infty[$

On a $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$ ,donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ .

Alors la fonction $F$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivable sur $[0;+\infty[$

Et on a

$$\begin{aligned}
(\forall x \geqslant 0) \;\; F^{'}(x) &= \left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)' \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x^2}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)' \\
&= -2x\mathrm{e}^{-x^2} \times \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x^2} \times \mathrm{e}^{-x^2} \\
&= -2xF(x) + \mathrm{e}^{-2x^2}
\end{aligned}$$

Alors $\boxed{(\forall x \geq 0) \quad F^{'}(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} - 2xF(x) \ .}$

**3 -** On considère la fonction $G$ définie sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \;\; si \; 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ G(\dfrac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

**0,25 pt**

**a)** Montrons que la fonction $G$ est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$ .

On a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} G(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} F(\tan(x)) = 0$

Car $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

Alors $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} G(x) = G(\frac{\pi}{2})$

Donc $\boxed{\text{la fonction } G \text{ est continue à gauche en } \dfrac{\pi}{2} \ .}$

**0,75 pt**

**b)** Montrons qu'il existe un réel $c$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $F^{'}(c) = 0$ et que : $F(c) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2c^2}}{2c}$ .

On a

- la fonction $G$ est continue sur l'intervalle $]0;\dfrac{\pi}{2}[$ comme composé de deux fonctions continues
- la fonction $G$ est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$ .
- la fonction $G$ est continue à droite en $0$ .

Alors la fonction $G$ est continue sur l'intervalle $[0;\dfrac{\pi}{2}]$ comme composé de deux fonctions continues

et on a la fonction $G$ est dérivable sur l'intervalle $]0;\dfrac{\pi}{2}[$ comme composé de deux fonctions dérivables

et on a $G(0) = 0$ et $G(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

Donc d'après le théorème de *Rolle* il existe un réel $c_1 \in ]0;\dfrac{\pi}{2}[$ tel que $G'(c_1) = 0$

On a $(\forall x \in ]0;\dfrac{\pi}{2}[$ $G'(x) = (1+\tan^2(x))F'(\tan(x))$ donc $G'(c_1) = (1+\tan^2(c_1))F'(\tan(c_1))$

Puisque $1 + \tan^2 \neq 0$ alors $F'(\tan(c_1)) = 0$

Posons $c = \tan(c_1)$ avec $c_1 \in ]0;\dfrac{\pi}{2}[$

Alors $F'(c) = 0$ On a $c_1 \in ]0;\dfrac{\pi}{2}[ \Rightarrow c \in \tan(]0;\dfrac{\pi}{2}[) = ]0;+\infty[$

Par suite $\boxed{\text{il existe } c \in ]0;+\infty[ \text{ tel que } F'(c) = 0 \text{ .}}$

Puisque $(\forall x \geq 0)$ $F^{'}(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} - 2xF(x)$ .

Alors $F'(c) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2c^2} - 2cF(c) = 0$

Donc $\boxed{F(c) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2c^2}}{2c}}$

**4 -** On considère la fonction numérique $H$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $H(x) = F^{'}(x)\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ .

**0,5 pt** **a)** Montrons que la fonction $H$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ .

On a $x \mapsto F^{'}(x)$ et $x \mapsto_{;} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ sont deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

Donc la fonction $H$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et on a $(\forall x > 0)$ $H'(x) = F''(x) \times \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} + \left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)' \times F'(x)$

On a $(\forall x > 0)$ $F'(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} - 2xF(x) \Rightarrow F''(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x^2} - 2xF'(x) - 2F(x)$

Par suite

$$\begin{aligned}(\forall x>0)\ H'(x) &= \left(-4x\mathrm{e}^{-2x^2}-2xF'(x)-2F(x)\right)\times\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}+\frac{4x^2\mathrm{e}^{x^2}-2\mathrm{e}^{x^2}}{4x^2}\times F'(x)\\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}-F'(x)\mathrm{e}^{x^2}-\frac{F(x)\mathrm{e}^{x^2}}{x}+F'(x)\mathrm{e}^{x^2}-\frac{F'(x)\mathrm{e}^{x^2}}{2x^2}\\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}-\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\left(2xF(x)+F'(x)\right)\\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}-\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\times\mathrm{e}^{-2x^2}\\ &= -\mathrm{e}^{-x^2}\left(2+\frac{1}{2x^2}\right)<0\end{aligned}$$

Alors $\boxed{\text{la fonction } H \text{ est strictement décroissante sur } ]0;+\infty[\ .}$

**0,5 pt** **b)** Déduisons que $c$ est unique .

On a $(\forall x>0)\ F'(x)=0 \Leftrightarrow F^{'}(x)\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} \Leftrightarrow H(x)=0$

Puisque $F'(c)=0$ alors $H(c)=0$ donc l'équation $H(x)=0$ admet au moins une solution dans $]0;+\infty[$ .

Or la fonction $H$ est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ .

Donc l'équation $H(x)=0$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$ .

Puisque $c$ est la solution de l'équation $H(x)=0$ dans $]0;+\infty[$ .

Alors $\boxed{c \text{ est unique.}}$

- le tableau de variations de $F$ .

Soit $x\in\ ]0;+\infty[$ .

$$\begin{aligned}\texttt{on a}\quad 0<x<c &\Rightarrow H(x)>H(c)\\ &\Rightarrow H(x)>0\\ &\Rightarrow F^{'}(x)\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}>0\\ &\Rightarrow F^{'}(x)>0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\texttt{et} \quad x > c \;&\Rightarrow\; H(c) > H(x) \\
&\Rightarrow\; 0 > H(x) \\
&\Rightarrow\; 0 > F^{'}(x)\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} \\
&\Rightarrow\; 0 > F^{'}(x)
\end{aligned}$$

Alors le tableau de la fonction $F$ est comme suit :

| $x$ | $0$ | | $c$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $F(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $F(c)$ | $\searrow$ | $0$ |

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage Juillet 2011**

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

— Exercice 1 : **Structures algébriques** ................................. **3.5 points**
— Exercice 2 : **Arithmétiques** ................................. **2.5 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** ................................. **4 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** ................................. **6 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** ................................. **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : (3.5pts)

Soit $x$ et $y$ deux nombres de l'intervalle $I = ]0,1[$, on pose $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

**0.5 pt** **1 - a)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $I$.

**0.5 pt** **b)** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

**0.5 pt** **c)** Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre à déterminer.

**0.5 pt** **2 -** Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

**3 -** On considère les deux ensembles suivants : $\mathbb{H} = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{K} = \left\{\dfrac{1}{2^n+1} / n \in \mathbb{Z}\right\}$

**0.5 pt** **a)** Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

**b)** On considère l'application $\varphi$ définie par : $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{H} & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array}$

**0.5 pt** Montrer que l'application $\varphi$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{H}, \times)$ dans $(I, *)$.

**0.5 pt** **c)** Déduire que $(\mathbb{K}, *)$ est un sous groupe du groupe $(I, *)$.

## Exercice 2 : (2.5 pts)

Soit $x$ un nombre entier naturel vérifiant $10^x \equiv 2[19]$.

**0.25 pt** **1 - a)** Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$.

**0.5 pt** **b)** Montrer que : $10^{18} \equiv 1[19]$.

**2 -** Soit $d$ le pgcd des nombres 18 et $x+1$

**0.75 pt** **a)** Montrer que : $10^d \equiv 1[19]$.

**0.5 pt** **b)** Montrer que : $d = 18$.

**0.5 pt** **c)** Déduire que : $x \equiv 17[18]$.

## Exercice 3 : (4 pts)

**Partie I** :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante $(E)$ : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

**0.5 pt** **1 -** Vérifier que $-2i$ est une solution de l'équation $(E)$.

**0.5 pt** **2 -** Déterminer les deux nombres complexes $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

**0.5 pt** **3 - a)** Déterminer les deux racines carrées du nombre $5 - 12i$.

**0.5 pt** **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

**Partie II** :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points $A$, $B$, et $C$ d'affixes respectifs $a = -1+3i$, $b = -2i$ et $c = 2+i$.

**0.5 pt** **1 -** Montrer que le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $C$.

**2 -** On considère la rotation $\mathcal{R}_1$ de centre $B$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation $\mathcal{R}_2$ de centre $A$ et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$. Soit $M$ un point du plan complexe d'affixe $z$ et $M_1$ son image par la rotation $\mathcal{R}_1$ et $M_2$ son image par la rotation $\mathcal{R}_2$

**0.5 pt** **a)** Vérifier que l'écriture complexe de la rotation $\mathcal{R}_1$ est $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$.

**0.5 pt** **b)** Déterminer $z_2$ l'affixe de $M_2$ en fonction de $z$.

**0.5 pt** **c)** Déduire que le point $I$, le milieu du segment $[M_1M_2]$, est un point fixe.

## Exercice 4 : (6 pts)

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$ et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. ( On prend : $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1\text{cm}$)

**1 pt** **1 -** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$.

**0.25 pt** **2 - a)** Donner le tableau de variation de la fonction $f$.

**0.75 pt** **b)** Montrer que $f$ est une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ vers un intervalle $J$ à déterminer, puis donner le tableau de variation de la bijection réciproque $f^{-1}$.

**0.75 pt** **3 -** Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire $(C)$ et $(C')$ la courbe représentative de la fonction $f^{-1}$ dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

**0.5 pt** **4 - a)** Calculer l'intégral $\int_1^{1+e} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$. ( On peut poser : $t = f^{-1}(x)$)

**0.5 pt** **b)** Déduire l'aire du domaine plan limité par $(C^{-1})$ et les droites $x=1$, $x=e+1$ et $y=x$.

**5 -** pour tout entier naturel non nul $n$, on considère l'équation $(E_n)$ : $x + \ln x = n$

**0.25 pt** **a)** Montrer que l'équation $(E_n)$ admet une unique solution $x_n$.

**0.5 pt** **b)** Déterminer la valeur de $x_1$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

**0.5 pt** **6 - a)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $f(x_n) \leq f(n)$ puis déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_n \leq n$.

**0.5 pt** **b)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n - \ln n \leq x_n$

**0.5 pt** **c)** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n - n}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right)$.

## Exercice 5 : (4 pts)

Soient $n$ un entier non nul et $f_n$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

**0.5 pt** **1 -** Montrer que pour $n \geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n$ de l'intervalle $]0;1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

**0.75 pt** **2 -** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante et déduire qu'elle est convergente.

**0.5 pt** **3 - a)** Vérifier que pour $t \neq 1$, On a : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}$.

**0.5 pt** **b)** Déduire que $\alpha_n + \dfrac{(\alpha_n)^2}{2} + \dfrac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \dfrac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

**0.5 pt** **4 - a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$ ; $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

**0.5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$ ; $0 \leq \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$.

**0.75 pt** **c)** En déduire que $l = 1 - e^{-1}$, où $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Ratrappage 2011**

## MATHÉMATIQUES

### Exercice 1 : (3.5pts pts)

**1 - a)**

a- * loi de composition interne dans I :

$$\forall(x;y)\in I^2:(1-x)(1-y)>0,xy>0$$
$$\Rightarrow \forall(x;y)\in I^2: xy+(1-x)(1-y)>xy$$
$$\Rightarrow \forall(x;y)\in I^2: 0<\frac{1}{xy+(1-x)(1-y)}<\frac{1}{xy}$$
$$\Rightarrow \forall(x;y)\in I^2: 0<\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}<1$$
$$\Rightarrow \forall(x;y)\in I^2: 0<x*y<1$$
$$\Rightarrow \forall(x;y)\in I^2: x*y\in I$$

**b)** $*$ est une loi commutative dans $I$ Soit $x$ et $y$ dans $I=]0;1[$:

$$\forall(x;y)\in I^2: x*y=\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$$

$*$ est une loi associative dans $I$

Soient $x;y$ et $y$ dans $I$ $\forall(x;y;z)\in I^3:(x*y)*z=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}*z$

$$=\frac{\frac{xyz}{xy+(1-x)(1-y)}}{\frac{xyz}{xy+(1-x)(1-y)}+\left(1-\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}\right)(1-z)}$$
$$=\frac{xyz}{xyz+(xy+(1-x)(1-y)-xy)(1-z)}$$
$$=\frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\forall(x;y;z)\in I^3: x*(y*z)&=(y*z)*x\\&=\frac{yzx}{yzx+(1-y)(1-z)(1-x)}\\&=\frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}\\&=(x*y)*z\end{aligned}$$

**c)** Soit $e$ un élément neutre de la loi $*$ dans $I$

$$\begin{aligned}
&(\forall x\in I)\quad x*e=x\\
&\Leftrightarrow (\forall x\in I)\frac{xe}{xe+(1-x)(1-e)}=x\\
&\Leftrightarrow (\forall x\in I)\quad \frac{e}{xe+(1-x)(1-e)}=1\\
&\Leftrightarrow (\forall x\in I)\quad e=xe+(1-x)(1-e)\\
&\Leftrightarrow (\forall x\in I)\quad e(1-x)-(1-x)(1-e)=0\\
&\Leftrightarrow (\forall x\in I)\quad (1-x)(2e-1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad 2e-1=0\\
&\Leftrightarrow \quad e=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2}$ est l'élément neutre de la loi $*$ dans $I$

**2 -** $(I,*)$ est un groupe commutative

Soit $x$ dans $I$ et $x'$ son symétrie par rapport à la loi $*$

$$\begin{aligned}
x*x'=\frac{1}{2}&\Leftrightarrow \frac{xx'}{xx'+(1-x)(1-x')}=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow xx'=\frac{1}{2}xx'+\frac{1}{2}(1-x)(1-x')\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}xx'=\frac{1}{2}(1-x)(1-x')\\
&\Leftrightarrow xx'=1-x'-x+xx'\\
&\Leftrightarrow x'=1-x\in I
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x$ dans $I$ admet un sémtrie $x-1$ par rapport à la loi $*$ dans $I$

$$\begin{cases} * \text{ est une loi de compisition interne associative et commutative dans } I\\ * \text{ admet un élément neutre } \frac{1}{2} \text{ dans } I\\ \text{Tout élément dans } I \text{ admet un symétrie par rapport à } * \text{ dans } I\end{cases}$$

et parsuite $(I,*)$ est un groupe commutative.

**3 - a)** $H$ est un sous groupe du groupe $(\mathbb{R}_+^*;\times)$

On a $H\subset\mathbb{R}_+^*$ et $H\neq\emptyset$ ( car $2\in H$)

Soient $x$ et $y$ dans $H$

On a :

$$\begin{aligned}
&\exists(n;m)\in\mathbb{Z}^2: x=2^n, y=2^m\\
&\Rightarrow \exists n-m\in\mathbb{Z}:\frac{x}{y}=2^{n-m}\\
&\Rightarrow \frac{x}{y}\in H
\end{aligned}$$

**b)** $\varphi$ est un homomorphisme de $(H,\times)$ vers $(I,*)$ On a : $\varphi(2^n\times 2^m)=\varphi(2^{n+m})=\dfrac{1}{1+2^{n+m}}$ D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(2^n)*\varphi(2^m)&=\frac{1}{1+2^n}*\frac{1}{1+2^m}\\
&=\frac{\frac{1}{(1+2^n)(1+2^m)}}{\frac{1}{(1+2^n)(1+2^m)}+\left(1-\frac{1}{1+2^n}\right)\left(1-\frac{1}{1+2^m}\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+(1+2^n)(1+2^m)\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)\left(\frac{2^m}{1+2^m}\right)}$$
$$= \frac{1}{1+2^{n+m}}$$
$$= \varphi\left(2^n \times 2^m\right)$$

c'est à dire $\varphi\left(2^n \times 2^m\right) = \varphi\left(2^n\right) * \varphi\left(2^m\right)$

**c)** $K$ est un sous groupe de groupe $(I, *)$
Comme $\varphi$ est un homomorphisme de $(H, \times)$ vers $(I, *)$
Alors $\varphi(H)$ est un sous groupe de $(I, *)$
D'autre par on a : $K = \varphi(H)$

$$\Leftrightarrow \exists 2^n \in H : x = \varphi\left(2^n\right)$$
$$\Leftrightarrow x \in \varphi(H)$$

Par suite $K$ est un sous groupe de groupe $(I, *)$

## Exercice 2 : (2.5pts pts)

**1 - a)**

$$10^{x+1} \equiv 1[19] - \{0$$

$$x \text{ est un réel vérifier } 10^x \equiv 2[19]$$

Donc $10^{x+1} \equiv 20[19]$
C'est à dire

$$10^{x+1} \equiv 1[19]$$

**b)**

$$10^{18} \equiv 1[19]$$

On a 19 est un nombre premier, alors d'après le théorème de Fermat on a :

$$10^{19} \equiv 10[19]$$

Comme $10 \wedge 19 = 1$ alors $10^{18} \equiv 1[19]$

**2 - a)**

$$10^{\mathrm{d}} \equiv 1[19]$$

Comme $d = 18 \wedge (x+1)$, alors il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que : $d = 18u + (x+1)v$ On a :

$$\left.\begin{array}{r} 10^{18} \equiv 1[19] \\ 10^{x+1} \equiv 1[19] \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 10^{18u} \equiv 1[19] \\ 10^{(x+1)v} \equiv 1[19] \end{array}\right\}$$

$$10^{18u+(x+1)v} \equiv 1[19]$$

Par suite $10^d \equiv 1[19]$

**b)**

$$d = 18$$

On a $d$ est un diviseur de 18, alors $d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$

$$\begin{array}{lll} 10^1 \equiv 10[19] & 10^2 \equiv 5[19] & 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^9 \equiv 11[19] & 10^6 \equiv 11[19] & \end{array}$$

Comme $10^d \equiv 1[19]$ alors $d = 18$

**c)** On a $d$ divise $x+1$ donc 18 divise $x+1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x+1 = 18k \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = -1+18k \\
&\Rightarrow x \equiv -1[18] \\
&\Rightarrow x \equiv 17[18]
\end{aligned}$$

## Exercice 3 : (4pts pts)

Partie $I$

**1 -** On pose

$$p(z) = z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i)$$

On a :

$$\begin{aligned}
p(-2i) &= (-2i)^3 - (1+2i)(-2i)^2 + 3(1+i)(-2i) - 10(1+i) \\
&= 8i + 4(1+2i) - 6i(1+i) - 10(1+i) \\
&= 8i + 4 + 8i - 6i + 6 - 10 - 10i \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $-2i$ est une solution de $(E)$

**2 -** Déterminons $\alpha$ et $\beta$ tzls que

$$p(z) = (z+2i)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}
&p(z) = (z+2i)\left(z^2+\alpha z+\beta\right) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 2iz^2 + 2i\alpha z + 2i\beta \\
&= z^3 + (\alpha+2i)z^2 + (\beta+2i\alpha)z + 2i\beta \\
&\times \left(\frac{-i}{2}\right) \begin{cases} 2i\beta = -10(1+i) \\ \alpha + 2i = -(1+2i) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \beta = 5i(1+i) \\ \alpha = -1-4i \end{cases}$$

Par suite :

$$\alpha = -1-4i, \quad \beta = -5+5i$$

**3 -** **a)** Les deux racines carrés du nombre $5-12i$

$x$ et $y$ deux réels

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 = 5-12i &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i \\
&\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5, xy = -6
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$|x+iy|^2 = |5-12i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 13$$

alors le couple $(x,y)$ vérifier le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy \quad = -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} X^2 = 9 \\ Y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Donc

$$(x;y) = (3;-2) \quad \text{ou} \quad (x;y) = (-3;2)$$

D'où Les deux racines carrés du nombre $5-12i$ sont $3-2i$ et $-3+2i$

**b)** solution de l'équation $(E)$ dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow (z+2i)\left(z^2-(1+4i)z-5+5i\right)=0\\ &\Leftrightarrow z+2i=0, z^2-(1+4i)z-5+5i=0\end{aligned}$$

Soit $\Delta$ le discriminant du trinôme $z^2-(1+4i)z-5+(i)$

On a :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(1+4i))^2-4\times 1\times(-5+5i) \quad = 5-12i\\ &= (3-2\mathbf{i})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow z=-2i \text{ ou } z=\frac{1+4i+3-2i}{2} \text{ ou } z=\frac{1+4i-3+2i}{2}\\ &\Leftrightarrow z=-2i \text{ ou } z=2+i \text{ ou } z=-1+3i\\ S&=\{-2i;2+i;-1+3i\}\end{aligned}$$

Partie $II$

**1 -** $ABC$ est un triangle rectangle et isocèle en $C$

On a :

$$\frac{a-c}{b-c}=\frac{-1+3i-2-i}{-2i-2-i}=\frac{-3+2i}{-2-3i}=\frac{3-2i}{2+3i}=\frac{(3-2i)i}{2i-3}=-i$$

Donc

$$\frac{CA}{CB}=\frac{|a-c|}{|b-c|}=\left|\frac{a-c}{b-c}\right|=|-i|=1$$

$$(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right)[2\pi]\equiv\arg(-i)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

**2 -** **a)** Formule de la rotation $R_1$ On a :

$$\begin{aligned}R_1: \quad z'-b=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-b) &\Leftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+2i)-2i\\ &\Leftrightarrow z'=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i\end{aligned}$$

**b)** $Z_2$ affixe du point $M_2$ en fonction de $z$ :

$$\begin{aligned}z_2+1-3i&=e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z+1-3i)\\ \Leftrightarrow z_2&=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+1-3i)-1+3i\\ \Leftrightarrow z_2&=-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-(1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

**c)** $I$ est le milieu de segment $[M_1M_2]$ est constante

Soit $z_1$ l'affixe du point $M_1$

$I$ est le milieu de segment $[M_1M_2]$ $\Rightarrow 2z_I=z_1+z_2$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 2z_I=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i+-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-(1-3i)\left(\right.\\ &\Rightarrow 2z_I=-\sqrt{3}-i-(1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

Donc l'affixe du pint $I$ est constante, et par suite $I$ est constante.

## Exercice 4 : (6pts pts)

**1 -** Calcule des limites

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x + \ln x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x + \ln x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

**2 -** **a)** Tabeau des vartiations $(\forall x \in ]0; +\infty[) : f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x} > 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**b)** $f$ est une bijection

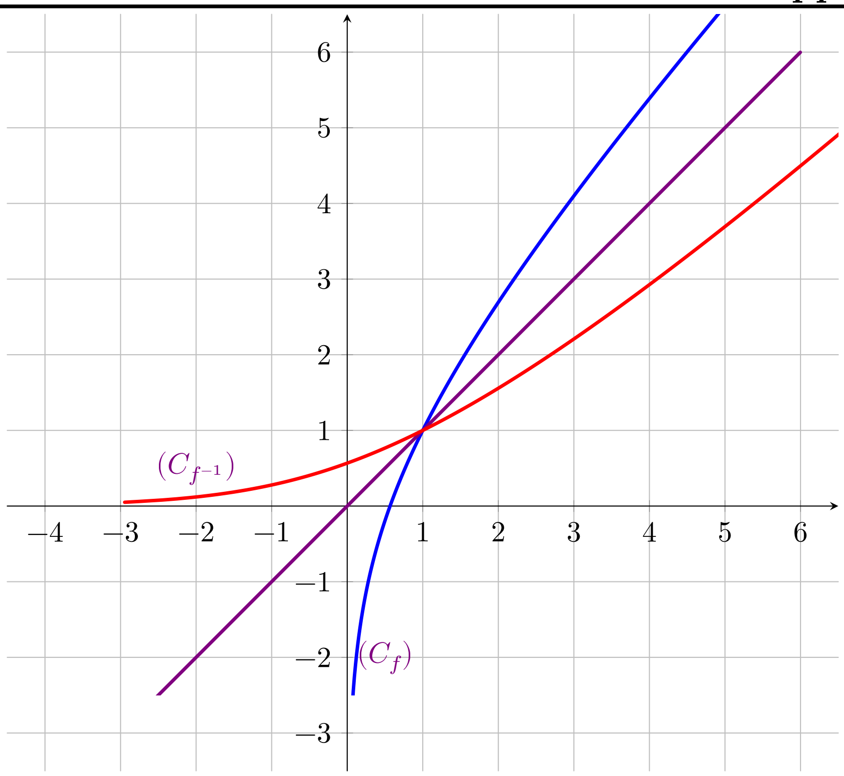
On a la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc $f$ est bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de $f^{-1}$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f^{-1}(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3 -** Construction de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$$
$$f(e) = e + \ln e = e + 1$$




**4 -** **a)** Calcule de l'intéfrales $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$

Posons $f'(t)dt = dx$ , donc $f(t) = x$ c'est à dire $f'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

En utilisant l'intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx &= \int_1^{e} tf'(t)dt = [tf(t)]_1^e - \int_1^e f(t)dt \\
&= e(e+1) - 1 - \left[\frac{t^2}{2} + t\ln t - t\right]_1^e \\
&= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

**b)** Calculons l'aire de la partie comprise entre $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations respectivement $x = 1$ et $x = e+1$ et $y = x$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \int_1^{e+1} \left|x - f^{-1}(x)\right| dx \\
&= \int_1^{e+1} \left(x - f^{-1}(x)\right) dx \\
&= \int_1^{e+1} xdx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx \\
&= \left(\frac{e^2}{2} + e\right) - \left(\frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

**5 -** **a)** $(E_n)$ admet une solution unique $x_n$ :

On a : $(E_n) \iff f(x) = n$

La fonction $f$ est un bejiction de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, donc l'équation $(E_n)$ admet une solution uniqe $x_n$.

$$(E_1) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Donc

$$x_1 = 1$$

**b)** $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$

On a $f(x_n) = n$ donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

selon la définition de cette limite, on a $(\forall B \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N}^*) : n \geq N \longrightarrow f(x_n) \geq B$

On prend $B = f(A+1) > 0 \qquad f(A+1) > f(1) = 1$ car $f$ est croissante

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_n \geq A+1 \\ &\Rightarrow x_n \geq A \end{aligned}$$

Cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

**6 - a)**

$$\begin{aligned} &(\forall n \in \mathbb{N}^*) : f(x_n) \leq f(n) \\ &(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(n) \geq 0 \\ &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : n + \ln(n) \geq n \\ &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : f(n) \geq f(x_n) \\ &(\forall n \in \mathbb{N}^*) : f(n) \geq f(x_n) \end{aligned}$$

Et comme $f$ est croissante alors

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : n \geq x_n$

**b)**

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : n - \ln(n) \leq x_n$$

On a :

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < x_n \leq n &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(x_n) \leq \ln(n) \\ &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_n + \ln(x_n) \leq x_n + \ln(n) \\ &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : f(x_n) \leq x_n + \ln(n) \\ &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : n \leq x_n + \ln(n) \\ &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : n - \ln(n) \leq x_n \end{aligned}$$

**c)** Calcule les deux limites :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}, \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - n}{n} :$$

On a :

$$\begin{aligned} &(\forall n \in \mathbb{N}^*) : n - \ln(n) \leq x_n \leq n \\ &\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{-\ln(n)}{n} \leq \frac{x_n - n}{n} \leq 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(n)}{n} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - n}{n} = 0 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{x_n}{n - \ln(n)} &= \frac{x_n - n}{n - \ln(n)} + \frac{n}{n - \ln(n)} \\ &= \frac{x_n - n}{n} \times \frac{n}{n - \ln(n)} + \frac{n}{n - \ln(n)} \end{aligned}$$

Et comme $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-n}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-\ln(n)}=1$

Alors
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n-\ln(n)}=0\times 1+1=1$$

## Exercice 5 : (5pts pts)

**1 -** La fonction $f_n$ est continue sur $]0;1[$ Car est un polynôme.
Soit $x$ dans $]0;1[$
$$f_n'(x)=1+x+x^2+...+x^{n-1}>0$$
Donc la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $]0;1[$
D'autre part, on a :
$$\begin{aligned}&f_n(0)=-1<0\\&f_n(1)=-1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>0\\&\Rightarrow f_n(0)\times f_n(1)<0\end{aligned}$$
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un nombre unique $\alpha_n$ dans $]0;1[$ tel que $f_n(\alpha_n)=0$

**2 -** $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. On a :
$$\begin{aligned}(\forall x\in]0;1[):f_{n+1}(x)&=-1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1}:\\&=f_n(x)+\frac{x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$
c'est à dire
$$(\forall x\in]0;1[):f_{n+1}(x)>f_n(x)$$
Comme
$$(\forall n\geq 2):\alpha_{n+1}\in]0;1[$$
Alors
$$\begin{aligned}&(\forall n\geq 2):f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right)>f_n\left(\alpha_{n+1}\right)\\&\Rightarrow(\forall n\geq 2):f_n\left(\alpha_n\right)>f_n\left(\alpha_{n+1}\right)\end{aligned}$$
$\Rightarrow(\forall n\geq 2):\alpha_n>\alpha_{n+1}$
$$f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right)=0=f_n\left(\alpha_n\right)$$
$(\alpha_n)$ est converge.
La suite $(\alpha_n)$ est décroissante et minoré par 0 alors elle est convergente.

**3 - a)** La suite $n\to t^n$ est une suite géométrique de raison $t$ $\quad(t\neq 1)$
Alors
$$1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\frac{1-t^n}{1-t}=\frac{1}{1-t}-\frac{t^n}{1-t}$$

**b)** On a :
$$\int_0^{\alpha_n}\left(1+t+t^2+\cdots+t^n\right)\mathbf{dt}=\int_0^{\alpha_n}\frac{\mathrm{dt}}{1-\mathrm{t}}-\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}$$
$$\Rightarrow\left[t+\frac{t^2}{2}+\cdots+\frac{t^n}{n}\right]_0^{\alpha_n}=\left[-\ln(1-\mathrm{t}]_0^{\alpha_n}-\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}\right.$$
$$\Rightarrow\alpha_n+\frac{{\alpha_n}^2}{2}+\cdots+\frac{{\alpha_n}^n}{n}=-\ln\left(1-\alpha_n\right)-\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}$$

$1+\ln(1-\alpha_n)=\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}$

On a :

$$\alpha_n+\frac{{\alpha_n}^2}{2}+\cdots+\frac{{\alpha_n}^n}{n}=-\ln(1-\alpha_n)-\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}$$
$$\Rightarrow f_n(\alpha_n)+1=-\ln(1-\alpha_n)-\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}$$
$$\Rightarrow 1+\ln(1-\alpha_n)=-\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}$$

$f_n(\alpha_n)=0$

$$(\forall n\geq 2):0\leq\int_0^{\alpha} n\frac{t^n dt}{1-t}\leq\frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}$$

Soit $n\geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}0\leq t\leq\alpha_n &\Rightarrow -1\leq t-1\leq\alpha_n-1\\ &\Rightarrow 1-\alpha_n\leq 1-t\leq 1\\ &\Rightarrow 0<1-\alpha_n\leq 1-t\leq 1\\ &\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha_n}\geq\frac{1}{1-t}\\ &\Rightarrow 0<\frac{t^n}{1-t}\leq\frac{t^n}{1-\alpha_n}\\ &\Rightarrow \int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}\leq\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-\alpha_n}\\ &\Rightarrow \int_0^{\alpha}\frac{t^n dt}{1-t}\leq\frac{1}{1-\alpha_n}\int_0^{\alpha_n}t^n dt\\ &\Rightarrow \int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}\leq\frac{1}{1-\alpha_n}\int_0^{\alpha_n}t^n dt\\ &\Rightarrow \int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}\leq\frac{1}{1-\alpha_n}\left[\frac{\mathrm{t}^{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{n}+1}\right]_0^{\alpha_n}\\ &\Rightarrow \int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}\leq\frac{1}{1-\alpha_n}\times\frac{{\alpha_n}^{\mathrm{n}+1}}{\mathrm{n}+1}\\ &\Rightarrow 0<\int_0^{\alpha} n\frac{t^n dt}{1-t}\leq\frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}\end{aligned}$$

**c)** $\alpha_n^{n+1}<1$

$$\ell=1-e^{-1}$$

On a :

$$0<\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}\leq\frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}=0$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\alpha} n\frac{t^n dt}{1-t}=0$$

C'est à dire

$$\lim_{n\to\infty}1+\ln(1-\alpha_n)=0$$

D'autre part, on a :

$(\forall n \geq 2) : \alpha_n \in ]0;1[ \Rightarrow \ell \in [0;1]$

La suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante alors $\ell \leq \alpha_2 < 1$

C'est à dire $\ell \in [0;1[$

La fonction $x \longmapsto 1 + \ln(1-x)$ est continue sur $[0;1[$ i.e elle est continue en $\ell$ et par suite

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} 1 + \ln(1-\alpha_n) = 1 + \ln(1-\ell)\\
&\Rightarrow 0 = 1 + \ln(1-\ell)\\
&\Rightarrow -1 = \ln(1-\ell)\\
&\Rightarrow e^{-1} = 1-\ell\\
&\Rightarrow \ell = 1 - e^{-1}
\end{aligned}$$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2012

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ...................................... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétique** ................................................ **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ...................................... **5.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** ...................................... **4.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : ( 3.5 pts ) les parties I et II sont indépendantes

**I-** Dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$, on considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,75 pt **1 -** Calculer $I - A$ et $A^2$.

0,5 pt **2 -** En déduire que $A$ admet une matrice inverse que l'on déterminera.

**II-** Pour tout $a$ et $b$ de l'intervalle $I = ]1; +\infty[$, on pose $a * b = \sqrt{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2}$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\quad x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$.

0.5 pt **2 -** Montrer que $*$ et une lois de composition interne dans $I$.

**3 -** On rappelle que $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^{*+} & \rightarrow & I \\ & & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers $(I, *)$

0,25 pt **b)** En déduire la structure de $(I, *)$.

0,75 pt **c)** Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{\sqrt{1 + 2^m} \;/\; m \in \mathbb{R}\}$ est un sous groupe de $(I, *)$.

## Exercice 2 : (3.5 pts ) les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

**I-** Soit $a$ est un nombre complexe non nul, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : iz^2 + (2 - i)az - (1 + i)a^2 = 0$$

0,75 pt **1 -** Déterminer $z_1$ et $z_2$ les solutions de l'équation $(E)$.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que : $z_1 z_2 = a^2(i - 1)$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $z_1 z_2$ est un nombre réel $\iff \arg a \equiv \dfrac{-3\pi}{8} \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.

**II-** Soient $c$ un nombre réel non nul et $z$ un nombre complexe non nul

On considère les points $A, B, C, D$ et $M$ d'affixes respectives $1,\ 1 + i,\ c,\ ic$ et $z$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $A, D$ et $M$ sont alignés $\iff (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$ (remarquer que $c = \bar{c}$)

0,5 pt **b)** Montrer que : $(AD) \perp (OM) \iff (ic + 1)z - (ic - 1)\bar{z} = 0$.

**2 -** Soit $h$ l'affixe du point $H$, le projeté orthogonal du point $O$ sur $(AD)$.

0,75 pt **a)** Montrer que : $h - (1 + i) = \dfrac{i}{c}(h - c)$.

0,25 pt **b)** En déduire que $(CH) \perp (BH)$.

## Exercice 3 : ( 3 pts )

**1 -** On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$

0,5 pt **a)** Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis déduire que l'équation $(E)$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

0,75 pt **b)** Sachant que $(-1;-1)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$ en précisant les étapes de la résolution.

**2 -** Soit $n$ un entier naturel non nul premier avec 5.

0,5 pt Montrer que pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, on a $n^{4k} \equiv 1[5]$.

**3 -** Soient $x$ et $y$ deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y\,[4]$.

0,5 pt **a)** Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y[5]$.

0,5 pt **b)** En déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y[10]$.

**4 -** Soient $x$ et $y$ deux entiers naturels tel que $(x, y)$ est solution de l'équation $(E)$.

0,25 pt Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, les deux nombres $n^x$ et $n^y$ ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

## Exercice 4 : (5.5 pts)

$n$ est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$

Soit $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

0,5 pt **2 - a)** Étudier la branche infinie de $(C_n)$ au voisinage de $-\infty$.

0,5 pt **b)** Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $(C_n)$ au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de $(C_n)$ et $(D)$.

0,75 pt **3 -** Étudier les variations de $f_n$ et dresser son tableau de variations.

0,75 pt **4 -** Construire la courbe $(C_3)$. (On prend $f_3(-0,6) \simeq 0$ et $f_3(-1,5) \simeq 0$ et $\ln 3 \simeq 1,1$)

0,25 pt **5 - a)** Montrer que pour $n \geqslant 3$ on a : $\dfrac{e}{n} < \ln n$

1 pt **b)** Montrer que pour $n \geqslant 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions $x_n$ et $y_n$ telles que : $x \leqslant -\ln n$ et $\dfrac{-e}{n} \leqslant y_n \leqslant 0$.

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

**6 -** On considère la fonction numérique $g$ définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \ ; \ x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

0,25 pt **a)** Montrer que la fonction $g$ est continue à droite au point 0.

0,25 pt **b)** Vérifier que pour $n \geqslant 3$ on a : $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right) = \dfrac{\ln n}{x_n}$.

0,25 pt **c)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{x_n}$.

## Exercice 5 : (4.5 pts)

On considère la fonction numérique $F$ définie sur $[0\,;1]$ par :

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \quad \text{si} \quad x > 0$$

**0,25 pt** **1 -** Soit $x$ un élément de $[0;1]$, montrer que pour tout $t$ de $[0;x]$ on a : $\dfrac{1}{1+2x} \leqslant \dfrac{1}{1+2t} \leqslant 1$

**2 -** Soit $x$ un élément de $]0\,;1]$

**0,5 pt** **a)** Montrer que $F(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t$.

**0,75 pt** **b)** Montrer que $\dfrac{1}{1+2x} \leqslant F(x) \leqslant 1$, et en déduire que $F$ est continue à droite en 0.

**0,75 pt** **3 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $x$ de $[0\,;1]$ on a :

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \mathrm{d}t$$

**4 -** Soit $x$ un élément de $]0\,;1]$

**0,5 pt** **a)** Montrer que $F'(x) = -\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \mathrm{d}t$

**0,75 pt** **b)** Montrer que $\dfrac{-4}{3} \leqslant F'(x) \leqslant \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1)

**0,75 pt** **c)** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $F$ sur $[0;x]$ montrer que

$$\frac{-4}{3} \leqslant \frac{F(x)-F(0)}{x} \leqslant \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

**0,25 pt** **d)** Déduire que la fonction $F$ est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé à droite au point 0.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : NORMAL 2012**

## MATHÉMATIQUES

**Exercice 1 : (3.5 pts)**

## Les parties I et II sont indépendantes

**I-** Dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$, on considère les deux matrices :

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

0.75 pt **1 -** Calculons $I-A$ et $A^2$.

- $I-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$
- $A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

D'où, $\boxed{I-A=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \text{ et } A^2=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}}$.

0.5 pt **2 -** Déduisons que $A$ admet une matrice inverse et déterminons sa matrice inverse.

On a d'après la question précédente $A^2=I-A$, donc $I=A^2+A$

Alors $A(A+I)=A^2+A=I$ et $(A+I)A=A^2+A=I$

Donc $A(A+I)=(A+I)A=I$

D'où, $A$ admet une matrice inverse et sa matrice inverse est $A+I=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**II-** Pour tout $a$ et $b$ de l'intervalle $I=]1;+\infty[$, on pose : $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$.

**0.25 pt** **1 -** Vérifions que $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2; x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$.

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}(x^2-1)(y^2-1)+1 &= x^2y^2-x^2-y^2+1+1\\ &= x^2y^2-x^2-y^2+2\end{aligned}$$

D'où, $\boxed{\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2; x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1}$.

**0.5 pt** **2 -** Montrons que $*$ est une loi de composition interne dans $I$.

Soit $(a;b)\in]1;+\infty[^2$. On a :

$$\begin{aligned}a>1 \text{ et } b>1 &\Rightarrow a^2>1 \text{ et } b^2>1\\ &\Rightarrow a^2-1>0 \text{ et } b^2-1>0\\ &\Rightarrow (a^2-1)(b^2-1)>0\\ &\Rightarrow (a^2-1)(b^2-1)+1>1\\ &\Rightarrow a^2b^2-a^2-b^2+2>1\\ &\Rightarrow \sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}>1\\ &\Rightarrow a*b>1\\ &\Rightarrow a*b\in]1;+\infty[\end{aligned}$$

D'où, $\boxed{* \text{ est une loi de composition interne dans } I}$.

**3 -** On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application : $\begin{array}{rccl}\varphi: & \mathbb{R}_+^* & \to & I\\ & x & \mapsto & \sqrt{x+1}\end{array}$.

**0.5 pt** **a)** Montrons que $\varphi$ est isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ vers $(I,*)$.

Soit $(x;y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a : $\sqrt{x+1} > 1$ et $\sqrt{y+1} > 1$, donc :

$$\begin{aligned}\varphi(x) * \varphi(y) &= \sqrt{x+1} * \sqrt{y+1} \\ &= \sqrt{(x+1)(y+1) - (x+1) - (y+1) + 2} \\ &= \sqrt{xy+1} \\ &= \varphi(x \times y)\end{aligned}$$

Alors $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(I, *)$

Soit $y \in I$. On a : $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = y \Leftrightarrow x = y^2 - 1$

Et puisque $y > 1$, alors $y^2 - 1 > 0$, donc $x \in \mathbb{R}_+^*$

Donc $(\forall y \in I)(\exists! x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi(x) = y$, c'est à dire $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $I$ et sa bijection réciproque est : $\begin{array}{rl}\varphi^{-1} : \; I & \to \mathbb{R}_+^* \\ y & \mapsto y^2 - 1\end{array}$

D'où, $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } (\mathbb{R}_+^*, \times) \text{ vers } (I, *)}$.

0.25 pt **b)** Déduisons la structure de $(I, *)$.

On sait que l'isomorphisme conserve la structure d'un groupe

Et on a : $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif et d'élement neutre pour la loi $\times$ est 1, et chaque élément $x$ à un élément symétrique $\dfrac{1}{x}$

Donc $(I, *)$ est un groupe commutatif et d'élement neutre pour la loi $*$ est $\boxed{\varphi(1) = \sqrt{2}}$, et chaque élément $y$ à un élément réciproque $sym(y)$

Soit $y \in I$, donc il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y^2 - 1 = x$

Alors :

$$\begin{aligned}sym(y) &= sym\left(\varphi(x)\right) \\ &= \varphi\left(sym(x)\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{y^2-1}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{y^2-1} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{y^2}{y^2-1}}\end{aligned}$$

D'où, $\boxed{sym(y) = \sqrt{\dfrac{y^2}{y^2-1}}}$.

0.75 pt **c)** Montrons que l'ensemble $\Gamma = \left\{\sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{R}\right\}$ est un sous groupe de $(I, *)$.

On a : $\Gamma$ est une partie non vide de $I$, car si $m \in \mathbb{Z}$ alors $\sqrt{1+2^m} \in I$.

Soit $\sqrt{1+2^m}$ et $\sqrt{1+2^n}$ deux éléments de $\Gamma$.

On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2^m} * sym(\sqrt{1+2^n}) &= \sqrt{1+2^m} * \sqrt{\frac{1+2^n}{2^n}} \\ &= \sqrt{(1+2^m)\left(\frac{1}{2^n}+1\right)-(1+2^m)-\left(\frac{1}{2^n}+1\right)+2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^n}+1+2^{m-n}+2^m-1-2^m-\frac{1}{2^n}-1+2} \\ &= \sqrt{1+2^{m-n}}\end{aligned}$$

Et comme $\sqrt{1+2^{m-n}} \in \Gamma$, alors $\sqrt{1+2^m} * sym(\sqrt{1+2^n}) \in \Gamma$

D'où, $\boxed{\Gamma = \left\{\sqrt{1+2^m}/m \in \mathbb{R}\right\} \text{ est un sous groupe de } (I,*)}$.

## Exercice 2 : (3.5 pts)

# Les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

**I-** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2 = 0$, où $a$ est un nombre complexe non nul.

**0.75 pt** **1 -** Déterminons $z_1$ et $z_2$ les deux racines de $(E)$.

On a : $\Delta = (2-i)^2a^2+4i(1+i)a^2 = (4-4i-1+4i-4)a^2 = -a^2 = (ai)^2$

Donc $(E)$ admet deux solutions complexes $z_1$ et $z_2$ :

$$z_1 = \frac{(i-2)a-ai}{2i} = \frac{-2a}{2i} = ai \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(i-2)a+ai}{2i} = \frac{2a(i-1)}{2i} = a(1+i)$$

D'où, $\boxed{\text{les deux racines de } (E) \text{ sont : } z_1 = ai \text{ et } z_2 = a(1+i)}$.

**0.25 pt** **2 - a)** Vérifions que : $z_1 \times z_2 = a^2(i-1)$.

On a : $z_1 \times z_2 = ai \times a(1+i) = a^2(i+i^2) = a^2(i-1)$

D'où, $\boxed{z_1 \times z_2 = a^2(i-1)}$.

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $z_1 \times z_2$ est un nombre réel $\Leftrightarrow arg(a) \equiv -\frac{3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

On a :

$$\begin{aligned}z_1 \times z_2 &= a^2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\ &= a^2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\end{aligned}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
z_1 \times z_2 \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow arg(z_1 \times z_2) \equiv 0[\pi] \\
&\Leftrightarrow arg\left(a^2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right) \equiv 0[\pi] \\
&\Leftrightarrow arg\left(a^2\right) + arg\left(\sqrt{2}\right) + arg\left(e^{\frac{3\pi}{4}i}\right) \equiv 0[\pi] \\
&\Leftrightarrow 2arg\left(a\right) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi] \\
&\Leftrightarrow 2arg\left(a\right) \equiv -\frac{3\pi}{4}[\pi] \\
&\Leftrightarrow arg\left(a\right) \equiv -\frac{3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}
$$

D'où, $\boxed{z_1 \times z_2 \text{ est un nombre réel} \Leftrightarrow arg(a) \equiv -\frac{3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]}$.

**II-** Soient $c$ un nombre réel non nul et $z$ un nombre complexe non nul.

On considère les points $A$, $B$, $C$, $D$ et $M$ d'affixes respectifs $1$, $1+i$, $c$, $ic$ et $z$.

**0.5 pt** **1 - a)** Montrons que : $A$, $D$ et $M$ sont alignés $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\overline{z} = 2ic$.

On a :

$$
\begin{aligned}
A, D \text{ et } M \text{ sont alignés } &\Leftrightarrow (AD) \parallel (AM) \\
&\Leftrightarrow \frac{z-1}{ic-1} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{ic-1}\right)} = \frac{z-1}{ic-1} \\
&\Leftrightarrow \frac{\overline{z}-1}{-ic-1} = \frac{z-1}{ic-1} \\
&\Leftrightarrow (\overline{z}-1)(ic-1) = -(ic+1)(z-1) \\
&\Leftrightarrow (\overline{z}-1)(ic-1) + (ic+1)(z-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overline{z}(ic-1) - (ic-1) + (ic+1)z - (ic+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overline{z}(ic-1) - ic + 1 + (ic+1)z - ic - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\overline{z} = 2ic
\end{aligned}
$$

D'où, $\boxed{A,\ D \text{ et } M \text{ sont alignés} \Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\overline{z} = 2ic}$.

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\overline{z} = 0$. On a :

$$
\begin{aligned}
(AD) \perp (OM) &\Leftrightarrow \frac{z}{ic-1} \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z}{ic-1}\right)} = -\frac{z}{ic-1} \\
&\Leftrightarrow \frac{\overline{z}}{-ic-1} = \frac{-z}{ic-1} \\
&\Leftrightarrow \overline{z}(ic-1) = z(ic+1) \\
&\Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\overline{z} = 0
\end{aligned}
$$

D'où, $\boxed{(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\overline{z} = 0}$.

**2 -** Soit $h$ l'affixe du point $H$, la projection orthogonale du point $O$ sur $(AD)$.

**0.75 pt**

**a)** Montrons que : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$.

On a : $H$, la projection orthogonale du point $O$ sur $(AD)$, donc, $(AD) \perp (OH)$ et $A$, $D$ et $H$ sont alignés.

Alors $\begin{cases} (ic+1)h - (ic-1)\overline{h} = 0 \\ (ic+1)h + (ic-1)\overline{h} = 2ic \end{cases}$

Donc $2(ic+1)h = 2ic$ (par addition terme à terme)

Et on a :

$$
\begin{aligned}
2(ic+1)h = 2ic &\Leftrightarrow ich + h = ic \\
&\Leftrightarrow h + \frac{h}{ic} = 1 \qquad (ic \neq 0) \\
&\Leftrightarrow h - 1 = -\frac{h}{ic} \\
&\Leftrightarrow h - 1 = \frac{ih}{c} \\
&\Leftrightarrow h - 1 - i = \frac{ih}{c} - i \\
&\Leftrightarrow h - (1+i) = \frac{ih - ic}{c} \\
&\Leftrightarrow h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)
\end{aligned}
$$

D'où, $\boxed{h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)}$.

**0.25 pt**

**b)** Déduisons que : $(CH) \perp (BH)$.

On a : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$, donc $\frac{h-(1+i)}{h-c} = \frac{i}{c}$ $\qquad (h \neq c)$

Donc $\frac{h-(1+i)}{h-c} \in i\mathbb{R}^*$, alors $arg\left(\frac{h-(1+i)}{h-c}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$

C'est à dire, $\left(\overrightarrow{CH}; \overrightarrow{BH}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où, $\boxed{(CH) \perp (BH)}$.

## Exercice 3 : (3 pts)

**1 -** On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$.

0.5 pt **a)** Déterminons le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis déduisons que l'équation $(E)$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

On a : $195 = 143 \times 1 + 52$ et $52 \neq 0$, donc on continue

Et on a : $143 = 52 \times 2 + 39$ et le reste est $39 \neq 0$, donc on continue

Et on a : $52 = 39 \times 1 + 13$ et le reste est $13 \neq 0$, donc on continue

Et on a : $39 = 13 \times 3 + 0$ et le reste est 0, donc on arête

On a : le dernier reste non nul est 13, et par suite $\boxed{143 \wedge 195 = 13}$

Alors il existe deux entiers relatifs $u$ et $k$ tel que $143u + 195k = 13$

Si on considère $v = -k$ alors $143u - 195v = 13$

Et puisque $13|52$, alors $143u - 195v|52$

Donc $\exists t \in \mathbb{Z}/(143u - 195v)t = 52$, c'est à dire $\exists t \in \mathbb{Z}/143ut - 195vt = 52$

Donc $\exists(x, y) \in \mathbb{Z}^2/143x - 195y = 52$ (en posant $x = ut$ et $y = vt$)

D'où, $\boxed{\text{l'équation } 143x - 195y = 52 \text{ admet des solutions dans } \mathbb{Z}^2}$.

0.75 pt **b)** Sachant que $(-1, -1)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$, résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$.

On a : $(-1, -1)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$

Donc $143 \times (-1) - 195 \times (-1) = 52$

Soit $(x, y)$ la solution générale de $(E)$, donc $143x - 195y = 52$

Alors $143(-1 - x) - 195(-1 - y) = 52$, c'est à dire $143(x + 1) = 195(y + 1)$

Donc $11((x + 1) = 15(y + 1)$ (en simplifiant par 13)

Alors $11|15(y + 1)$, et puisque $11 \wedge 15$, alors $11|y + 1$ (d'après Gauss)

Et par suite, $\exists k \in \mathbb{Z}/y + 1 = 11k$, c'est à dire $\exists k \in \mathbb{Z}/y = 11k - 1$

En remplaçant dans l'égalité $143x - 195y = 52$, on trouve $x = 15k - 1$

Réciproquement, $\forall k \in \mathbb{Z}/143(15k - 1) - 195(11k - 1) = 52$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ est $\boxed{S = \{(15k - 1; 11k - 1)/k \in \mathbb{Z}\}}$.

0.5 pt **2 -** Soit $n$ un entier naturel non nul premier avec 5.

Montrons que pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ on a : $n^{4k} \equiv 1[5]$.

On a : 5 est premier et ne divise pas $n$, donc $n^{5-1} \equiv 1[5]$ (d'après le théorème de Fermat)

C'est à dire $n^4 \equiv 1[5]$, alors pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, $(n^4)^k \equiv 1^k[5]$

D'où $\boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N} \text{ on a : } n^{4k} \equiv 1[5]}$.

**3 -** Soient $x$ et $y$ deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y[4]$.

0.5 pt **a)** Montrons que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y[5]$.

On a : $x \equiv y[4] \Leftrightarrow 4|x - y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x - y = 4k$

Alors, d'après la question précédente, on a : $n^{x-y} \equiv 1[5]$

Donc $n^x \times n^{-y} \equiv 1[5]$, et on sait que $n^y \equiv n^y[5]$

Alors $n^x \times n^{-y} \times n^y \equiv \times n^y[5]$, Donc $n^x \equiv n^y[5]$

D'où $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ on a : } n^x \equiv n^y[5]}$.

0.5 pt **b)** Déduisons que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y[10]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

— Si $n$ est pair, alors $n^x$ et $n^y$ sont pairs, donc $n^x - n^y$ est pair

— Si $n$ est impair, alors $n^x$ et $n^y$ sont impairs, donc $n^x - n^y$ est pair

Alors en tout cas, $n^x - n^y$ est pair, donc $\exists k \in \mathbb{Z}/n^x - n^y = 2k$

C'est à dire, $2|n^x - n^y$, et on sait que $n^x \equiv n^y[5]$, donc $5|n^x - n^y$

Alors $2 \times 5|n^x - n^y$ (car 2 et 5 sont premiers entre eux)

Et par suite $10|n^x - n^y$, d'où $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ on a : } n^x \equiv n^y[10]}$.

0.25 pt **4 -** Soient $x$ et $y$ deux entiers naturels tel que $(x, y)$ est solution de l'équation $(E)$.

Montrons que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, les deux nombres $n^x$ et $n^y$ ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $(x, y)$ est solution de l'équation $(E)$, donc $\exists k \in \mathbb{Z}/x = 15k - 1$ et $y = 11k - 1$

Alors $x - y = 4k$, et par suite $x \equiv y[4]$

Donc d'après la question 3)$b$) on a : $n^x \equiv n^y[10]$

D'où, $\boxed{\text{les nombres } n^x \text{ et } n^y \text{ ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal}}$.

## Exercice 4 : (5.5 pts)

$n$ est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$.

Soit $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0.5 pt **1 -** Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \dfrac{e^{-x}}{n} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x}\left(xe^x + \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$

  Car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \dfrac{e^{-x}}{n} = +\infty$

  Car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0^+$

D'où, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty}$.

0.5 pt **2 - a)** Etudions la branche infinie de $(C_n)$ au voisinage de $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{1}{xe^x}\dfrac{1}{n} = -\infty$. Car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$

D'où,

$\boxed{(C_n) \text{ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de } -\infty}$.

**0.5 pt** **b)**

- Montrons que la droite $(D)$ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $(C_n)$ au voisinage de $+\infty$.

  On a : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{n} = 0^+$. Car $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0^+$

  D'où,

  $\boxed{\text{La droite } (D) \text{ d'équation } y = x \text{ est une asymptote oblique à } (C_n) \text{ au voisinage de } +\infty}$.

- Déterminons la position relative de $(C_n)$ et $(D)$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f_n(x) - x = \dfrac{e^{-x}}{n} > 0$

  D'où, $\boxed{(C_n) \text{ est au dessus de } (D) \text{ sur } \mathbb{R}}$.

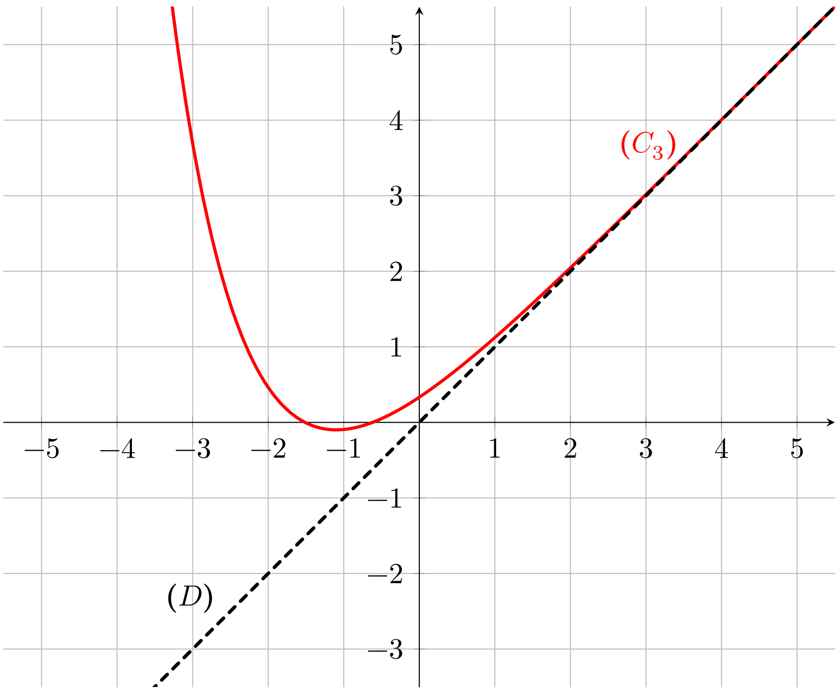
**0.75 pt** **3 -** Etudions les variations de $f_n$ et dressons son tableau de variations.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f_n'(x) = 1 - \dfrac{e^{-x}}{n} = \dfrac{n - e^{-x}}{n}$

Et $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln n$ et $f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\ln n$ et on a : $f_n(-\ln n) = \ln\left(\dfrac{e}{n}\right)$ Alors, on obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\ln\left(\dfrac{e}{n}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**0.75 pt** **4 -** Construisons la courbe $(C_3)$.




**0.25 pt** **5 - a)** Montrons que pour tout $n \geq 3$ on a : $\dfrac{e}{n} < \ln n$.

On considère la fonction $h$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \ln x - \dfrac{e}{x}$

On a : $h$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on a : pour tout $x$ de $]0; +\infty[$, $h'(x) = \dfrac{x + e}{x^2} > 0$

Alors, $h$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Donc $h(3)$ est la valeur minimale de $h$ sur $[3;+\infty[$

Alors, $\forall x \in [3;+\infty[; h(x) \geq h(3) > 0$ (car $h(3) \simeq 0,2$)

Donc $\forall x \in [3;+\infty[; h(x) > 0$, Et par suite, $\forall x \in [3;+\infty[; \ln x > \dfrac{e}{x}$

D'où, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 3 \text{ on a : } \dfrac{e}{n} < \ln n}$.

**1 pt** **b)** Montrons que pour $n \geq 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions $x_n$ et $y_n$ telles que : $x_n \leq -\ln n$ et $-\dfrac{e}{n} \leq y_n \leq 0$.

- On a : $f_n$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; -\ln n]$

  Donc $f_n$ est une bijection de $]-\infty; -\ln n]$ dans $f_n\left(]-\infty; -\ln n]\right) = \left[\ln\left(\dfrac{e}{n}\right); +\infty\right[$

  Et on a : pour tout $n \geq 3$, $0 < \dfrac{e}{n} < 1$, donc $\ln\left(\dfrac{e}{n}\right) < 0$

  Et par suite $0 \in \left]\ln\left(\dfrac{e}{n}\right); +\infty\right[$

  Alors, 0 admet un unique antécédent $x_n$ dans $]-\infty; -\ln n]$ par la bijection $f_n$

  D'où, $\boxed{\exists! x_n \in ]-\infty; -\ln n]; f_n(x_n) = 0}$.

- On a : $f_n$ est continue et strictement croissante sur $[-\ln n; -\infty[$

  Et on a : pour tout $n \geq 3$ on a$\ln n > \dfrac{e}{n}$, donc $-\ln n < -\dfrac{e}{n}$ et $-\dfrac{e}{n} < 0$

  Alors $\left[-\dfrac{e}{n}; 0\right] \subset [-\ln n; -\infty[$

  Et par suite, $f_n$ est une bijection de $\left[-\dfrac{e}{n}; 0\right]$ dans $f_n\left(\left[-\dfrac{e}{n}; 0\right]\right)$

  Et on a : d'autre part, $f_n(0) = \dfrac{1}{n} > 0$ et $f_n\left(\dfrac{-e}{n}\right) = \dfrac{-e}{n} + \dfrac{e^{\frac{e}{n}}}{n}$

  Or, pour tout $n \geq 3$ on a : $\dfrac{e}{n} < 1$, donc $\dfrac{e^{\frac{e}{n}}}{n} < \dfrac{e}{n}$, alors $f_n\left(\dfrac{-e}{n}\right) < 0$

  Et par suite, $f_n(0) \times f_n\left(\dfrac{-e}{n}\right) < 0$

  Alors, d'après le T.V.I. l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans $\left]-\dfrac{e}{n}; 0\right[$

  D'où, $\boxed{\exists! y_n \in \left]-\dfrac{e}{n}; 0\right[; f_n(y_n) = 0}$.

**0.5 pt** **c)** Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

- On a : $x_n \leq -\ln n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\infty$, Donc, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty}$.
- On a : $-\dfrac{e}{n} \leq y_n \leq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{e}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, Donc, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0}$.

**6 -** On considère la fonction numérique $g$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

**0.25 pt** **a)** Montrons la fonction $g$ est continue à droite au point 0.

On a : $\lim\limits_{n\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{n\to 0^+} (-1 - x\ln x) = -1 = g(0)$

D'où, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est continue à droite au point } 0}$.

**0.25 pt** **b)** Vérifions que pour tout $n \geq 3$ on a : $g\left(-\dfrac{1}{x^n}\right) = \dfrac{\ln n}{x_n}$.

Soit $n \geq 3$. On a : d'après la question $5)b)$, $f_n(x_n) = 0$ donc $-x_n = \dfrac{e^{-x_n}}{n}$

Alors $-\dfrac{1}{x_n} = ne^{x_n}$, donc

$$
\begin{aligned}
g\left(-\frac{1}{x^n}\right) &= g(ne^{x_n})\\
&= -1 - ne^{x_n}\ln(ne^{x_n})\\
&= -1 - ne^{x_n}(\ln n + x_n)\\
&= -1 + \frac{1}{x_n}(\ln n + x_n)\\
&= -1 + \frac{\ln n}{x_n} + 1\\
&= \frac{\ln n}{x_n}
\end{aligned}
$$

D'où, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 3 \text{ on a : } g\left(-\frac{1}{x^n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}}$.

0.25 pt **c)** Désuisons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n}$.

On a : $g\left(-\frac{1}{x^n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} g\left(-\frac{1}{x^n}\right) = -1$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{x^n} = 0^+$ et $\lim\limits_{n\to 0^+} g(x) = g(0) = -1$

D'où, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n} = -1}$.

## Exercice 5 : (4.5 pts)

On considère la fonction numérique $F$ définie sur $[0;1]$ par :

$$F(0) = 1 \text{ et } F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \text{ si } x > 0.$$

0.25 pt **1 -** Soit $x$ un élément de $[0;1]$. Montrons que pour tout $t$ de $[0;x]$, on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$.

Soit $x \in [0;1]$ et $t \in [0;x]$. On a :

$$
\begin{aligned}
0 \leq t \leq x &\Leftrightarrow 0 \leq 2t \leq 2x\\
&\Leftrightarrow 1 \leq 2t+1 \leq 2x+1\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1
\end{aligned}
$$

D'où, $\boxed{\text{pour tout } t \text{ de } [0;x], \text{ on a : } \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1}$.

**2 -** Soit $x$ un élément de $]0;1]$.

0.5 pt **a)** Montrons que $F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{x^2}\int_0^x\left(\frac{2t}{1+2t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{x^2}\int_0^x\left(\frac{2t+1-1}{1+2t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{x^2}\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+2t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{x^2}\int_0^x 1\mathrm{d}t - \frac{1}{2x^2}\int_0^x\left(\frac{2}{1+2t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{x^2}[t]_0^x - \frac{1}{2x^2}[\ln(1+2t)]_0^x\\ &= \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}\\ &= F(x)\end{aligned}$$

D'où, $\boxed{F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t}$.

**0.75 pt** **b)**

- Montrons $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$.

  On a : d'après la question 1) : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$, et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t\\ &\Leftrightarrow \int_0^x \frac{t}{1+2x}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t \leq \int_0^x t\mathrm{d}t\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x}\int_0^x t\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t \leq \int_0^x t\mathrm{d}t\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2(1+2x)} \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t \leq \frac{x^2}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x^2}\times\frac{x^2}{2(1+2x)} \leq \frac{2}{x^2}\times\int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t \leq \frac{2}{x^2}\times\frac{x^2}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1\end{aligned}$$

  D'où, $\boxed{\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1}$.

- Déduisons que la fonction $F$ est continue à droite au point 0.

  On a : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ et $\lim_{n\to 0^+} \frac{1}{1+2x} = 1$ et $\lim_{n\to 0^+} 1 = 1$

  Donc $\lim_{n\to 0^+} F(x) = 1 = F(0)$

  D'où, $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est continue à droite au point } 0}$.

**0.75 pt** **3 -** Montrons, que pour tout $x$ de $[0;1]$ on a : $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\mathrm{d}t &= \int_0^x (2t)\times\left(\frac{1}{1+2t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{1+2t}\right]_0^x - \int_0^x (t^2)\times\left(\frac{-2}{(1+2t)^2}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{(intégration par parties)} \\
&= \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \frac{t^2}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'où, $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [0;1] \text{ on a : } \int_0^x \frac{2t}{1+2t}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t}$.

**4 -** Soit $x$ un élément de $]0;1]$.

**0.5 pt** **a)** Montrons que $F'(x) = -\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t$.

On a : la fonction $h : t \mapsto \dfrac{t}{1+2t}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, et en particulier sur $[0;x]$ $(x \in [0;1])$

Donc $h$ admet une fonction primitive notée $H$

Et on a : $F(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t \Leftrightarrow F(x) = \dfrac{2}{x^2}H(x)$, donc :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 2\times\frac{-2x}{(x^2)^2}H(x) + \frac{2}{x^2}h(x) \\
&= \frac{-4}{x^3}\times\int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t + \frac{2}{x^2}\times\frac{x}{1+2x} \\
&= \frac{-2}{x^3}\times\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\mathrm{d}t + \frac{2}{x(1+2x)} \\
&= \frac{-2}{x^3}\left(\frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t\right) + \frac{2}{x(1+2x)} \qquad \text{(d'après la question 3) )} \\
&= \frac{-2}{x(1+2x)} - \frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t + \frac{2}{x(1+2x)} \\
&= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'où, $\boxed{F'(x) = -\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t}$.

**0.75 pt** **b)** Montrons que $-\dfrac{4}{3} \leq F'(x) \leq -\dfrac{4}{3(1+2x)^2}$.

On a : d'après la question 1) : $\dfrac{1}{1+2x} \leq \dfrac{1}{1+2t} \leq 1$, donc :

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1 \Rightarrow \frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t \qquad (t \geq 0)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{t}{1+2x}\right)^2 \leq \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \leq t^2$$
$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t}{1+2x}\right)^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^x t^2 \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow -\frac{4}{x^3}\int_0^x t^2 \mathrm{d}t \leq -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \mathrm{d}t \leq -\frac{4}{x^3} \times \frac{1}{(1+2x)^2}\int_0^x t^2 \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow -\frac{4}{x^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x \leq F'(x) \leq -\frac{4}{x^3(1+2x)^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$
$$\Rightarrow -\frac{4}{x^3} \times \frac{x^3}{3} \leq F'(x) \leq -\frac{4}{x^3(1+2x)^2} \times \frac{x^3}{3}$$
$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$$

D'où, $\boxed{-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}}$.

**0.75 pt** **c)** Montrons que $-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$.

On a : $F(x) = \frac{2}{x^2}H(x)$, tel que $H(x) = \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)\mathrm{d}t$

On a : $F$ est continue sur $[0;x]$ (produit de deux fonctions continues) et dérivable sur $]0;x[$ (produit de deux fonctions dérivables)

Alors d'après T.A.F. on a : $\exists c \in ]0;x[; F'(c) = \frac{F(x)-F(0)}{x}$ Et on a : d'après la question 4)$b$), pour tout $x$ de $]0;1]$, $-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$

Donc $-\frac{4}{3} \leq F'(c) \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$ (car $0 < c < x < 1$)

C'est à dire, $-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$

D'où, $\boxed{-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}}$.

**0.25 pt** **d)** Déduisons que $F$ est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé.

On a : $-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$ et $\lim_{n\to 0^+} -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$ et $\lim_{n\to 0^+} -\frac{4}{3(1+2x)^2} = -\frac{4}{3}$

Donc $\lim_{n\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x} = -\frac{4}{3}$

Et par suite, $\boxed{F \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et son nombre dérivé est } F'_d(0) = -\frac{4}{3}}$.

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage Juillet 2012**

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .................................... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .................................... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .................................... **7.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .................................... **2.5 points**

## Exercice 1 : (3.5 pts) (Les parties I et II sont indépendantes.)

**partie I** :

Pour tous $a$ et $b$ de l'intervalle $I = [1; +\infty[$, on pose : $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$

0.5 pt **1 -** Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne sur $I$.

0.5 pt **2 -** Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative.

0.25 pt **3 -** Montrer que $\perp$ admet un élément neutre à déterminer.

**partie II** :

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. Soit $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que $E$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

**2 -** On considère l'application $\varphi$ définie par : $\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & M(x) \end{array}$

0.5 pt **a)** Montrer que l'application $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(E, \times)$

0.5 pt **b)** En déduire la structure de $(E, \times)$.

0.75 pt **c)** Montrer que l'ensemble $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous groupe de $(E, \times)$.

## Exercice 2 : (3.5 pts) (Les parties I et II sont indépendantes.)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

**partie I** :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $(E) : \ z^2 - 4(1 + \frac{2}{3}i)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que le nombre $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation $(E)$.

0.25 pt **b)** Montrer que la deuxième solution de l'équation $(E)$ est $z_2 = 3z_1$.

**2 -** soit $\theta$ l'argument du nombre complexe $z_1$.

0.5 pt Écrire en fonction de $\theta$ la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{5}{3} + 4i$.

**partie II** :

On considère trois points $A$, $B$ et $\Omega$ distincts deux à deux, d'affixes respectifs $a$, $b$ et $\omega$.

Soit $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $P = r(A)$ et $B = r(Q)$ et soient $p$ et $q$ les affixes respectifs de $P$ et $Q$.

0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$ et $q = \omega + e^{\frac{-i\pi}{3}}(b - \omega)$.

0.25 pt **b)** Montrer que : $\dfrac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{\frac{-i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

0.5 pt **c)** Montrer que : $\dfrac{p - a}{q - b} = \left(\dfrac{\omega - a}{\omega - b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

**2 -** On suppose que : $\left(\dfrac{\omega - a}{\omega - b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

0.25 pt **a)** Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.

0.75 pt **b)** Montrer que $\arg\left(\dfrac{b - a}{p - a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$ et déduire que le quadrilatère $APQB$ est un rectangle.

## Exercice 3 : (3 pts)

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que 503 est un nombre premier.

0.75 pt **b)** Montrer que : $7^{502} \equiv 1[503]$ puis déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$

**2 -** On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) : 49x - 6y = 1$.
Sachant que $(1, 8)$ est une solution particulière de $(E)$, résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$ en
0.5 pt précisant les étapes de la résolution.

**3 -** On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$

0.25 pt **a)** Montrer que le couple $(7^{2006}, N)$ est solution de l'équation $(E)$.

1 pt **b)** Montrer que : $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$.

0.25 pt **c)** Déduire que $N$ est divisible par 2012.

## Exercice 4 : (7.5 pts)

**partie I** :

Soit $g$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1 + x) - \dfrac{x}{1 + x}$

0.5 pt **1 -** Étudier les variations de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

0.5 pt **2 -** Déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

**partie II** :

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$

1 pt **1 -** Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

0.5 pt **2 -** Montrer que pour tout nombre réel $x$, On a : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$.

0.5 pt **3 -** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

1 pt **4 -** Construire $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ et $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de la fonction $(-f)$ dans le même repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(On admet que $-0.7$ est une valeur approchée de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$).

0.75 pt **5 -** Montrer que pour tout $x$ de $]-1; 0[$, on a : $0 < f'(x) < g(e)$.

0.75 pt **6 -** Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une seule solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $-1 < \alpha < 0$.

**7 -** On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

0.5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ -1 \leqslant u_n \leq 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant g(e)|u_n - \alpha|$.

0.5 pt **c)** Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ |u_n - \alpha| \leqslant (g(e))^n$.

0.5 pt **d)** Sachant que : $g(e) < 0.6$ , calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

## Exercice 5 : (2.5 pts)

On considère la fonction numérique $F$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

**0.25 pt** **1 -** Calculer $F(1)$

**0.5 pt** **2 - a)** Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

**0.5 pt** **b)** Déduire que pour tout $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ $F(x)=0$.

**0.5 pt** **3 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ :

$$F(x)=\left(\arctan x+\arctan\frac{1}{x}\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$$

**0.25 pt** **4 -** Montrer que $(\forall x>0);\ \arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan x$

**0.5 pt** **5 -** Déduire que $(\forall x>0);\ \ln x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : RATTRAPAGE 2012**

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3.5 pts)

**Partie I** :

Pour tous $a$ et $b$ de l'intervalle $I=[1;+\infty[$, on pose : $a \perp b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)^2$

0.5 pt **1 -** Montrons que $\perp$ est une loi de composition interne sur $I$.

$\forall a,b \in [1;+\infty[$, On a

$$\begin{aligned} a \perp b-1 &= (\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)^2-1=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1-1)(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1+1 \\ &= \left((\sqrt{a}-1)+(\sqrt{b}-1)\right)(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Car $\sqrt{a} \geqslant 1$ et $\sqrt{b} \geqslant 1$, Donc $a \perp b \in [1;+\infty[$

Donc : $\boxed{\text{" } \perp \text{ " est une loi de composition interne sur } I}$

0.5 pt **2 -** Montrons que la loi $\perp$ est commutative et associative :

**•Commutativité :** $\forall a,b \in I$, On a $a \perp b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)^2=(\sqrt{b}+\sqrt{a}-1)^2=b \perp a$,

$\boxed{\text{Alors la loi } \perp \text{ est commutative}}$

**•Associativité :** $\forall a,b,c \in I$ :

On a $(a \perp b) \perp c=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)^2 \perp c=\left((\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)+\sqrt{c}-1\right)^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-2)^2$

$a \perp (b \perp c)=\sqrt{a} \perp (\sqrt{b}+\sqrt{c}-1)^2=\left(\sqrt{a}+(\sqrt{b}+\sqrt{c}-1)-1\right)^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-2)^2$

Donc $(a \perp b) \perp c=a \perp (b \perp c)$, $\boxed{\text{Alors la loi } \perp \text{ est associative}}$

0.25 pt **3 -** Montrons que $\perp$ admet un élément neutre à déterminer.

On remarque que pour $e=1$, On a $\forall a,b \in [1;+\infty[$, On a $a \perp e=e \perp a=a$

Donc $e=1$ est un élément neutre de *perp* dans $I$, Or l'élément neutre est unique

$\boxed{\text{Donc } e=1 \text{ est élément neutre de } \perp}$

**Partie II** :

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire. Soit $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^*\right\}$

**0.5 pt** **1 -** Montrons que $E$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

On a $E \neq \emptyset$, car $I = M(1) \in E$ et on a $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\forall M(a), M(b) \in E, \qquad M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \in E.$$

Car $a \neq 0$ et $b \neq 0 \Longrightarrow ab \neq 0$

**2 -** On considère l'application $\varphi$ définie par : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & M(x) \end{array}$

**0.5 pt** **a)** Montrons que l'application $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(E, \times)$

**•La bijection :** Montrons que $(\forall M(a) \in E)(\exists! x \in \mathbb{R}^*) \quad \varphi(x) = M(a)$ :

$\forall \mathcal{M} \in E, \exists! a \in \mathbb{R}^*$, tel que $\mathcal{M} = M(a)$ et donc $\varphi(a) = M(a) = \mathcal{M}$, Alors l'application $\varphi$ est bijective

**•Le homomorphisme :** Montrons que $(\forall a, b \in \mathbb{R}^*) \quad \varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$ :

$\varphi(a \times b) = \varphi(ab) = M(ab)$ et $\varphi(a) \times \varphi(b) = M(a) \times M(b) = M(ab)$

Alors $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$

Finalement, $\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un isomorphisme de } (\mathbb{R}^*, \times) \text{ dans } (E, \times)}$

**0.5 pt** **b)** Déduisons la structure de $(E, \times)$

On a $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif et l'application $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(E, \times)$, $\boxed{\text{donc } (E, \times) \text{ est un groupe commutatif}}$

**0.75 pt** **c)** Montrons que l'ensemble $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous groupe de $(E, \times)$

Montrons que $H \neq \emptyset$ et $M \times M^{-1} \in H \quad \forall M \in H$

Cherchons d'abord l'élément symétrique dans le groupe $E$ :

Soit $M(a) \in E$, on a $(M(a))^{-1} = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1}) = \varphi(\frac{1}{a}) = M(\frac{1}{a})$

Donc $(M(a))^{-1} = M(\frac{1}{a})$

• $H \neq \emptyset$, car $H = \{M(2^n)/n \in \mathbb{Z}\}$ et $H \Subset E$ $(2^n \neq 0)$

• $\forall M(2^n), M(2^m) \in E$

$M(2^n) \times M^{-1}(2^m) = M(2^n) \times M(\frac{1}{2^m}) = M(\frac{2^n}{2^m}) = M(2^{n-m}) \in H$

Finalement, $\boxed{H \text{ est un sous-groupe de } (E, \times)}$

## Exercice 2 : (3.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

**Partie I** :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $(E)$ : $z^2 - 4(1 + \frac{2}{3}i)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

**0.5 pt** **1 - a)** Vérifions que le nombre $z_1 = 1 + \dfrac{2}{3}i$ est une solution de l'équation $(E)$.

On a $z_1^2 - 4(1+\frac{2}{3}i)z_1 + \frac{5}{3} + 4i = (1+\frac{2}{3}i)^2 - 4(1+\frac{2}{3}i)(1+\frac{2}{3}i) + \frac{5}{3} + 4i$

$= 1 + \frac{4}{3}i - \frac{4}{9} - 4 - \frac{16}{3}i + \frac{16}{9} + \frac{5}{3} + 4i = 0$

Donc $\boxed{\text{le nombre } z_1 = 1 + \frac{2}{3}i \text{ est une solution de l'équation } (E)}$

0.25 pt **b)** Montrons que la deuxième solution de l'équation $(E)$ est $z_2 = 3z_1$

On a $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = 4(1+\frac{2}{3}i) \Leftrightarrow z_2 = 4(1+\frac{2}{3}i) - (1+\frac{2}{3}i) = 3(1+\frac{2}{3}i) = 3z_1$

0.5 pt **2 -** Soit $\theta$ l'argument du nombre complexe $z_1$.

Écrivons en fonction de $\theta$ la forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{5}{3} + 4i$.

On a $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = 3re^{i\theta}$ avec $r = \sqrt{1^2 + (\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{13}{9}}$

Or $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3} + 4i \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{5}{3} + 4i = 3r^2 e^{i2\theta} = 3 \times (\frac{13}{9})e^{i2\theta}$

Finalement $\boxed{\dfrac{5}{3} + 4i = \dfrac{13}{3}(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))}$

**Partie II** :

On considère trois points $A$, $B$ et $\Omega$ distincts deux à deux, d'affixes respectifs $a$, $b$ et $\omega$.

Soit $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

On pose $P = r(A)$ et $B = r(Q)$ et soient $p$ et $q$ les affixes respectifs de $P$ et $Q$.

0.5 pt **1 - a)** Montrons que : $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$ et $q = \omega + e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)$.

$$P = r(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega P \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega P}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |p-\omega| = |a-\omega| \\ \arg\left(\frac{p-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|p-\omega|}{|a-\omega|} = 1 \\ \arg\left(\frac{p-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{p-\omega}{a-\omega} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \boxed{p = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a-\omega)}$

De la même manière, Avec $B = r(Q)$ on trouve $b = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(q-\omega)$

Donc $b - \omega = e^{\frac{i\pi}{3}}(q-\omega) \Leftrightarrow e^{-\frac{i\pi}{3}}(b-\omega) = (q-\omega) \Leftrightarrow \boxed{q = \omega + e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)}$

0.25 pt **b)** Montrons que : $\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

On a : $\quad 1 - e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{e^{\frac{4i\pi}{3}}} - \dfrac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{4i\pi}{3}}}\right) = e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(e^{i(-\frac{4\pi}{3}+2\pi)} - e^{-i\pi}\right)$

$= e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(e^{i(-\frac{\pi}{3}+\pi)} + 1\right) = e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\pi} + 1\right) = e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1\right)$

Donc $\boxed{\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}}$

0.5 pt **c)** Montrons que : $\dfrac{p-a}{q-b} = \left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

$$\frac{p-a}{q-b} = \frac{(\omega-a) + e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)}{(\omega-b) + e^{-\frac{i\pi}{3}}(b-\omega)} = \frac{\omega-a}{\omega-b} \times \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

**2 -** On suppose que : $\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

0.25 pt **a)** Montrons que $APQB$ est un parallélogramme.

On a $\dfrac{p-a}{q-b} = \left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$ et $\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Donc $\dfrac{p-a}{q-b} = e^{i2\pi} = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ}$ $\boxed{\text{Alors } APQB \text{ est un parallélogramme.}}$

0.75 pt **b)** Montrons que $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et déduire que le quadrilatère $APQB$ est un rectangle.

On a $\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Alors $\quad (\omega-b) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}(\omega-a)$

$\Longrightarrow\ (b-a) = (\omega-a)-(\omega-b) = (\omega-a) - e^{-\frac{2i\pi}{3}}(\omega-a) = (\omega-a)\left(1-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)$

D'aprés la question $1-a)$, on a $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$

Alors $p-a = (\omega-a) + e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega) = (\omega-a)\left(1+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)$

$$\text{Donc } \frac{b-a}{p-a} = \frac{(\omega-a)\left(1-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}{(\omega-a)\left(1+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)} = \frac{1-e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{1+e^{\frac{i\pi}{3}}} = \frac{1-\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})}{1-\cos(\frac{\pi}{3})-i\sin(\frac{\pi}{3})}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{1}{4}(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$$

Donc $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-a}\right) \equiv \arg\left(i\sqrt{3}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Alors $(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, C-à-d que l'angle $\widehat{PAB}$ est rectangle

Finalement $\boxed{\text{le quadrilatère } APQB \text{ est un rectangle.}}$

## Exercice 3 : (3 pts)

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que 503 est un nombre premier : On a $503 < 625 \Longrightarrow \sqrt{503} < 25$

Les nombres premier positif inferieur à 25 sont $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$

Puisque aucun d'eutre eux ne divise 503 donc $\boxed{\text{503 est un nombre premier.}}$

0.75 pt **b)** Montrons que : $7^{502} \equiv 1[503]$ puis déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$

On a 503 est un nombre premier positif et $503 \wedge 7 = 1$

Donc, d'aprés le petit théorème de Fermat $7^{502} = 1[503]$

D'où $(7^{502})^4 = 1[503] \Longrightarrow \boxed{7^{2008} = 1[503]}$

**2 -** On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): 49x - 6y = 1$.

Sachant que $(1,8)$ est une solution particulière de $(E)$, résoudrons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)$ en

0.5 pt précisant les étapes de la résolution.

On a $\quad (E): 49x-6y = 1 \quad (1)$ et $49(1)-6(8) = 1 \quad (2)$

$(1)-(2) \iff 49(x-1)-6(y-8) = 0 \iff 49(x-1) = 6(y-8) \quad (E')$

$49/6(y-8)$ Or $49 \wedge 6 = 1$ donc d'aprés le théorème de Gauss $49/(y-8) \iff (\exists k \in \mathbb{Z})/y-8 =$

$49k \iff y = 49k + 8$

D'autre part,$(E')$ $49(x-1) = 6(y-8) \iff 49(x-1) = 6 \times 49k \Longrightarrow x = 6k+1$

Conclution : $\boxed{S = \{(6k+1; 49k+8)/k \in \mathbb{Z}\}}$

**3 -** On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$

**0.25 pt** **a)** Montrons que le couple $(7^{2006}, N)$ est solution de l'équation $(E)$.

On a $49(7^{2006}) - 6(N) = 7^2 \times 7^{2006} - (7-1)(1+7+\ldots+7^{2007}) = 7^{2008} - (7^{2008}-1) = 1$

D'où $\boxed{(7^{2006}, N) \text{ est solution de l'équation } (E).}$

**1 pt** **b)** Montrons que : $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$.

$$\begin{aligned} \text{On a } N &= 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{2007} \\ &\equiv 1 - 1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2007}[4] \\ &\equiv 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1[4] \equiv 0[4]. \end{aligned}$$

D'aprés la question 1), on a $7^{2008} = 1[503] \Longrightarrow 7^2 \times 7^{2006} = 1[503] \Longrightarrow 49 \times 7^{2006} - 1 = 0[503]$

$$6N \equiv 0[503] \Longrightarrow \boxed{N \equiv 0[503]} \text{ car } 503 \wedge 6 = 1$$

**0.25 pt** **c)** Déduisons que $N$ est divisible par 2012.

On a : $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$.

Et puisque $503 \wedge 4 = 1$ donc $N \equiv 0[4 \times 503]$, c-à-d $N \equiv 0[2012]$

Finalement $\boxed{N \text{ est divisible par } 2012}$

## Exercice 4 : (7.5 pts)

**<u>Partie I</u>** :

Soit $g$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

**0.5 pt** **1 -** Étudions les variations de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$

On a $g$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $(\forall x \in [0; +\infty[$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \geqslant 0$$

Donc $\boxed{g \text{ est croissante sur } [0; +\infty[}$

**0.5 pt** **2 -** Déduisons le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

($\forall x \in [0;+\infty[$, $g$ est croissante donc $x \geqslant 0 \implies g(x) \geqslant g(0) \implies g(x) \geqslant 0$

D'où $\boxed{g \text{ est positive sur } [0;+\infty[}$

**Partie II** :

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$

**1 pt** **1 -** Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x \ln(1+e^{-x}) =^{e^x=X} \lim\limits_{X\to+\infty} X\ln\left(1+\dfrac{1}{X}\right) =^{X=\frac{1}{x}} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x \ln(1+e^{-x}) =^{e^x=X} \lim\limits_{X\to0^+} X\ln\left(1+\dfrac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X\to0^+} X\ln(X+1) - X\ln(X) = 0$

**0.5 pt** **2 -** Montrons que pour tout nombre réel $x$, On a : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$.

On $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, $f'(x) = (e^x\ln(1+e^{-x}))' = e^x\ln(1+e^{-x}) + e^x \times \dfrac{(-e^{-x})}{1+e^{-x}}$

$= e^x\left(\ln(1+e^{-x}) - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = \boxed{e^x g(e^{-x})}$

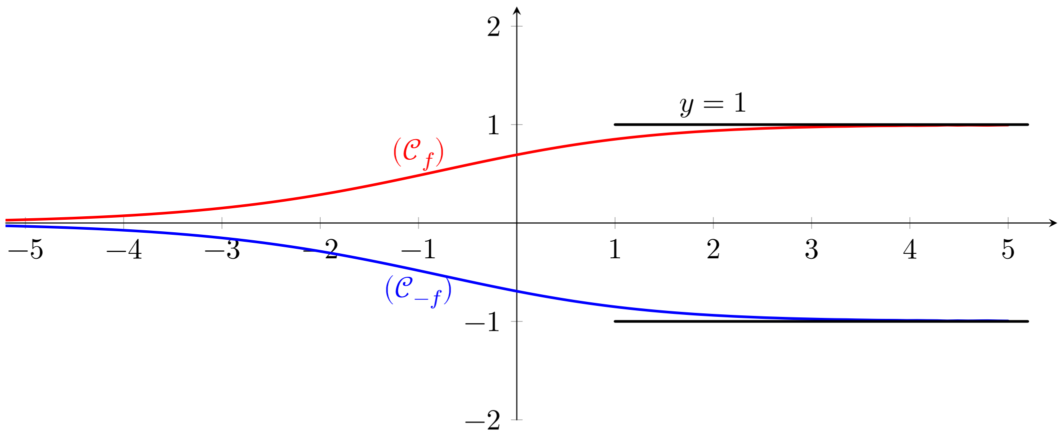
**0.5 pt** **3 -** Dressons le tableau de variations de la fonction $f$.

On a $f'(x) = e^x g(e^{-x})$ et d'aprés la partie I, on a $g$ est positive sur $[0;+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f$ | $0 \nearrow 1$ |

**1 pt** **4 -** Construction de $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ et $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de la fonction $(-f)$ dans le même repère $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

(On admet que $-0.7$ est une valeur approchée de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$).




**0.75 pt** **5 -** Montrons que pour tout $x$ de $]-1;0[$, on a : $0 < f'(x) < g(e)$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = e^x g(e^{-x}) > 0$

Et $(\forall x \in ]-1;0[)\ \ -1 < x < 0 \longleftarrow \quad e^x < 1$ et $0 < e^{-x} < e$

Or $g$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, Alors $g(e^{-x}) < g(e)$

D'où $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } ]-1;0[, \text{ on a : } 0 < f'(x) < g(e)}$

**0.75 pt** **6 -** Montrons que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une seule solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $-1 < \alpha < 0$.

On pose $(\forall x \in \mathbb{R})\ h(x) = f(x) + x$

$(\forall x \in [-1;0])$, On a $h$ est continue sur $[-1;0]$

Et $h(-1) = f(-1) - 1 < 0$, (car $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) < 1$) et $h(0) = f(0) = \ln(2) > 0$

Et puisque la fonction $h$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ $(h'(x) = f'(x) + 1 > 0)$

D'aprés le théorème des valeurs intermédiares,$\exists!\alpha \in ]-1;0[\,/h(\alpha) = 0$

D'où $\boxed{\text{l'équation } f(x) + x = 0 \text{ admet une seule solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R} \text{ vérifiant : } -1 < \alpha < 0.}$

**7 -** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

On définit la fonction $f_1$ sur $[-1;0]$ par $f_1(x) = -f(x)$

**0.5 pt** **a)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ -1 \leqslant u_n \leqslant 0$.

✓ Pour $n = 0$ on a $-1 \leqslant u_0 = 0 \leqslant 0$ ,Donc la propriété vrai pour $n = 0$.

✓ Supposons que $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ pour $n$ fixée

✓ On a $f_1$ est continue sur $[-1;0]$ et décroissante sur $[-1;0]$

Et $f_1([-1;0]) = [f_1(0); f_1(-1)] = [-\ln(e); -\frac{\ln(1+e)}{e}] \subset [-1;0]$

Donc $\ -1 \leqslant u_n \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leqslant f_1(0) \leqslant f_1(u_n) \leqslant f_1(-1) \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$

Donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant u_n \leqslant 0}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant g(e)|u_n - \alpha|$.

On a $(\forall n \in \mathbb{N})$ ,$u_n$ et $\alpha$ appartient à $[-1;0]$

La fonction $f_1$ est dérivable sur $[-1;0]$

D'aprés le théorème des accroissements finis, $(\exists c \in ]-1;0[)/\ f_1(u_n) - f_1(\alpha) = f_1'(c)(u_n - \alpha)$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| = |f_1'(c)||u_n - \alpha| \quad \Longrightarrow \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant g(e)|u_n - \alpha|$

Et d'aprés la question 5) on a $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 < f'(x) < g(e)$

Donc $|f_1'(c)| = f'(c) < g(e) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant g(e)|u_n - \alpha|}$

**0.5 pt** **c)** Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ |u_n - \alpha| \leqslant (g(e))^n$.

✓ Pour $n=0$ on a $|-\alpha|\leqslant 1$ ,Donc la propriété vrai pour $n=0$ $(\alpha\in]-1;0[)$ .

✓ Supposons que $|u_n-\alpha|\leqslant (g(e))^n$ pour $n$ fixée

✓ On a $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant g(e)|u_n-\alpha|\leqslant g(e).(g(e))^n=(g(e))^{n+1}$

Donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N});\ |u_n-\alpha|\leqslant (g(e))^n}$

**0.5 pt** **d)** Sachant que : $g(e)<0.6$ , calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a $(\forall n\in\mathbb{N});\ |u_n-\alpha|\leqslant (g(e))^n$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} g(e)^n=0$ car $-1<g(e)<1$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha}$

## Exercice 5 : (2.5 pts)

On considère la fonction numérique $F$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

**0.25 pt** **1 -** Calculons $F(1)$

On a la fonction $t\longmapsto \ln(t)$ est continue sur $]0;+\infty[$ et la fonction $t\longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$

On pose $f(x)=\dfrac{\ln t}{1+t^2}$, donc $f$ est continue sur $]0;+\infty[$

Alors $\boxed{F(1)=\displaystyle\int_1^1 f(t)\mathrm{d}t=0}$

**0.5 pt** **2 - a)** Montrons que la fonction $F$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculons $F'(x)$.

Posons $U(x)=x$ et $V(x)=\frac{1}{x}$

On a $U$ dérivable de $I=]0;+\infty[$ dans $J=]0;+\infty[$

$V$ dérivable de $I=]0;+\infty[$ dans $J=]0;+\infty[$

$f$ continue sur $J=]0;+\infty[$

Donc la fonction $F$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Soit $\psi$ une primitive de $f$, donc $F(x)=[\psi(t)]_{\frac{1}{x}}^{x} \quad\Longrightarrow\quad F(x)=\psi(x)-\psi(\frac{1}{x})$

$F'(x)=f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})=\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}.\dfrac{\ln(\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{x^2}}$

$\Longrightarrow\quad F'(x)=\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}-\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}=0$

D'où $\boxed{F'(x)=0}$

**0.5 pt** **b)** Déduisons que pour tout $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ $F(x)=0$.

On a $\forall x \in ]0;+\infty[\,;\quad F'(x) = 0$, donc $\quad F(x) = Cste$

Or $\quad F(1) = 0$, donc $\boxed{F(x) = 0 \quad (\forall x \in ]0;+\infty[)}$

**0.5 pt** **3 -** En utilisant une intégration par parties, montrons que pour tout $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ :

$$F(x) = \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$$

On pose $\quad u(t) = \ln t \quad et \quad v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

Donc $\quad u'(t) = \dfrac{1}{t} \quad et \quad v(x) = \arctan t$

D'après le formule d'intégration par parties, On a

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = [\arctan t \times \ln t]_{\frac{1}{x}}^{x} - \int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$$

Finalement $\boxed{F(x) = \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t}$

**0.25 pt** **4 -** Montrons que $(\forall x > 0);\ \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$

On pose :$G(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}\quad ; (\forall x > 0)$

On a $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$G'(x) = \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

Donc $G$ est une fonction constante $(G(x) = Cste)$

Alors $G(x) = G(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

Finalement $\boxed{(\forall x > 0);\ \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x}$

**0.5 pt** **5 -** Déduisons que $(\forall x > 0);\ \ln x = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$

$$\text{On a } \begin{cases} (\forall x > 0); & F(x) = 0 \\ (\forall x > 0); & \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x \\ (\forall x > 0); & F(x) = \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t \end{cases}$$

Donc $\quad \ln x \times \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t = 0$

D'où

$$\boxed{(\forall x > 0);\ \ln x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t}$$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2013

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

***Ce sujet comporte 3 exercices et un problème :***

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** ...................................... **3.5 points**
— Exercice 3 : **L'arithmétique** ............................................. **3 points**
— Problème : **L'analyse** ...................................................... **10 points**

## Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif et intègre .

**1 -** On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :$\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ ; $x*y=x+y-2$

**0,5 pt** **a)** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative

**0,25 pt** **b)** Montrer que $(\mathbb{Z},*)$ admet un élément neutre à déterminer.

**0,5 pt** **c)** Montrer que $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif.

**2 -** On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $\top$ définie par :
$(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2)$ ; $x\top y=xy-2x-2y+6$
On considère l'application $f$ de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ définie par : $(\forall x\in\mathbb{Z})$ ; $f(x)=x+2$

**0,5 pt** **a)** Montrer que $f$ est un morphisme bijectif de $(\mathbb{Z},\times)$ vers $(\mathbb{Z},\top)$

**0,25 pt** **b)** Montrer que : $\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ ; $(x*y)\top z=(x\top z)*(y\top z)$

**0,75 pt** **3 -** En déduire de ce qui précède que $(\mathbb{Z},*,\top)$ est un anneau commutatif et unitaire.

**0,25 pt** **4 - a)** Montrer que : $x\top y=2$ si et seulement si $x=2$ ou $y=2$

**0,25 pt** **b)** En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z},*,\top)$ est intègre .

**0,25 pt** **c)** $(\mathbb{Z},*,\top)$ est-il un corps ? (Justifier la réponse)

## Exercice 2 : (3.5 pts)

**partie I :** Soit $a$ un nombre complexe non nul .

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue $z$ : $(E) : 2z^2-(3+i\sqrt{3})az+(1+i\sqrt{3})a^2=0$

**0,25 pt** **1 -** Vérifier que le discriminant de léquation $(E)$ est : $(-1+i\sqrt{3})^2a^2$

**0,5 pt** **2 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$

**partie II :** Le plan complexe est reporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points $A$ , $B$ et $M$ daffixes respectives $a$ , $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z$

Soit $r$ la rotation de centre $M$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

On pose $A_1=r^{-1}(A)$ et $B_1=r^{-1}(B)$ (où $r^{-1}$ est la rotation réciproque de la rotation $r$ )

soient $a_1$ et $b_1$ les affixes respectifs de $A_1$ et $B_1$

**0,5 pt** **1 -** Vérifie que $OAB$ est un triangle équilatéral.

**0,5 pt** **2 - a)** Montrer que : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z$ et $b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

**0,5 pt** **b)** Montrer que $OA_1MB_1$ est un parallélogramme.

**3 -** Supposons que : $M\neq A$ et $M\neq B$

**0,5 pt** **a)** Montrer que : $\frac{z-b_1}{z-a_1}=-\frac{z-b}{z-a}\times\frac{a}{b}$

**0,75 pt** **b)** Montrer que les points $M$ , $A_1$ et $B_1$ sont alignés si et seulement si les points M , O , A et B sont cocycliques.

## Exercice 3 : (3 pts)

L'objectif de l'exercice est de rechercher les entiers naturels n strictement supérieure à 1 qui vérifient la propriété suivante : $(R) : 3^n - 2^n \equiv 0[n]$

**1 -** On suppose que n vérifie la propriété (R) et soit p **le plus petit diviseur premier de n**

0,75 pt **a)** Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ , en déduire que $p \geqslant 5$

0,5 pt **b)** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

0,5 pt **c)** Montrer qu'il existe un couple $(a, b)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$

0,5 pt **d)** Soient r et q respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de a par p-1 $\left(a = q(p-1) + r \text{ avec : } 0 \leqslant r < p-1 \text{ et } q \in \mathbb{Z}\right)$
Montrer qu'il existe **un entier naturel** k tel que : $rn = 1 + k(p-1)$

0,75 pt **2 -** Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant la propriété (R).

## Problème : ( 10 pts )

On considère la fonction numérique $h$ définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$h(1) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x > 1) \; ; \; h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$$

### partie I :

0,25 pt **1 - a)** Montrer que h est continue à droite en 1

0,75 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 1) \; ; \; \ln x < x - 1$ puis déduire que la fonction h strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ puis dresser le tableau des variations de h

0,25 pt **b)** Déduire que : $(\forall x \geqslant 1) \; ; \; 0 < h(x) \leqslant 1$

### partie II :

On considère la fonction numérique $g$ définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$(\forall x > 1) \; ; \; g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \quad \text{et} \quad g(1) = \ln 2$$

et soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall x > 1) \; ; \; \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$

0,25 pt **b)** Vérifier que : $(\forall x > 1) \; ; \; g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$

0,5 pt **c)** Montrer que : $(\forall x > 1) \; ; \; g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t \ln t} dt$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $(\forall x > 1) \; ; \; (x - \sqrt{x}) h(x) \leqslant g(x) - \ln 2 \leqslant (x - \sqrt{x}) h(\sqrt{x})$

0,5 pt **b)** Déduire que g est dérivable à droite au point 1

**0,75 pt** **c)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$

**0,75 pt** **3 - a)** Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$ et que : $(\forall x > 1)$ ; $g'(x) = \dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})$

**0,5 pt** **b)** Déduire que $(\forall x \geqslant 1)$ ; $0 < g'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ puis dresser le tableau des variations de g

**0,5 pt** **c)** Construire la courbe $(C)$

**partie III :**

I-

**0,5 pt** **1 -** Montrer que la fonction $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une bijection de l'intervalle $[1;+\infty[$ vers l'intervalle $]-\infty;\ln 2]$

**0,25 pt** **2 -** Déduire qu'il existe un unique réel $\alpha$ de l'intervalle $]1;+\infty[$ tel que $1 + g(\alpha) = \alpha$

II- On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $1 \leqslant u_0 < \alpha$ et $(\forall n \geqslant 0)$ ; $u_{n+1} = 1 + g(u_n)$

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 0)$ ; $1 \leqslant u_n < \alpha$

**0,5 pt** **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante

**0,75 pt** **c)** Déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et que : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \alpha$

**0,5 pt** **2 - a)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 0)$ ; $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 0)$ ; $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

**0,25 pt** **c)** Déduire une deuxième fois que : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \alpha$

FIN

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques A& B

**Session : Normal 2013**

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3,5 pts)

**1 - On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :**

$\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^2$ ; $x * y = x + y - 2$

0.5 pt

**a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative**

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

- $\left(a * b\right) * c = a * b + c - 2 = \left(a + b - 2\right) + c - 2 = a + b + c - 4$

$a * \left(b * c\right) = a + b * c - 2 = a + b + c - 2 - 2 = a + b + c - 4$

Donc $\left(a * b\right) * c = a * \left(b * c\right)$ d'où $*$ est associative dans $\mathbb{Z}$

- $a * b = a + b - 2 = b + a - 2 = b * a$

donc $*$ est commutative dans $\mathbb{Z}$

$c/c$ : $*$ associative et commutative dans $\mathbb{Z}$.

0,25 pt

**b) Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ admet un élément neutre à déterminer.**

On remarque que pour $e = 2$, on a : $x * e = e * x = x$

donc $e = 2$ est un élément neutre de $*$ et puisque l'élément neutre quand il existe il est unique

donc $e = 2$ est l'élément neutre de $(\mathbb{Z}, *)$

0,5 pt

**c) Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe commutatif.**

On a $*$ est associative et commutative et admet un élément neutre $e = 2$

donc il suffit de montrer que chaque élément $a$ de $\mathbb{Z}$ admet un symétrique $a'$ dans $\mathbb{Z}$.

$\left(\forall a \in \mathbb{Z}\right)\left(\forall x \in \mathbb{Z}\right)$ ; $a * x = 2 \iff a + x - 2 = 2 \iff x = 4 - a \in \mathbb{Z}$

donc $a' = 4 - a$

$c/c$ : $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe commutatif.

**2 - On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $\top$ définie par :**
$\left(\forall (x;y)\in\mathbb{Z}^2\right)$ ; $x\top y = xy-2x-2y+6$
**On considère l'application $f$ de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ définie par :** $(\forall x\in\mathbb{Z})$ ; $f(x)=x+2$

0,5 pt **a) Montrer que $f$ est un morphisme bijectif de $(\mathbb{Z},\times)$ vers $(\mathbb{Z},\top)$**

- La bijection : Montrons que : $(\forall a\in\mathbb{Z})\,(\exists x\in\mathbb{Z})$ ; $f(x)=a$

Soit $a$ un élément de $\mathbb{Z}$

$f(x)=a \Longleftrightarrow x+2=a \Longleftrightarrow x=a-2\in\mathbb{Z}$

Donc $f$ est bijective de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$.

- L'homomorphisme des lois :

Soient $a,b\in\mathbb{Z}$

$f(a\times b)=f(ab)=ab+2$

$f(a)\top f(b)=(a+2)\top(b+2)=(a+2)(b+2)-2(a+2)-2(b+2)+6=ab+2$

donc $f(a\times b)=f(a)\top f(b)$

$c/c$ : $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},*)$ vers $(\mathbb{Z},\top)$

0,25 pt **b) Montrer que : $\forall (x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ ; $(x*y)\top z=(x\top z)*(y*z)$**

$$\begin{aligned}\forall x,y,z\in\mathbb{Z} \quad ; \quad (x*y)\top z &= (x*y)z-2(x*y)-2z+6\\ &= (x+y-2)z-2(x+y-2)-2z+6\\ &= xz+yz-2x-2y-4z+10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}et \quad (x\top z)*(y\top z) &= (x\top z)+(y\top z)-2\\ &= xz-2x-2z+6+yz-2y-2z+6-2\\ &= xz+yz-2x-2y-4z+10\end{aligned}$$

donc $(x*y)\top z=(x\top z)*(y\top z)$

$c/c$ : $\top$ est distributive pour $*$ dans $\mathbb{Z}$.

0,75 pt **3 - En déduire de ce qui précède que $(\mathbb{Z},*,\top)$ est un anneau commutatif et unitaire.**

- On a $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif ;
- $\top$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$ ;
- $\top$ est distributive pour la loi $*$ dans $\mathbb{Z}$ ;
- 1 est l'élément neutre de $(\mathbb{Z},*)$ et $f$ est isomorphisme de $(\mathbb{Z},*)\mapsto(\mathbb{Z},\top)$

donc $\top$ est associative et commutative dans $\mathbb{Z}$

$c/c$ : $(\mathbb{Z},*,\top)$ est un anneau commutative et unitaire.

0,25 pt **4 - a) Montrer que : $x\top y=2$ si et seulement si $x=2$ ou $y=2$**

$$\begin{aligned}\forall x,y\in\mathbb{Z} \quad ; \quad x\top y=2 &\Longleftrightarrow xy-2x-2y+4=0\\ &\Longleftrightarrow x(y-2)-2(y-2)=0\\ &\Longleftrightarrow (x-2)(y-2)=0\\ &\Longleftrightarrow x=2 \text{ ou } y=2\end{aligned}$$

$c/c$ : $x\top y=2 \Longleftrightarrow x=2$ ou $y=2$

0,25 pt

**b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z}, *, \top)$ est intègre**

On sait que $e = 2$ est l'élément neutre de $(\mathbb{Z}, *)$

et puisque $(\forall x, y \in \mathbb{Z})$ ; $x \top y = 2 \Longleftrightarrow x = 2 \; ou \; y = 2$

donc $(\mathbb{Z}, *, \top)$ n'admet pas de diviseurs de zéro.

$c/c$ : $(\mathbb{Z}, *, \top)$ est intègre.

0,25 pt

**c) $(\mathbb{Z}, *, \top)$ est-il un corps ?(Justifier la réponse)**

L'inverse de 5 pour la loi $\times$ est $\frac{1}{5}$ et puisque $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ donc 5 n'admet pas d'inverse dans $(\mathbb{Z}, \times)$

Or : $f : (\mathbb{Z}, \times) \mapsto (\mathbb{Z}, \top)$ isomorphisme et $f(5) = 7$ donc 7 n'admet pas d'inverse dans $(\mathbb{Z}, \top)$

$c/c$ : $(\mathbb{Z}, *, \top)$ n'est pas un corps.

## Exercice 2 : (3,5 pts)

### Partie I

Soit $a$ un nombre complexe non nul.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ d'inconnue $z$ : $(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$

0 ;25 pt

**1 - Vérifier que le discriminant de l'équation $(E)$ est : $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^2 a^2$**

$(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$

$$
\begin{aligned}
donc \quad \Delta &= \left(3 + i\sqrt{3}\right)^2 a^2 - 8\left(1 + i\sqrt{3}\right)a^2 \\
&= a^2\left(9 - 3 + 6i\sqrt{3} - 8 - 8i\sqrt{3}\right) \\
&= a^2\left(-2 - 2i\sqrt{3}\right) \\
&= a^2\left(1 - 3 - 2i\sqrt{3}\right) \\
&= a^2\left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 \\
&= \left(a\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right)^2 \\
&= \left(\left(-1 + i\sqrt{3}\right)a^2\right)
\end{aligned}
$$

0,5 pt

**2 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$**

On a : $(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$ et $\Delta = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^2 a^2$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{(3 + i\sqrt{3}a - (3 + i\sqrt{3})a}{4} \\
&= \frac{4a}{4} \\
&= a
\end{aligned}
\quad \text{et} \quad
\begin{aligned}
z_2 &= \frac{(3 + i\sqrt{3})a + (i\sqrt{3} - 1)a}{4} \\
&= a\left(\frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}\right) \\
&= a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$c/c$ : $S = \left\{a, a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

## Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points $A, B$ et $M$ d'affixes respectives $a, b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z$

Soit $r$ la rotation de centre $M$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

On pose $A_1 = r^{-1}(A)$ et $B_1 = r^{-1}(B)$ (où $r^{-1}$ est la rotation réciproque de la rotation $r$)

Soient $a_1$ et $b_1$ les affixes respectifs de $A_1$ et $B-1$

**0,5 pt**

**1 - Vérifie que $OAB$ est un triangle équilatéral**

On a : $\frac{a}{b} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow \begin{cases} \left|\frac{a}{b}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} \left[2\pi\right] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{OA}{OB} = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} \left[2\pi\right] \end{cases}$

$c/c$ : Le triangle $OAB$ est équilatéral.

**0,5 pt**

**2 - a) Montrer que :**

On a $r$ est la rotation de centre $M$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

d'où $r^{-1}$ est la rotation de centre $M$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

$$donc \begin{cases} B_1 = r(B) \\ A_1 = r^{-1}(A) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 - z = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-z) \\ a_1 - z = e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-z) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = z + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(a-z) \\ b_1 = z + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(b-z) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + z\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ b_1 = z\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + z\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ b_1 = z\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a \end{cases}$$

d'où : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + z\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ et $b_1 = z\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a$

**0,5 pt**

**b) Montrer que $OA_1MB_1$ est un parallélogramme**

On a $a_1 + b_1 = z$ d'où : $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OM}$

donc : $OA_1MB_1$ est un parallélogramme.

**3 - Supposons que : $M \neq A$ et $M \neq B$**

**0,5 pt**

**a) Montrer que : $\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b}$**

On a :

$$\begin{cases} a_1 - z = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 - z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z - a\right) \\ b_1 - z = a\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 - z = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\left(z - a\right) \\ b_1 - z = -\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - a\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} = -\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\frac{\left(z - a \times \frac{b}{a}\right)}{z - a}$$

$$\Longrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} = -\frac{a}{b} \times \frac{z - b}{z - a}$$

Enfin : $\dfrac{z - b_1}{z - a_1} = -\dfrac{a}{b} \times \dfrac{z - b}{z - a}$

0,75 pt **b) Montrer que les points $M$, $A_1$ et $B_1$ sont alignés si et seulement si les points $M$, $O$, $A$ et $B$ sont cocycliques.**

Le triangle $OAB$ est équilatéral, d'où les points $M$, $O$, $A$, et $B$ non alignés.

Donc les points $M$, $O$, $A$ et $B$ sont alignés $\Longleftrightarrow \dfrac{b - z}{a - z} \div \dfrac{b - o}{a - o} \in \mathbb{R}$

$$\frac{b - z}{a - z} \div \frac{b - o}{a - o} \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \frac{b - z}{a - z} \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{z - b_1}{z - a_1} \in \mathbb{R}$$

$\Longleftrightarrow$ $M$ et $A_1$ et $B_1$ sont alignés

## Exercice 3 : (3 pts)

L'objectif de l'exercice est de rechercher les entiers naturels $n$ strictement supérieur à 1 qui vérifient la propriété suivantes : $(R)$ : $3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$

**1 - On suppose que $n$ vérifie la propriété $(R)$ et soit $p$ le plus petit diviseur premier de $n$**

0,75 pt **a) Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$, en déduire que $p \geqslant 5$**

On a $n > 1$ et vérifier la propriété $(R)$ : $3^n - 2^n \equiv 0\ [2\pi]$ et $p$ est le plus petit diviseur premier positif de $n$

D'où : $\begin{cases} n | 3^n - 2^n \\ p | n \end{cases}$

par suite $p | 3^n - 2^n$

donc $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$

On montre que $p \geqslant 5$

On a $p = 2 \Longrightarrow \begin{cases} 2 | 2^n \\ 2 | 3^n - 2^n \end{cases} \Longrightarrow 2 | 3^n \Longrightarrow 2 | 3$ et $p = 3 \Longrightarrow \begin{cases} 3 | 2^n \\ 3 | 3^n - 2^n \end{cases} \Longrightarrow 3 | 2^n \Longrightarrow 3 | 2$

et puisque 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2 d'où : $p \neq 3$ et $p \neq 2$

donc en déduit que $p \geqslant 5$

Alors : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ et $p \geqslant 5$

**0,5 pt** **b)** **Montrer que :** $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ **et** $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$

puisque $p \geqslant 5$ d'où : $p$ ne divise pas 2 et $p$ ne divise pas 3

donc d'après théorème de petit Fermat, on a :

$3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$

**0,5 pt** **c)** **Montrer qu'il existe un couple** $(a, b)$ **de** $\mathbb{Z}^2$ **tel que :** $an - b(p-1) = 1$

puisque $p$ est le plus petit diviseur positif de $n$ d'où tous les diviseur de $p-1$ ne divisent pas $n$ sauf 1

on déduit que : $(p-1) \wedge n = 1$

donc d'après théorème de Bezout il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\alpha n + \beta(p-1) = 1$

si on pose : $\alpha = a$ et $b = -\beta$ on aura :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ an - b(p-1) = 1$$

**0,5 pt** **d)** **Soient** $r$ **et** $q$ **respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de** $a$ **par** $p-1$

$\left( a = q(p-1) + r \quad avec \quad : \ 0 \leqslant r < p-1 \quad et \quad q \in \mathbb{Z} \right)$

**Montrer qu'il existe un entier naturel** $k$ **tel que :** $rn = 1 + k(p-1)$

On a : $\begin{cases} an - b(p-1) = 1 \\ a = q(p-1) + r \end{cases} \Longrightarrow 1 + b(p-1) = nq(p-1) + nr \Longrightarrow nr = 1 + (b - nq)(p-1)$

Si on pose : $k = b - nq$, on aura : $nr = 1 + k(p-1)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Il reste à montrer que $k \in \mathbb{N}$

Il suffit de montrer que $r \geqslant 1$

d'après $Q.c$, on a : $(p-1) \wedge a = 1$ et puisque $p - 1 \geqslant 4$ d'où $p-1$ ne divise pas $a$ donc $r \geqslant 1$

et puisque $n > 1$ d'où $nr > 1$ et de $nr - 1 = k(p-1)$, on déduit que : $k \in \mathbb{N}$

$c/c$ : Il existe un nombre entier naturel $k$ vérifié $nr = 1 + k(p-1)$

**0,75 pt** **2 - Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel** $n$ **strictement supérieur à** $1$ **vérifiant la propriété** $(R)$

On suppose qu'il existe $n > 1$ vérifiant la propriété $(R)$

On a d'après $Q.b$ $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et on a : $k \in \mathbb{N}$

donc $2^{k(p-1)} \equiv 1\ [p]$ et $3^{k(p-1)} \equiv 1\ [p]$

et puisque $nr - 1 = k(p-1)$ d'où $2^{nr-1} \equiv 1\ [p]$ et $3^{nr-1} \equiv 1\ [p]$

donc $3^{nr} \equiv 3\ [p]$ et $2^{nr} \equiv 2\ [p]$

On en déduit que : (1) $3^{nr} - 2^{nr} \equiv 1\ [p]$

et d'après $Q.1.a$ $\quad 3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ par suite $3^n \equiv 2^n\ [p]$ d'où $3^{nr} \equiv 2^{nr}\ [p]$

donc (2) $3^{nr} - 2^{nr} \equiv 0\ [p]$

D'après (1) et (2) on déduit que : $1 \equiv 0\ [p]$ c'est-à-dire : $p$ divise 1. **contradiction**

donc l'hypothèse est fausse.

$c/c$ : Il n'existe aucun nombre entier naturel $n$ strictement supérieur à 1 vérifiant la propriété $(R)$.

## Exercice 4 : (11 pts)

### Partie I

On considère la fonction numérique $h$ définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par :

$$h(1) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x > 1))\, h(x) = \frac{x-1}{x\ln x}$$

0,25 pt **1 - a) Montrons que la fonction $h$ est continue à droite de 1.**

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{x\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\left(\frac{x\ln(x)}{x-1}\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\left(\frac{x\ln(x)-1\ln(1)}{x-1}\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right)}$

On pose : $\varphi(x) = x\ln(x)$, on a la fonction $\varphi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ ; en particulier en 1, donc :

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right) = \varphi'_d(1) = \varphi'(1) = 1.$$

$\big($car : $(\forall x > 0)$ : $\varphi'(x) = (x\ln(x))' = \ln(x) + x.\frac{1}{x} = \ln(x) + 1\big)$

D'où : $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \frac{1}{1} = 1.$

0,75 pt **b) Montrer que : $(\forall x > 1)$ ; $\ln x < x - 1$, puis déduire que la fonction $h$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.**

✓ On considère la fonction $v$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $v(x) = \ln(x) - x + 1$.

Étudions les variations de la fonction $v$ sur $]1,+\infty[$ :

on la fonction $v$ est une somme algébrique de fonctions continues et dérivables sur $]0,+\infty[$,

donc $v$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,

donc : $(\forall x > 0)$ $v'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

Et on a le tableau de signe de $v'(x)$ est :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | \|\| | $+$ | | $+$ | |
| $v'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

Et on a de plus : $\lim_{x\to 0^+} v(x) = \lim_{x\to 0^+} = \ln(x) - x + 1 = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) + (1-x) = -\infty$.
$\left(\text{car : } \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} (1-x) = 1\right)$
Et on a : $\lim_{x\to+\infty} v(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) - x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$.
$\left(\text{car : } \lim_{x\to+\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} -1 + \frac{1}{x} = -1\right)$
D'où le tableau de variation de la fonction $v$ est :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $v$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

D'où la fonction $v$ est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$,

donc : $v(]1,+\infty[) = ]-\infty, 0[$,

donc : $(\forall x > 1)\ ;\ v(x) < 0$,

donc : $(\forall x > 1)\ ;\ \ln(x) < x - 1$.

✓ On a la fonction $h$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ ; en tant que que quotient de deux fonctions dérivables sur $]1,+\infty[$,

donc : $(\forall x > 1)$ ;

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\tfrac{x-1}{x\ln(x)}\right)' \\ &= \tfrac{(x-1)'(x\ln(x))-(x-1)(x\ln(x))'}{(x\ln(x))^2} \\ &= \tfrac{x\ln(x)-(x-1)(\ln x+1)}{(x\ln(x))^2} \\ &= \tfrac{\ln x - x + 1}{(x\ln(x))^2} \end{aligned}$$

Et on sait que $(\forall x > 1)\ ;\ \ln(x) - x + 1 < 0$, et que : $(\forall x > 1)\ ;\ (x\ln(x))^2 > 0$,

d'où : $(\forall x > 1)$ ; $h'(x) > 0$, donc la fonction $h$ est strictement sur $]1,+\infty[$.

**0,5 pt** **2 - a)** **Calculer $\lim_{x\to+\infty} h(x)$, puis déduire le tableau de variation de la fonction $h$.**

De plus on a : $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$.
$\left(\text{car : } \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\right)$
D'où on obtient le tableau de variation de la fonction $h$ suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | |
| $h(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

**0,25 pt** **b)** **En déduire que : $(\forall x > 1)\ :\ 0 < h(x) < 1$.**

On a la fonction $h$ est continue sur $]1,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]1,+\infty[$,

et on a d'après $2)-a)$ la fonction $h$ est strictemnt décroissante,

d'où la fonction $h$ est continue et strictemnt décroissante sur $]1,+\infty[$,

d'où la fonction $h$ réalise une bijection de $]1,+\infty[$ vers $h\left(]1,+\infty[\right)=]0,1[$,

d'où : $(\forall x\in ]1,+\infty[)\ :\ 0<h(x)<1$

## Partie II

On considère la fonction $g$ définie par :

$$g(1)=\ln 2 \quad \text{et} \quad (\forall x>1)\, g(x)=\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\right)\mathrm{d}t$$

0,25 pt **1 - a)** **Vérifier que :** $(\forall x>1)\ :\ \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}\ln t}\right)\mathrm{d}t=\ln 2$.

Soit $x\in ]1;+\infty[$. On remarque que : $\forall t\in ]1;+\infty[\ :\ (t\ln t)'=1+\ln t$.

Et on utilise cette remarque dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t = \int_x^{x^2}\left(\frac{1+\ln t-\ln t}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t &= \int_x^{x^2}\left(\frac{1+\ln t}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t-\int_x^{x^2}\left(\frac{\ln t}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_x^{x^2}\frac{(t\ln t)'}{t\ln t}\mathrm{d}t-\int_x^{x^2}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\
&= \Big[\ln(t\ln(t))\Big]_x^{x^2}-\Big[\ln t\Big]_x^{x^2}\\
&= (\ln(x^2\ln(x^2)))-(\ln(x\ln(x)))-(\ln(x^2)-\ln x)\\
&= \ln\left(\tfrac{x^2\ln(x^2}{x\ln x}\right)-\ln\left(\tfrac{x^2}{x}\right)\\
&= \ln\left(\tfrac{2x^2\ln x}{x\ln x}\right)-\ln x\\
&= \ln(2x)-\ln x\\
&= \ln\left(\tfrac{2x}{x}\right)\\
&= \ln 2\end{aligned}$$

0,25 pt **b)** **Vérifier que :** $(\forall x>1)\ :\ g(x)-\ln 2=\int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t$.

Soit $x\in ]1;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}g(x)-\ln 2 &= \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t-\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t\ln t}-\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t\ln t}-\frac{\sqrt{t}}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

0,5 pt **c)** **Montrer que :** $(\forall x>1)\ :\ g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t$.

On utilise la technique de changement de variable en pasant : $u=\sqrt{t}$.

Donc $\frac{du}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$,donc $dt=2udu$

- Si $t=x$, alors $u=\sqrt{t}$.
- Si $t=x^2$, alors $u=x$.

Donc :

$$\begin{aligned} g(x)-\ln 2 &= \int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t &= \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{u^2\ln u^2}\right)2u\mathrm{d}u \\ && = \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{2u^2\ln u}\right)2u\mathrm{d}u \\ && = \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{u\ln u}\right)\mathrm{d}u \\ && = \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}dt \end{aligned}$$

**0,5 pt** **2 - a)** **Montrer que : $(\forall x>1)\ :\ (x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$.**

Soient $x\in\,]1;+\infty[$ et $t\in[\sqrt{x};x]$.

On a la fonction $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$, donc elle est strictemnt décroissante sur $[\sqrt{x};x]$ (car $x>1$), d'où :

$$\begin{aligned} \sqrt{x}\leq t\leq x &\Longrightarrow h(x)\leq h(t)\leq h(\sqrt{x}) \\ &\Longrightarrow \int_{\sqrt{x}}^{x}h(x)\mathrm{d}t\leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t\leq \int_{\sqrt{x}}^{x}h(\sqrt{x})\mathrm{d}t \\ &\Longrightarrow h(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}1\mathrm{d}t\leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t\leq h(\sqrt{x})\int_{\sqrt{x}}^{x}1\mathrm{d}t \\ &\Longrightarrow h(x)\Big[t\Big]_{\sqrt{x}}^{x}\leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t\leq h(\sqrt{x})\Big[t\Big]_{\sqrt{x}}^{x} \\ &\Longrightarrow h(x)(x-\sqrt{x})\leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t\leq h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

D'où d'après le résultat de la question $II)-1)-a)$, on obtient :

$$h(x)(x-\sqrt{x})\leq g(x)-\ln 2\leq h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$$

**0,5 pt** **b)** **En déduire que la fonction $g$ est dérivable à droite au point $1$.**

On a d'après la question $II)-2)-a)$, pour tout $x\in\,]1;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} & h(x)(x-\sqrt{x})\leq \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t\leq h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x}) \\ \Longrightarrow\ & \tfrac{(x-\sqrt{x})}{x-1}h(x)\leq \tfrac{1}{x-1}\int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t\leq \frac{(x-\sqrt{x})}{x-1}h(\sqrt{x})\quad \left(\text{ car } \frac{1}{x-1}>0\right) \end{aligned}$$

Et on : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)}h(x)=\dfrac{1}{2}$,

et on : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}h(\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}h(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}$,

d'où d'après le critères des gendarmes pour les limites, on a :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}\int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

Donc d'après $II)-1)-c)$ : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\dfrac{t-1}{t\ln t}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}$

D'où la fonction $g$ est dérivable à droite de 1 et $g'(1)=\frac{1}{2}$.

**0,75 pt** **c)** **Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$.**

✓ On a d'après la question $II)-2)-a)$ : pour tout $x\in\,]1;+\infty[$

$$(x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x}) \implies g(x)\geq (x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2 &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x})(x-1)}{x\ln x}+\ln 2\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty\end{aligned}$$

$\left(\text{Car : } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+ \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1\right)$

d'où d'après les critères de comparaison des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$,

✓ On a d'après la question $II)-2)-a)$ : Pour tout $x\in\,]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}&(x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})\\ \implies\ &(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2\leq g(x)\leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})+\ln 2\\ \implies\ &\left(\tfrac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\tfrac{\ln 2}{x}\leq \tfrac{g(x)}{x}\leq \left(\tfrac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\tfrac{\ln 2}{x}\end{aligned}$$

Et on : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\dfrac{\ln 2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x)+\dfrac{\ln 2}{x}=0$

$\left(\text{Car : } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln 2}{x}\right)=0\right)$

et on : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\dfrac{\ln 2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x})+\dfrac{\ln 2}{x}=0$

$\left(\text{Car : } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} h(\sqrt{x})=0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln 2}{x}\right)=0\right)$

d'où d'après le critère des gendarmes pour les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$,

**0,75 pt** **3 - a)** **Montrer que $g$ est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$ et que :**

**$(\forall x>1))\ ;\ g'(x)=\frac{1}{2}h(\sqrt{x})$.**

On a pour tout $x\in\,]1;+\infty[$ : $g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\dfrac{1}{\sqrt{t}\ln t}\mathrm{d}t$.

On pose : $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}$, et $u(x)=x$ et $v(x)=x^2$, d'où :

$$g(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

On a la fonction $f$ est continue sur $I=\,]0;+\infty[$ en tant que inverse du produit de deux fonctions continue sur $]0;+\infty[$, soit donc $F$ une primitive de la fonction fonction $u$ sur $I$, donc pour tout $x \in ]1;+\infty[$ : $g(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$.

Et on a les deux fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $]1;+\infty[$ et $u\left(]1;+\infty[\right) \subset I$ et $v\left(]1;+\infty[\right) \subset I$ et $F$ dérivable sur $I$, donc $g = F \circ v - F \circ u$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et on pour tout $x \in ]1;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} g'(x) \quad = (F(u(x)) - F(v(x)))' \quad &= v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) \\ &= f(x) - 2xf(x^2) \\ &= 2x\tfrac{1}{\sqrt{x^2}\ln x^2} - \tfrac{1}{\sqrt{x}\ln x} \\ &= \tfrac{2x}{2x\ln x} - \tfrac{1}{\sqrt{x}\ln x} \\ &= \tfrac{x}{x\ln x} - \tfrac{\sqrt{x}}{x\ln x} \\ &= \tfrac{x-\sqrt{x}}{x\ln x} \\ &= \tfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}^2\ln\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}h(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

0,5 pt

b) **En déduire que :** $(\forall x \geq 1)$ ; $0 < g' \leq \frac{1}{2}$, **puis dresser le tableau de variation de** $g$.

On d'après la question $II)-2)-b)$ : $(\forall x \geq 1)\ 0 < h(x) \leq 1$,

donc pour tout $x \in ]1;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} x \geq 1 \quad &\Longrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \\ &\Longrightarrow 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1 \\ &\Longrightarrow 0 < \tfrac{1}{2}h(\sqrt{x}) \leq \tfrac{1}{2} \\ &\Longrightarrow 0 < g'(x) \leq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

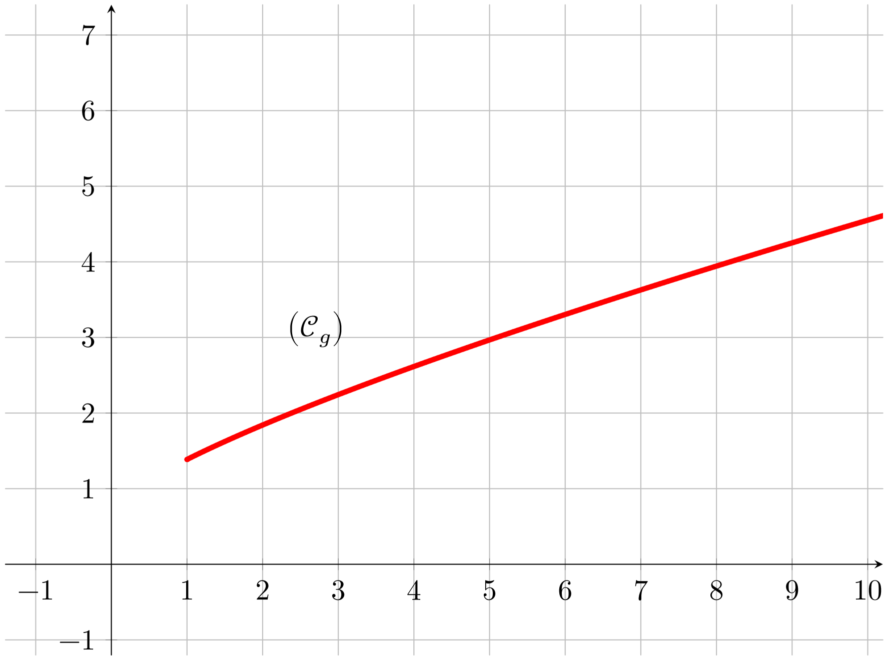
d'où la fonction $g$ est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

✓ Le tableau de variation de la fonction $g$ est :

| $x$ | $1$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\ln 2$ $\nearrow$ $+\infty$ |

0,5 pt

c) **Construire la courbe** $(C_g)$.




## Partie III

0,5 pt **1 - a) Montrer que la fonction $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une bijection de l'intervalle $[1; +\infty[$ dans l'intervalle $]-\infty; \ln 2]$.**

On a pour tout $x \in ]1; +\infty[$ : $k(x) = g(x) - (x-1)$.

Puisque les deux fonction $g$ et $w : x \mapsto (x-1)$ sont dérivables sur $]1; +\infty[$, alors $k = g - w$ est dérivable sur $]1; +\infty[$, donc pour tout $x \in ]1; +\infty[$ : $k'(x) = g'(x) - 1$,

et on d'après la question $II) - 3) - b)$ : $(\forall x \geq 1)$ ; $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} x \geq 1 \quad &\Longrightarrow 0 < g'(x) \leq \tfrac{1}{2} \\ &\Longrightarrow 0 - 1 < g'(x) - 1 \leq \tfrac{1}{2} - 1 \\ &\Longrightarrow -1 < k'(x) \leq \tfrac{-1}{2} \\ &\Longrightarrow k'(x) < 0 \end{aligned}$$

d'où la fonction $k$ est strictement décroissnate sur $[1; +\infty[$,

donc la fonction $k$ réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers l'ntervalle :

$k\left(]1; +\infty[\right) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} k(x); k(1)\right[ = ]-\infty; \ln 2[ = ]-\infty; \ln 2]$.

$\left(\text{Car} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(\frac{g(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x}) = -\infty\right)$

0,25 pt **b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha$ de l'intervalle $]1; +\infty[$ qui vérifie : $1 + g(\alpha) = \alpha$.**

On sait que $\ln 2 > 0$, donc $0 \in ]-\infty; \ln 2]$, et puisque la fonction $k$ réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers l'ntervalle $]-\infty; \ln 2]$, alors :

$$\begin{aligned} &(\exists! \alpha \in [1; +\infty[) \;\; k(\alpha) = 0 \\ \Longrightarrow \; &(\exists! \alpha \in [1; +\infty[) \;\; g(\alpha) - \alpha + 1 = 0 \\ \Longrightarrow \; &(\exists! \alpha \in [1; +\infty[) \;\; 1 + g(\alpha) = \alpha \end{aligned}$$

d'où l'équation $1 + g(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[1; +\infty[$.

**2 - Soit $(u)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par :** $1 \leq u_0 \leq \alpha$ **et** $(\forall n \geq 0)$ ; $u_{n+1} = 1+g(u_n)$**.**

**0,5 pt** **a)** i. **Montrer que :** $(\forall n \geq 0)$ ; $1 \leq u_n \leq \alpha$**.**

On procède par récurence;

- Pour $n = 0$, On a : $1 \leq u_0 = 2 \leq \alpha$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que :$n \geq 0$, supposons que : $1 \leq u_n \leq \alpha$ $(H.R)$,
- Et montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

On d'après $(H.R)$ :

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq \alpha \quad &\Longrightarrow g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha) \quad \text{(car la fonction } f \text{ est str.croissante sur}[1;\alpha]) \\ &\Longrightarrow g(1)+1 \leq g(u_n)+1 < g(\alpha)+1 \\ &\Longrightarrow \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha \\ &\Longrightarrow 1 \leq u_{n+1} < \alpha \quad (\text{car} 1 < 1+\ln 2) \end{aligned}$$

donc, par récurrence, on a : $(\forall n \geq 0)$ ; $1 \leq u_n \leq \alpha$.

**0,5 pt** ii. **Montrer que la suite $(u)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.**

On a d'après la question $III)-2)-a)-i)$ : $(\forall n \geq 0)$ ; $1 \leq u_n < \alpha$.,

donc pour tout $n \leq 0$ :

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n < \alpha \quad &\Longrightarrow k((u_n) > g(\alpha) \quad \text{(car la fonction } k \text{ est str.décroissante sur}[1;\alpha]) \\ &\Longrightarrow g(u_n) - u_n + 1 > 0 \, (\text{car } k(\alpha) = 0) \\ &\Longrightarrow 1 + g(u_n) > u_n \\ &\Longrightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad (\text{car} 1 < 1+\ln 2) \end{aligned}$$

D'où la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

**0,5 pt** iii. **En déduire que la suite $(u)_{n\geq 0}$ est est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.**

On a :

- La suite $(u_n)$ est décroissante;
- La suite $(u_n)$ est minorée par 1.

Donc la suite $(u_n)$ est convergente.

$*$ On détermine sa limite $l$ :

- On remarque que : $U_{n+1} = \varphi(u_n)$ avec $\varphi = 1+g$ et $(\forall n \geq 0)$ ; $u_n \in [1;\alpha]$,
- la fonction $\varphi$ est continue et strictement croissante sur $I = [1;\alpha]$, donc :

$\varphi(I) = \varphi([1;\alpha]) = [\varphi(1);\varphi(\alpha)] = [1+\ln 2;\alpha] \subset [1;\alpha]$,

- la suite $(u_n)$ est convergente vers $l$ avec $l \in \mathbb{R}$,

donc $l$ est solution de l'équation : $f(x) = x$

On a $\varphi(x) = x \Longleftrightarrow 1 + g(x) = x \Longleftrightarrow x = \alpha$

D'où : $l = \alpha$.

**0,5 pt** **b)** i. **Montrer que :** $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)|u_n - \alpha|$**.**

On remarque que : $U_{n+1} = \varphi(u_n)$ avec $\varphi = 1 + g$ et $\varphi(\alpha) = \alpha$ $(\forall n \geq 0)$ ; $u_n \in [1;\alpha]$.

On a la fonction $\varphi$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ en tant que somme de fonction dérivable sur$]1;+\infty[$, donc :

$$(\forall x \geq 1) \ ; \ \varphi'(x) = g'(x)$$

Et on a d'après $II) - 3) - b)$ :

$$x \geq 1 \quad \Longrightarrow 0 < g'(x) \leq \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow |g'(x)| \leq \tfrac{1}{2}$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements fini appliqué à la fonction $\varphi$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$, on a :

$$\left(\forall (a;b) \in ]1;+\infty[^2\right) \ ; \ |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a| \quad (*)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on prend : $b = u_n \in ]1;+\infty[$ et $a = \alpha \in ]1;+\infty[$ dans la relation $(*)$ et on obtient :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

.

0,5 pt

ii. **Montrer que : $(\forall n \geq 0)$ ; $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.**

On procède par récurence :

- pour $n = 0$, on a : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$.
- soit $n \in \mathbb{N}$, suppossons que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ $(H.R)$,
- et montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

On a d'après $(H.R)$ : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$,

donc : $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$ $\left(\text{ car} \frac{1}{2} > 0\right)$,

et on d'après $(III) - 2) - b) - ii)$ : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)|u_n - \alpha|$,

d'où : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.

donc, par récurence, on a : $(\forall n \geq 0)$ ; $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

0,5 pt

iii. **En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.**

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$,

et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$ $\left(\text{car} \frac{1}{2} \in ]-1;1[\right)$,

alors d'après le critère de convergence des suites : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage** juillet 2013

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .................................... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .................................... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .................................... **8.25 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** .................................... **1.75 points**

## Exercice 1 : ( 3.5 pts )

les parties A et B sont indépendantes

**partie A :**

Pour tout $x$ et $y$ de l'intervalle $G = ]1;2[$ on pose : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

**0,5 pt** **1 -** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $G$

**2 -** On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif.
On considère l'application $f$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $G$ définie par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

**0,75 pt** **a)** Montrer que $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$

**0,5 pt** **b)** En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre.

**partie B :**

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel, et on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**0,5 pt** **1 - a)** Vérifier que : $A^3 = O$ et en déduire que $A$ est un diviseur de zéro dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$

**0,5 pt** **b)** Vérifier que : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ en déduire que la matrice $A + I$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ que l'on déterminera.

**2 -** Pour tout $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b) = aI + bA$ et l'on considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

**0,75 pt** Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

## Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

**partie A :**

On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne, et on considère la variable aléatoire $X$ égale au nombre de boules noires tirées.

**1 pt** **1 -** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$

**0,5 pt** **2 -** Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$

**partie B :**

On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

**Etape 1 :** On tire une boule de l'urne, on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

**Etape 2 :** On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1.

**Etape 3 :** On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules après l'étape 2.

On considère les évènements suivants : $N$ "la boule tirée à l'étape 1 est noire"

$R$ "la boule tirée à l'étape 1 est rouge"

$E$ "toutes les boules tirées à l'étape 3 sont noires"

**0,5 pt** **1 -** Montrer que : $p(E \cap N) = \dfrac{12}{55}$

**0,5 pt** **2 -** Calculer $p(E)$

**0,5 pt** **3 -** Calculer la probabilité de l'événement $R$ sachant que $E$ est realisé.

## Exercice 3 : (3.5 pts)

**partie A :**

Soit $a$ un nombre complexe différent de 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ :\ 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

**0,5 pt** **1 -** Montrer que : $z_1 = \dfrac{(a-1)}{2}(1+\mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{(a-1)}{2}(1-\mathrm{i})$ sont les deux solutions de l'équation $(E)$

**2 -** On prend : $a = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

**0,5 pt** **a)** Montrer que : $a - 1 = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

**1 pt** **b)** En déduire la forme trigonométrique de $z_1$ et $z_2$

**partie B :**

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$

**On admet que** $Re(a) < 0$, et on considère les points $A(a)$, $B(-\mathrm{i})$, $C(i)$ et $B'(1)$

**0,5 pt** **1 -** Déterminer en fonction de $a$, les affixes des points $J$ et $K$ milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$

**0,5 pt** **2 -** Soit $r_1$ la rotation de centre $J$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et $r_2$ la rotation de centre $K$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

On pose $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$ et soient $c'$ l'affixe de $C'$ et $a'$ l'affixe de $A'$

Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$

**0,5 pt** **3 -** Calculer $\dfrac{a'-c'}{a-1}$ et en déduire que la droite $(AB')$ est une hauteur du triangle $A'B'C'$

## Exercice 4 : (8.25 pts)

**1 -** Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2\ln^2(x)}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

**0,5 pt** **a)** Montrer que $f$ est continue à droite au point 0, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**0,5 pt** **b)** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite au point 0

(On pourra utiliser le résultat $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2(x) = 0$)

**0,5 pt** **c)** Montrer que $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = \dfrac{-x\ln(x)\left(1+\ln(x)\right)}{\left(1+x^2\ln^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}$

**0,5 pt** **d)** Donner le tableau des variations de la fonction $f$

**2 -** Soit $F$ la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
et soit $(C_F)$ la courbe représentative de $F$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$

**0,25 pt** **a)** Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur l'intervalle $[e;+\infty[$

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $\left(\forall t\geq e\right)$ ; $t\ln(t)\leq\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}\leq\sqrt{2}t\ln(t)$

**0,75 pt** **c)** Montrer que : $\left(\forall x\geq e\right)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\ln(x)\right)\leq\int_e^x\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t\leq\ln\Big(\ln(x)\Big)$

**0,5 pt** **d)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

**0,5 pt** **e)** Montrer que $(C_F)$ admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses.

**1 pt** **f)** Construire $(C_F)$ (on prend $F(1)\approx 0,5$ et $F\left(\dfrac{1}{e}\right)\approx 0,4$)

**3 -** Pour tout $x$ de $[0;+\infty[$ on pose $\varphi(x)=x-F(x)$

**0,75 pt** **a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ et étudier les variations de $\varphi$

**0,5 pt** **b)** Montrer que pour tout entier naturel $n$, l'équation $\varphi(x)=n$ admet une seule solution $\alpha_n$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$

**0,5 pt** **c)** Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ ; $\alpha_n\geq n$ puis calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

**0,5 pt** **4 - a)** Montrer que : $\left(\forall n\geq 1\right)$ ; $0\leq\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}\leq\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$
(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

**0,5 pt** **b)** Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$

## Exercice 5 : (1.75 pts)

Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose : $u_n=\left(\dfrac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ et $v_n=\ln(u_n)$

**0,25 pt** **1 -** Vérifier que : $\left(\forall n\geq 1\right)$ ; $v_n=n^2\Big(\ln\left(\arctan(n)\right)-\ln\left(\arctan(n+1)\right)\Big)$

**0,5 pt** **2 -** En utilisant le théorème des accroissements finies , montrer que :
$\left(\forall n\geq 1\right)\left(\exists c\in\,]n;n+1[\right)$ ; $v_n=\dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

**0,5 pt** **3 -** Montrer que : $\left(\forall n\geq 1\right)$ ; $\dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$

**0,5 pt** **4 -** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : RATTRAPAGE 2013**

## MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3.5 pts)

les parties A et B sont indépendantes

**partie A :**

Pour tout $x$ et $y$ de l'intervalle $G = ]1;2[$ on pose : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

0,5 pt **1 -** Montrons que $*$ est une loi de composition interne dans G :

Soit $(x,y) \in G^2$ , montrons que : $x * y \in G$

$$\begin{aligned}
x * y &= \frac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} \\
&= \frac{(x-1)(y-1)+(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} \\
&= \frac{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} + \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} \\
&= 1 + \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}
\end{aligned}$$

On a : $x \in ]1;2[$ et $y \in ]1;2[$ c-à-d : $1 < x < 2$ et $1 < y < 2$ , alors :

$$\begin{cases} (x-1) > 0 \text{ et } (y-1) > 0 \\ (x-2) < 0 \text{ et } (y-2) < 0 \end{cases} \quad \text{d'où : } \begin{cases} (x-1)(y-1) > 0 \\ (x-2)(y-2) > 0 \end{cases}$$

On a : $(x-2)(y-2) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)+(x-2)(y-2) > (x-1)(y-1)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 0 < \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} < 1 \\
&\Leftrightarrow 1 < 1 + \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} < 2
\end{aligned}$$

D'où : $x * y \in G$. Alors : $*$ est une loi de composition interne dans G

**2 -** On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application $f$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $G$ définie par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

**0,75 pt** **a)** Montrons que $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$

- Montrons d'abord que $f$ est un homomorphisme :

  Il suffit de vérifier que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ f(x \times y) = f(x) * f(y)$$

Soit $x$ et $y$ deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$\begin{aligned}
f(x) * f(y) &= \frac{x+2}{x+1} * \frac{y+2}{y+1} \\
&= \frac{2\left(\dfrac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\dfrac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\dfrac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\dfrac{y+2}{y+1} - 2\right)}{\left(\dfrac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\dfrac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\dfrac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\dfrac{y+2}{y+1} - 2\right)} \\
&= \frac{2\dfrac{x+2-x-1}{x+1} \times \dfrac{y+2-y-1}{y+1} + \dfrac{x+2-2x-2}{x+1} \times \dfrac{y+2-2y-2}{y+1}}{\dfrac{x+2-x-1}{x+1} \times \dfrac{y+2-y-1}{y+1} + \dfrac{x+2-2x-2}{x+1} \times \dfrac{y+2-2y-2}{y+1}} \\
&= \frac{\dfrac{2}{x+1} \times \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{-x}{x+1} \times \dfrac{-y}{y+1}}{\dfrac{1}{x+1} \times \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{-x}{x+1} \times \dfrac{-y}{y+1}} \\
&= \frac{\dfrac{2}{(x+1)(y+1)} + \dfrac{x \times y}{(x+1)(y+1)}}{\dfrac{1}{(x+1)(y+1)} + \dfrac{x \times y}{(x+1)(y+1)}} \\
&= \frac{\dfrac{2 + x \times y}{(x+1)(y+1)}}{\dfrac{1 + x \times y}{(x+1)(y+1)}} = \frac{x \times y + 2}{x \times y + 1} = f(x \times y)
\end{aligned}$$

  Donc $f$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$

- Montrons que $f$ est une bijection de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$

  Donc il faut vérifier que : $(\forall y \in G)$ , $(\exists! x \in \mathbb{R}_+^*)$ : $f(x) = y$

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = y \\
&\Leftrightarrow y(x+1) = x+2 \\
&\Leftrightarrow xy + y = x + 2 \\
&\Leftrightarrow x(y-1) = 2 - y \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2-y}{y-1}
\end{aligned}$$

Or $y \in G$ c-à-d $1 < y < 2$ , donc $0 < y - 1 < 1$ et $0 < 2 - y < 1$ alors $\dfrac{2-y}{y-1} > 0$ par suite $x \in \mathbb{R}_+^*$.

supposons qu'il existe un $y' \in G$ tel que $x = \dfrac{2-y'}{y'-1}$

on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{2-y}{y-1} = \frac{2-y'}{y'-1} &\Leftrightarrow y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y \\ &\Leftrightarrow y - y' - 2(y-y') = 0 \\ &\Leftrightarrow y - y' = 0 \Leftrightarrow y = y'\end{aligned}$$

D'où l'unicité de $x$. Donc $f$ est une bijection de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$

Finalement $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$

**0,5 pt** **b)** Déduisons que $(G, *)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre.

On a $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$, donc $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et $(G, *)$ ont la même structure.

Comme $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif alors $(G, *)$ aussi un groupe commutatif , de plus l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est $e = 1$ alors $e' = f(1) = \dfrac{3}{2}$ est l'élément neutre de $(G, *)$.

finalement $(G, *)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $e' = \dfrac{3}{2}$

**partie B :**

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel, et on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**0,5 pt** **1 - a)** Vérifions que : $A^3 = O$ et en déduire que $A$ est un diviseur de zéro dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$.

- Montrons que : $A^3 = O$

  On a :

$$\begin{aligned}A^3 = A \times A \times A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O\end{aligned}$$

- Déduisons que $A$ est un diviseur de zéro dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$

  On a $A$ , $A^2 \in M_3(\mathbb{R})$ et $A \times A^2 = O$ avec $A \neq O$ et $A^2 \neq O$,

  Donc $A$ est un diviseur de zéro dans $M_3(\mathbb{R})$

Par suite : $A^3 = O$ et $A$ est un diviseur de zéro dans $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$

**0.5 pt**

**b)** Vérifions que : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ . Puis déduisons que la matrice $A + I$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ que l'on déterminera.

- Vérifions que : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ :
  Calculons :

$$(A^2 - A + I)(A + I) = A^3 + \cancel{A^2} - \cancel{A^2} - \cancel{A} + \cancel{A} + I = A^3 + I = O + I = I$$

  D'où le résultat.

- Déduisons que la matrice $A + I$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ que l'on déterminera.
  Puisque $A$ et $I$ deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$, alors $(A^2 - A + I)$ est un élément de $M_3(\mathbb{R})$. On sait que : $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif d'unité $I$, donc la loi $\times$ est commutatif , c-à-d : $(A^2 - A + I) \times (A + I) = (A + I) \times (A^2 - A + I) = I$ Alors $(A + I)$ est inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ d'inverse $(A^2 - A + I)$.

Donc : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ et $(A^2 - A + I)$ l'inverse $(A + I)$ dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$

**0.75 pt**

**2 -** Pour tout $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a, b) = aI + bA$ et l'on considère l'ensemble :

$$E = \left\{M(a, b) \,/\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Montrons que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

⋆ Montrons que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel.

- On a $E \neq \emptyset$ car $O = M(0, 0) \in E$ et $E \subset M_3(\mathbb{R})$ de plus $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un e.v
- Soient $M(a, b), M(c, d) \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\alpha M(a, b) + \beta M(c, d) &= \alpha(aI + bA) + \beta(cI + dA) \\
&= (\alpha a + \beta c)I + (\alpha b + \beta d)A \\
&= M(\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d) \in E.
\end{aligned}$$

Alors $(E, +, .)$ est un sous espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$

Donc : $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel.

⋆ Déterminant une base de $(E, +, .)$.

On a : $\forall M(a, b) \in E; \quad M(a, b) = aI + bA$ donc $(A, I)$ est une famille génératrice.

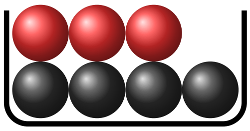
Et : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\alpha I + \beta A = 0 &\Longleftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta & 2\beta \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0
\end{aligned}$$

D'où $(I, A)$ est une base de $(E, +, .)$ et $dim(E) = card(I, A) = 2$.

## Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient 7 boules : 3 boules rouges, 4 boules noires (indiscernables au toucher )



**Partie A :**

On tire au hasard successivement et avec remise 4 boules de l'urne, et on considère la variable aléatoire $X$ égale au nombre de boules noires tirées.

On considère l'univers $\Omega$, On tire successivement et avec remise 4 boules, donc : $card(\Omega) = 7^4 = 2401$

1 pt

**1 -** Déterminant la loi de probabilité de la variable $X$.

Les valeurs prises par $X$ sont : $0, 1, 2, 3, 4$ , donc $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

- L'événement $(X = 0)$ se traduit par : "Aucune boule noires tirée" $(\bar{N}\bar{N}\bar{N}\bar{N})$

$$p(X = 0) = \frac{3^4}{7^4} = \frac{81}{2401}$$

- L'événement $(X = 1)$ se traduit par : "Obtenir une seule boule noires" $(N\bar{N}\bar{N}\bar{N})$

$$p(X = 1) = \frac{C_4^1 \times 4^1 \times 3^3}{7^4} = \frac{4 \times 4 \times 27}{2401} = \frac{432}{2401}$$

- L'événement $(X = 2)$ se traduit par : "Obtenir deux boules noires" $(NN\bar{N}\bar{N})$

$$p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times 4^2 \times 3^2}{7^4} = \frac{6 \times 16 \times 9}{2401} = \frac{864}{2401}$$

- L'événement $(X = 3)$ se traduit par : "Obtenir trois boules noires" $(NNN\bar{N})$

$$p(X = 3) = \frac{C_4^3 \times 4^3 \times 3^1}{7^4} = \frac{4 \times 64 \times 3}{2401} = \frac{768}{2401}$$

- L'événement $(X = 4)$ se traduit par : "Obtenir quatre boules noirs" $(NNNN)$

$$p(X = 4) = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$$

D'où la loi de probabilité da la variable aléatoire $X$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{81}{2401}$ | $\frac{432}{2401}$ | $\frac{864}{2401}$ | $\frac{768}{2401}$ | $\frac{256}{2401}$ |

**0.5 pt** **2 -** Calculons $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.

$$E(X)=\sum_{i=0}^{4} x_i.p(X=x_i)=0\times\frac{81}{2401}+1\times\frac{432}{2401}+2\times\frac{864}{2401}+3\times\frac{48}{2401}+4\times\frac{256}{2401}=\frac{5488}{2401}=\frac{16}{7}$$

Alors : $E(X)=\dfrac{16}{7}$

**Partie B :**

On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

**Étape 1 :** On tire une boule de l'urne, on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

**Étape 2 :** On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1.

**Étape 3 :** On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules après l'étape 2.

On considère les évènements suivants : $N$ «la boule tirée à l'étape 1 est noire»

$R$ «la boule tirée à l'étape 1 est rouge»

$E$ «toutes les boules tirées à l'étape 3 sont noires»

**0.5 pt** **1 -** Montrons que : $p(E\cap N)=\dfrac{12}{55}$

On sait que : $p(E\cap N)=p(N)\times p_N(E)$, avec $p_N(E)$ c'est la probabilité de tirée 3 boules noires à l'étape 3 sachant qu'on a tirée une boule noire à l'étape 1.

Calculons :

$$p(N)=\frac{C_4^1}{C_7^1}=\frac{4}{7}$$

$$p_N(E)=\frac{A_9^3}{A_{12}^3}=\frac{504}{1320}=\frac{21}{55}$$

Alors : $p(E\cap N)=p(N)\times p_N(E)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{21}{55}=\dfrac{12}{55}$

D'où : $p(E\cap N)=\dfrac{12}{55}$

**0.5 pt** **2 -** Calculons $p(E)$

$$\begin{aligned} p(E)=p(E\cap N)+p(E\cap R)&=p(N)\times p_N(E)+p(R)\times p_R(E)\\ &=\frac{12}{55}+\frac{C_3^1}{C_7^1}\times\frac{A_4^3}{A_{12}^3}\\ &=\frac{12}{55}+\frac{3}{7}\times\frac{24}{1320}\\ &=\frac{12}{55}+\frac{3}{385}=\frac{87}{385}\end{aligned}$$

Donc : $p(E)=\dfrac{87}{385}$

**0.5 pt** **3 -** Calculons la probabilité de l'événement $R$ sachant que $E$ est réalisé.

$$p_E(R) = \frac{p(R\cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E)\times p(R)}{p(E)} = \frac{\dfrac{A_4^3}{A_{12}^3}\times\dfrac{C_3^1}{C_7^1}}{\dfrac{87}{385}} = \frac{\dfrac{24}{1320}\times\dfrac{3}{7}}{\dfrac{87}{385}} = \frac{1}{29}$$

$$\boxed{\text{Finalement la probabilité de l'événement } R \text{ sachant que } E \text{ est réalisé est : } p_E(R) = \frac{1}{29}}$$

## Exercice 3 : (3.5 pts)

**partie A :**

Soit $a$ un nombre complexe différent de 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ :\ 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

0.5 pt **1 -** Montrons que : $z_1 = \dfrac{(a-1)}{2}(1+\mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{(a-1)}{2}(1-\mathrm{i})$ sont les deux solutions de l'équation $(E)$ On a :

$$\begin{aligned}
2z_1^2 - 2(a-1)z_1 + (a-1)^2 &= 2\left(\frac{(a-1)}{2}(1+\mathrm{i})\right)^2 - 2(a-1)\left(\frac{(a-1)}{2}(1+\mathrm{i})\right) + (a-1)^2\\
&= \cancel{2}\frac{(a-1)^2(1+i)^2}{\cancel{4}} - (a-1)^2(1+i) + (a-1)^2\\
&= \cancel{2}\mathrm{i}\frac{(a-1)^2}{\cancel{2}} - (a-1)^2(1+i) + (a-1)^2\\
&= \mathrm{i}(a-1)^2 - (a-1)^2(1+i) + (a-1)^2\\
&= (a-1)^2\Big(i-(1+i)+1\Big) = (a-1)^2\Big(i-1-i+1\Big)\\
&= (a-1)^2\Big(i-1-i+1\Big) = (a-1)^2\times 0 = 0
\end{aligned}$$

Donc $z_1$ est une solution de $(E)$.

De même :

$$\begin{aligned}
2z_2^2-2(a-1)z_2+(a-1)^2 &= 2\left(\frac{(a-1)}{2}(1-\mathrm{i})\right)^2-2(a-1)\left(\frac{(a-1)}{2}(1-\mathrm{i})\right)+(a-1)^2\\
&= \cancel{2}\frac{(a-1)^2(1-i)^2}{\cancel{2}}-(a-1)^2(1-i)+(a-1)^2\\
&= -\cancel{2}\mathrm{i}\frac{(a-1)^2}{\cancel{2}}-(a-1)^2(1-i)+(a-1)^2\\
&= -\mathrm{i}(a-1)^2-(a-1)^2(1-i)+(a-1)^2\\
&= (a-1)^2\Big(-i-(1-i)+1\Big)=(a-1)^2\Big(-i-1+i+1\Big)\\
&= (a-1)^2\times 0=0
\end{aligned}$$

Donc $z_2$ est une solution de $(E)$.

Et puisque $(E)$ est une équation du $2^{\text{ème}}$ degré, donc elle admet deux solutions .

$\boxed{\text{Finalement } z_1=\dfrac{(a-1)}{2}(1+\mathrm{i}) \text{ et } z_2=\dfrac{(a-1)}{2}(1-\mathrm{i}) \text{ sont les deux solutions de l'équation } (E)}$

**2 -** On prend : $a=\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$

**0.5 pt** **a)** Montrons que : $a-1=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

On a : $a=\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$ , donc :

$$\begin{aligned}
a-1=\mathrm{e}^{i\theta}-1=\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{i\pi} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta+\pi}{2})}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\theta+\pi}{2})}+\mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\theta+\pi}{2})}\right)\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta+\pi}{2})}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}\right)\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta+\pi}{2})}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}\right)\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta+\pi}{2})}\times 2cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 2sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\theta+\pi}{2})}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } a-1=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}}$

**1 pt** **b)** Déduisons la forme trigonométrique de $z_1$ et $z_2$

On a : $1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

et $\quad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{4}}$

$$\begin{aligned}
\text{Donc : } z_1=\frac{(a-1)}{2}(1+\mathrm{i}) &= \frac{1}{\cancel{2}}.\cancel{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}.\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\\
&= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)} \qquad \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0 \text{ car } 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{De même : } z_2=\frac{(a-1)}{2}(1-\mathrm{i}) &= \frac{1}{\cancel{2}}.\cancel{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}.\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\\
&= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\
&= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } z_1=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\boxed{\text{et } z_2=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

**partie B :**

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$

**On admet que** $Re(a)<0$, et on considère les points $A(a)$, $B(-\mathrm{i})$, $C(i)$ et $B'(1)$

**1 -** Déterminons en fonction de $a$, les affixes des points $J$ et $K$ milieux respectifs de $[AC]$ et

0.5 pt $[AB]$.

$J$ est le milieu de $[AC]$, donc : $\quad z_J=\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{a+i}{2}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{i}{2}$

$K$ est le milieu de $[AB]$, donc : $\quad z_K=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{a-i}{2}=\dfrac{a}{2}-\dfrac{i}{2}$

$$\boxed{\text{Alors : } z_J=\frac{a}{2}+\frac{i}{2} \text{ et } z_K=\frac{a}{2}-\frac{i}{2}}$$

0.5 pt **2 -** Soit $r_1$ la rotation de centre $J$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et $r_2$ la rotation de centre $K$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On pose $C'=r_1(C)$ et $A'=r_2(A)$ et soient $c'$ l'affixe de $C'$ et $a'$ l'affixe de $A'$

Montrons que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$

$$\text{On a : } r_2(A) = A' \iff z_{A'} - z_K = (z_A - z_K)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff z_{A'} = (z_A - z_K)e^{i\frac{\pi}{2}} + z_K$$

$$\iff a' = \left(a - \frac{a}{2} + \frac{i}{2}\right)i + \frac{a}{2} - \frac{i}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{i}{2}\right)i + \frac{a}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\iff a' = \frac{ia - 1 + a - i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

$$\text{De même : } r_1(C) = C' \iff z_{C'} - z_J = (z_C - z_J)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff z_{C'} = (z_C - z_J)e^{i\frac{\pi}{2}} + z_J$$

$$\iff c' = \left(i - \frac{a}{2} - \frac{i}{2}\right)i + \frac{a}{2} + \frac{i}{2} = \left(\frac{i}{2} - \frac{a}{2}\right)i + \frac{a}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\iff c' = \frac{-1 - ia + a + i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

D'où : $a' = z_1$ et $c' = z_2$

0.5 pt

**3 -** Calculons $\dfrac{a' - c'}{a - 1}$, puis en déduire que la droite $(AB')$ est une hauteur du triangle $A'B'C'$

$$\frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{(a-1)(1+i) - (a-1)(1-i)}{2(a-1)} = \frac{1 + i - 1 + i}{2} = i$$

Donc $\dfrac{a' - c'}{a - 1} = i$ alors $arg\left(\dfrac{a' - c'}{a - 1}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ d'où $\left(\overline{\overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{C'A'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Il s'ensuit que : $(AB') \perp (A'C')$.

Finalement : la droite $(AB')$ est une hauteur du triangle $A'B'C'$

## Exercice 4 : (8.25 pts)

**1 -** Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2 \ln^2(x)}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

0,5 pt

**a)** Montrons que $f$ est continue à droite au point 0, puis calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

- Montrons que $f$ est continue à droite au point 0.

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln(x))^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1 \qquad \left(\text{car : } \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0\right)$

donc : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2\ln^2(x)}} = 0$

$\left(\text{car : } \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln^2 x = +\infty\right)$ $\boxed{\text{Alors } f \text{ est continue à droite au point } 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ .}}$

0.5 pt **b)** Étudions la dérivabilité de $f$ à droite au point 0 :(En utilisant $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2(x) = 0$)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln(x))^2}} - 1}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1-\sqrt{1+(x\ln(x))^2}}{x\sqrt{1+(x\ln(x))^2}}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-(x\ln x)^2}{x\sqrt{1+(x\ln(x))^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln(x))^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-x\ln^2 x}{\sqrt{1+(x\ln(x))^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln(x))^2}\right)}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1+0^2}(1+\sqrt{1+0^2})} = 0 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ dérivable à droite au point } 0 \text{ et } f'_d(0) = 0}$

0,5 pt **c)** Montrons que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\left(\forall x > 0\right)$ ; $f'(x) = \dfrac{-x\ln(x)\left(1+\ln(x)\right)}{\left(1+x^2\ln^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}$

On a : $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0;+\infty[$ . (fonction polynôme)

ainsi : $x \mapsto \ln^2 x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc : $x \mapsto (x\ln x)^2$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

et puisque $1+(x\ln x)^2>0$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$, $\boxed{\text{alors } f \text{ est dérivable sur } ]0;+\infty[.}$

$$\begin{aligned}
\Big(\forall x>0\Big)\ ;\ f'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)' \\
&= \left(\Big(1+(x\ln x)^2\Big)^{\frac{-1}{2}}\right)' \\
&= \frac{-1}{2}\Big(1+(x\ln x)^2\Big)^{\frac{-1}{2}-1}\Big(1+(x\ln x)^2\Big)' \\
&= \frac{-1}{2}\Big(1+(x\ln x)^2\Big)^{\frac{-3}{2}}\Big(2x\ln x\Big)\Big(x\ln x\Big)' \\
&= \frac{-1}{\cancel{2}}\Big(1+(x\ln x)^2\Big)^{\frac{-3}{2}}\Big(\cancel{2}x\ln x\Big)\Big(\ln x+1\Big) \\
&= \frac{-x\ln x\Big(1+\ln x\Big)}{\Big(1+(x\ln x)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où}\quad \forall x\in\,]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{-x\ln x\Big(1+\ln x\Big)}{\Big(1+(x\ln x)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}}$$

**0,5 pt**

**d)** Donnons le tableau de variations de la fonction $f$

Étudions le signe de : $f'(x)=\dfrac{-x\ln x\Big(1+\ln x\Big)}{\Big(1+(x\ln x)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$ sur $]0;+\infty[$

D'abord on remarque que : $\Big(\forall x>0\Big)\ ;\ \Big(1+(x\ln x)^2\Big)^{\frac{3}{2}}>0$ , donc le signe de $f'$ est celui de $-\ln x\Big(1+\ln x\Big)$.

puisque $\ln x$ s'annule en 1 et $\Big(1+\ln x\Big)$ s'annule en $\dfrac{1}{e}$, on peut établir un tableau :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\ln x$ | ‖ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $1+\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

D'où le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $f(e^{-1})$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

Avec : $f(e^{-1}) = \dfrac{e}{\sqrt{e^2+1}}$

**2 -** Soit $F$ la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

et soit $(C_F)$ la courbe représentative de $F$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

**0.25 pt** **a)** Déterminons une primitive de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur l'intervalle $[e;+\infty[$

On a : $x \mapsto x\ln x$ continue sur $]0;+\infty[$ , en particulier sur $[e;+\infty[$ ,

et $x\ln x \neq 0$ sur $[e;+\infty[$, donc $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur l'intervalle $[e;+\infty[$ ,

alors admet une primitive $\varphi$ sur $[e;+\infty[$.

Or : $\dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{(\ln x)'}{\ln x} = \Big(\ln|\ln(x)| + c\Big)'$ / $c \in \mathbb{R}$

on prend $c = 0$ , et comme $x \in [e;+\infty[$ , $\ln x \geqslant 1$

Donc : $\varphi(x) = \ln(\ln(x))$ est une primitive de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur l'intervalle $[e;+\infty[$

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $\Big(\forall t \geq e\Big)$ ; $t\ln(t) \leqslant \sqrt{1+t^2\ln^2(t)} \leqslant \sqrt{2}t\ln(t)$

$(\forall t \geqslant e)$; $\quad t\ln(t) \geqslant e \times 1 \geqslant 1 \Leftrightarrow (t\ln(t))^2 \geqslant 1 \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow 0 + (t\ln(t))^2 \leqslant 1 + (t\ln(t))^2 \leqslant (t\ln(t))^2 + (t\ln(t))^2$$

$$\Leftrightarrow (t\ln(t))^2 \leqslant 1 + (t\ln(t))^2 \leqslant 2(t\ln(t))^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(t\ln(t))^2} \leqslant \sqrt{1+(t\ln(t))^2} \leqslant \sqrt{2(t\ln(t))^2}$$

$$\Leftrightarrow t\ln(t) \leqslant 1 + (t\ln(t))^2 \leqslant \sqrt{2}t\ln(t) \qquad \Big(\text{car : } t\ln(t) > 0\Big)$$

Donc : $\Big(\forall t \geqslant e\Big)$ ; $t\ln(t) \leqslant \sqrt{1+t^2\ln^2(t)} \leqslant \sqrt{2}t\ln(t)$

**0.75 pt** **c)** Montrons que : $\Big(\forall x \geqslant e\Big)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln(x)) \leqslant \displaystyle\int_e^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \ln\Big(\ln(x)\Big)$

D'après la question précédente : $\Big(\forall t \geqslant e\Big)$ ; $t\ln(t) \leqslant \sqrt{1+t^2\ln^2(t)} \leqslant \sqrt{2}t\ln(t)$

donc : $(\forall t \geqslant e)$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}t\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}} \leqslant \dfrac{1}{t\ln(t)}$ $(\star)$ $\qquad \Big(\text{car : } t\ln(t) > 0\Big)$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ et $t \mapsto f(t)$ sont continues sur $[e;+\infty[$ et comme $x \geqslant e$ alors :

$$\begin{aligned}
(\star) &\Rightarrow \int_e^x \frac{1}{\sqrt{2}t\ln(t)}\mathrm{d}t \leqslant \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \int_e^x \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\varphi(t)\Big]_e^x \leqslant \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \Big[\varphi(t)\Big]_e^x \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\ln(\ln(t))\Big]_e^x \leqslant \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \Big[\ln(\ln(t))\Big]_e^x \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\ln(\ln(x))-\ln(\ln(e))\Big] \leqslant \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \Big[\ln(\ln(x))-\ln(\ln(e))\Big] \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln(x)) \leqslant \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \ln(\ln(x))
\end{aligned}$$

D'où : $\Big(\forall x \geqslant e\Big)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\big(\ln(x)\big) \leqslant \displaystyle\int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \ln\Big(\ln(x)\Big)$

**0.5 pt** **d)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$

- D'après la question précédente : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln(x)) \leqslant \displaystyle\int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t \leqslant \ln(\ln(x))$

  donc : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln(x)) \leqslant \displaystyle\int_e^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(\ln(x))$

  et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$

Alors d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_e^x f(t)\mathrm{d}t = +\infty$

Or : $F(x) = \displaystyle\int_0^e f(t)\mathrm{d}t + \int_e^x f(t)\mathrm{d}t$ avec $\displaystyle\int_0^e f(t)\mathrm{d}t = c^{te} \in \mathbb{R}$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

- De même :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln(x)) \leqslant \int_e^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(\ln(x))$$

pour $x$ strictement positif , en multipliant chaque membre par le nombre $\dfrac{1}{x}$ qui est aussi strictement positif :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\ln(\ln(x))}{x} \leqslant \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(\ln(x))}{x}$$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \times \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \times 0 = 0$

Alors d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_e^x f(t)\mathrm{d}t = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\displaystyle\int_0^e f(t)\mathrm{d}t+\int_e^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^e f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{c^{te}}{x}=0$

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$$

**0.5 pt** **e)** Montrons que $(C_F)$ admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses.

On a $F$ est la fonction primitive de $f$ sur $[0;+\infty[$ , autrement dit :

$$\Big(\forall x\in[0;+\infty[\Big)\ ,\ F'(x)=f(x)$$

et comme $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ alors $F'$ aussi dérivable sur $]0;+\infty[$

donc : $\Big(\forall x\in[0;+\infty[\Big)$ , $F''(x)=f'(x)$ , alors $F''$ s'annule en $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=1$ en changeant de signe . $\Big($voir le tableau de signe de $f'\Big)$

$$\boxed{\text{Finalement } (C_F) \text{ admet deux points d'inflexions d'abscisses respectives } x=\frac{1}{e} \text{ et } x=1}$$

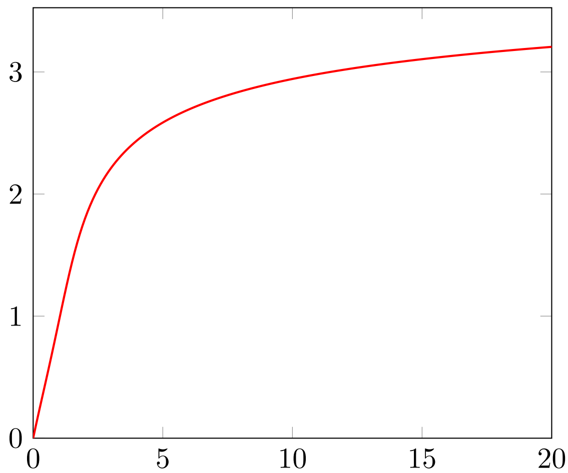
**1 pt** **f)** Construisons $(C_F)$ (on prend $F(1)\approx 0,5$ et $F\left(\dfrac{1}{e}\right)\approx 0,4$)

Dressons le tableau de variations de $F$ :

D'après le tableau de variations de $f$ : $\Big(\forall x\in[0;+\infty[\Big)$ , $F'(x)=f(x)\geqslant 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $+$ | |
| $F$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$ donc $(C_F)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$. D'où $(C_F)$ :




**3 -** Pour tout $x$ de $[0;+\infty[$ on pose $\varphi(x)=x-F(x)$

**0.75 pt** **a)** Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ puis étudions les variations de $\varphi$

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ : En utilisant : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

  On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{F(x)}{x}\right)=+\infty$

  $\boxed{\text{D'où : } \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$

- Étudions les variations de $\varphi$

  On a : $\varphi$ dérivable sur $[0;+\infty[$ car : $F$ est dérivable sur $[0;+\infty[$

  et $\Big(\forall x\in[0;+\infty[\Big)$, $\varphi'(x)=1-F'(x)=1-f(x)\geqslant 0$, car $f(x)\leqslant 1$ sur $[0;+\infty[$ (d'après le tableau de variations de $f$).

  ainsi : $\varphi'(x)=0\iff f(x)=1\iff x=0$ ou $x=1$ (d'après la question $1-d$)

  $\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est croissante sur } [0;+\infty[}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que pour tout entier naturel $n$, l'équation $\varphi(x)=n$ admet une seule solution $\alpha_n$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$ :

On a : $\varphi$ continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ , donc $\varphi$ est une bijection de $[0;+\infty[$ vers $\varphi\Big([0;+\infty[\Big)$ où : $\varphi\Big([0;+\infty[\Big)=\Big[\varphi(0);\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\Big[=[0;+\infty[$

d'après la définition de la bijection : $\Big(\forall y\in[0;+\infty[\Big)$ , $\Big(\exists! x\in[0;+\infty[\Big)$ ; $\varphi(x)=y$.

pour $y=n\in\mathbb{N}\subset[0;+\infty[$ , $\Big(\exists!\alpha_n\in[0;+\infty[\Big)$ ; $\varphi(\alpha_n)=n$.

$\boxed{\text{Autrement dit : } \forall n\in\mathbb{N} \text{ l'équation } \varphi(x)=n \text{ admet une seule solution } \alpha_n \text{ dans } [0;+\infty[}$

$\Big($ On peut considérer la fonction $f_n(x)=\varphi(x)-n$ et montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une seule solution dans $[0;+\infty[\Big)$

**0.5 pt** **c)** Montrons que : $\Big(\forall n\in\mathbb{N}\Big)$ ; $\alpha_n\geq n$ puis calculons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

- On a d'après la question précédente : $\Big(\forall n\in\mathbb{N}\Big)$ , $\alpha_n\geqslant 0$ et puisque $F$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc : $F(\alpha_n)\geqslant F(0)$ , il s'en suit :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ F(\alpha_n)\geqslant 0 \qquad (1)$$

Et on sait que $\forall x\in[0;+\infty[\,,\varphi(x)=x-F(x)$ donc $\varphi(\alpha_n)=\alpha_n-F(\alpha_n)$ car $\alpha_n\geqslant 0$

$$\text{d'où : } \quad F(\alpha_n)=\alpha_n-\varphi(\alpha_n) \qquad (2)$$

de (1) et (2) on trouve $\alpha_n-\varphi(\alpha_n)\geqslant 0$ c-à-d $\alpha_n\geqslant\varphi(\alpha_n)$

$$\boxed{\text{Finalement : } \left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \; ; \; \alpha_n \geq n}$$

- On a : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \; ; \; \alpha_n \geq n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\boxed{\text{D'où } \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty}$

**0.5 pt** **4 - a)** Montrons que : $\left(\forall n \geqslant 1\right) \; ; \; 0 \leqslant \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{F(n)}{n} + f(n)$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

$\forall n \geqslant 1$ , $F$ est continue sur $\left[n; \alpha_n\right]$ et dérivable sur $\left]n; \alpha_n\right[$ donc d'après le théorème des accroissements finis $\exists c \in ]n; \alpha_n[$ tel que :

$$F(\alpha_n) - F(n) = F'(c)(\alpha_n - n) \Rightarrow F(\alpha_n) = f(c)(\alpha_n - n) + F(n) \Rightarrow \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)\left(1 - \frac{n}{\alpha_n}\right) + \frac{F(n)}{\alpha_n}$$

Or : $\alpha_n \geqslant n \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{F(n)}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{F(n)}{n}$ (1) $\left(\text{car : } F(n) > 0 \text{ sur } ]n; \alpha_n[\right)$

ainsi : $c > n \Rightarrow f(c) < f(n)$ (2) $\left(\text{car : } f \text{ est décroissante sur } [1; +\infty[\right)$

de plus : $\dfrac{n}{\alpha_n} > 0 \Rightarrow -\dfrac{n}{\alpha_n} < 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{n}{\alpha_n} < 1$ (3)

De (1) , (2) et (3) on en déduit que : $\boxed{\left(\forall n \geq 1\right) \; ; \; 0 \leqslant \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{F(n)}{n} + f(n)}$

**0.5 pt** **b)** Calculons : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$

On a : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n - \varphi(\alpha_n)}{\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \dfrac{n}{\alpha_n}$

Or : $\left(\forall n \geqslant 1\right) \; ; \; 0 \leqslant \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{F(n)}{n} + f(n) \Rightarrow 0 \leqslant 1 - \dfrac{n}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{F(n)}{n} + f(n)$

et puisque : $\left(\forall n \geqslant 1\right)$ ; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{F(n)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{n}{\alpha_n} = 0$ $\boxed{\text{D'où } \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 1}$

## Exercice 5 : (1.75 pts)

Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose : $u_n = \left(\dfrac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ et $v_n = \ln(u_n)$

**0.25 pt** **1 -** Vérifions que : $\left(\forall n \geqslant 1\right)$ ; $v_n = n^2 \left( \ln\left(\arctan(n)\right) - \ln\left(\arctan(n+1)\right)\right)$

Soit $n$ un entier naturel non nul $n$ , on a :

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right) = n^2 \ln\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)$$

$$= n^2 \left( \ln\left(\arctan(n)\right) - \ln\left(\arctan(n+1)\right)\right)$$

Alors : $\left(\forall n \geqslant 1\right)$ ; $v_n = n^2\left(\ln\left(\arctan(n)\right) - \ln\left(\arctan(n+1)\right)\right)$

**0.5 pt**

**2 -** En utilisant le théorème des accroissements finies , montrons que :

$$\left(\forall n \geq 1\right)\left(\exists c \in \left]n; n+1\right[\right) ; \ v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

Considérons la fonction $f$ définie sur $[n;n+1]$ par : $f(x) = \ln(\arctan(x))$

On a : $x \mapsto \arctan(x)$ est continue et $\arctan(x) > 0$ sur $[n;n+1]$ et $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc $f$ est continue sur $[n;n+1]$ et dérivable sur $]n;n+1[$ .

d'après le théorème des accroissements finis : $\exists c \in ]n;n+1[$ tel que :

$$f(n+1) - f(n) = f'(c)(n+1-n) \Rightarrow \ln\left(\arctan(n+1)\right) - \ln\left(\arctan(n)\right) = \frac{\frac{1}{1+c^2}}{\arctan(c)}$$

$$\Rightarrow n^2\left(\ln\left(\arctan(n+1)\right) - \ln\left(\arctan(n)\right)\right) = \frac{n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

$$\Rightarrow n^2\left(\ln\left(\arctan(n)\right) - \ln\left(\arctan(n+1)\right)\right) = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

Par suite : $\left(\forall n \geq 1\right)\left(\exists c \in \left]n; n+1\right[\right)$ ; $v_n = \dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

**0.5 pt**

**3 -** Montrons que : $\left(\forall n \geq 1\right)$ ; $\dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \dfrac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$

D'après la question précédente $\left(\forall n \geq 1\right)\left(\exists c \in \left]n; n+1\right[\right)$ ; $v_n = \dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

donc :

$$n < c < n+1 \Rightarrow n^2 < c^2 < (1+n)^2$$

$$\Rightarrow 1+n^2 < 1+c^2 < 1+(1+n)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+(1+n)^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+n^2}$$

de façon analogue :

$$n < c < n+1 \Rightarrow \arctan(n) < \arctan(c) < \arctan(n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\arctan(n+1)} < \frac{1}{\arctan(c)} < \frac{1}{\arctan(n)}$$

d'où : $\dfrac{1}{\left(1+(1+n)^2\right)\arctan(n+1)} < \dfrac{1}{(1+c^2)\arctan(c)} < \dfrac{1}{(1+n^2)\arctan(n)}$

multipliant chaque membre par $-n^2$ , on trouve le résultat.

Finalement : $\left(\forall n \geq 1\right)$ ; $\dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \dfrac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$

**0.5 pt**

**4 -** Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a : $\left(\forall n \geq 1\right)$ ; $\dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \dfrac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} = \dfrac{-1}{\dfrac{1}{n^2}+1}.\dfrac{1}{\arctan(n)} = -1.\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{-2}{\pi}$

de même : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n^2}{(1+(1+n)^2)\arctan(n+1)} = \dfrac{-1}{\dfrac{1}{n^2}+(1+\dfrac{1}{n^2})}.\dfrac{1}{\arctan(n+1)} = \dfrac{-2}{\pi}$

donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{-2}{\pi}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^{\frac{-2}{\pi}}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{-2}{\pi}}$

R O Y A U M E  D U  M A R O C

# Baccalauréat Sciences Mathématiques

## Session : Normal juin 2014

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

— Exercice 1 : **Arithmétiques** ........ **3 points**
— Exercice 2 : **Structures algébriques** ........ **3.5 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** ........ **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** ........ **8 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** ........ **2 points**

## Exercice 1 : (3 pts)

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ , on pose : $a_n = \underbrace{333....3}_{\text{n fois}}1$ ( n fois le chiffre 3)

0,5 pt **1 -** Vérifier que les deux nombres $a_1$ et $a_2$ sont premiers.

0,5 pt **2 -** Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.

0,75 pt **3 -** Montrer que pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ : $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$ .

0,75 pt **4 -** Montrer que pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ : $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$ , puis en déduire que : 31 divise $a_{30k+1}$.

0,5 pt **5 -** Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ ;si $n \equiv 1\ [30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$ .

## Exercice 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et dunité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ .

0,75 pt **2 -** Calculer $J^2 = J \times J$ sachant que $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , puis en déduire que E n'est pas stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

**3 -** On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $*$ par :$A * B = A \times N \times B$ avec : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère l'application $\varphi$ de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui associe à chaque nombre complexe non nul $a+ib$ ( $a$ et $b$ étant deux nombres réels) la matrice $M(a,b)$

0,5 pt **a)** Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),*)$ .

0,25 pt **b)** On pose :$E^* = E - \{O\}$ . Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ .

0,5 pt **c)** Montrer que $(E^*,*)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **4 -** Montrer que :$(\forall (A,B,C) \in E^3)\ \ A*(B+C) = A*B + A*C$ .

0,5 pt **5 -** En déduire de ce qui précède que $(E,+,*)$est un corps commutatif.

## Exercice 3 : (3.5 pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
Soit $\theta$ un nombre réel tel que : $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

**1 -** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E)\quad z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$.

0,25 pt **a)** Vérifier que le discriminant de l'équation $(E)$ est : $\Delta = \left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$ .

**0,75 pt** **b)** Écrire sous forme trigonométrique les deux racines $z_1$ et $z_2$ de l'équation $(E)$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

**2 -** On considère les points $I$ , $J$ , $T_1$ , $T_2$ et $A$ d'affixes respectives $1$ , $-1$ , $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ , $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.

**0,5 pt** **a)** Montrer que les deux droites $(OA)$ et $(T_1T_2)$ sont perpendiculaires.

**0,25 pt** **b)** Soit $K$ le milieu du segment $[T_1T_2]$.Montrer que les points $O$ , $K$ et $A$ sont alignés.

**0,25 pt** **c)** En déduire que la droite $(OA)$ est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$ .

**3 -** Soit $r$ la rotation de centre $T_1$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

**0,25 pt** **a)** Donner l'expression complexe de la rotation $r$.

**0,5 pt** **b)** Vérifier que l'affixe du point $B$ image du point $I$ par la rotation $r$ est : $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$.

**0,25 pt** **c)** Montrer que les deux droites $(AB)$ et $(IJ)$ sont perpendiculaires.

**0,25 pt** **4 -** Déterminer l'affixe du point $C$ image du point $A$ par la translation de vecteur $(-\vec{v})$.

**0,25 pt** **5 -** Montrer que $A$ est le milieu du segment $[BC]$.

## Exercice 4 : (8 pts)

I)- On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer que $f$ est continue sur $[0; +\infty[$ .

**0,25 pt** **b)** Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.

**0,25 pt** **2 - a)** Montrer que :$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

**0,25 pt** **b)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ .

**0,5 pt** **c)** Montrer que : $(\exists \alpha \in ]0, 1[)$ $f'(\alpha) = 0$.

**0,5 pt** **d)** En déduire que : $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

II) - On considère la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**0,5 pt** **1 - a)** Vérifier que : $(\forall t \in [1, +\infty[)$ $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$ .

**1 pt** **b)** Montrer que : $(\forall t \in [1, +\infty[)$ $F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ .

( On remarquera que :$F(x) = \int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}.\frac{\ln t}{t}dt$)

**1 pt** **c)** Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

**0,5 pt** **2 - a)** Montrer que $F$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ puis calculer $F'(x)$.

**0,25 pt** **b)** Étudier les variations de $F$ sur $[0; +\infty[$ .

III)-

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall t \in ]0,+\infty[)\ -t\ln t \leq \frac{1}{e}$

0,25 pt **b)** Montrer que :$(\forall t \in [0,+\infty[)\ f(t) \leq \frac{1}{e}$

0,25 pt **c)** En déduire que : $(\forall x \in ]0,+\infty[)\ F(x) < x$

**2 -** On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in ]0;1[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_{n+1} = F(u_n)$ .

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_n \in ]0,1[$

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## Exercice 5 : (2 pts)

On considère la fonction $g$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & ; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

0,5 pt **1 -** Montrer que $g$ est continue sur $[0;+\infty[$.

**2 -** Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0;+\infty[$ ; on pose : $L(x) = \int_0^x g(t)dt$

025 pt **a)** Montrer que $L$ est continue sur $[0;+\infty[$

025 pt **b)** Calculer $L(x)$ pour $x > 0$ .

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$ et en déduire la valeur de $L(0)$ .

**3 -** Pour tout entier naturel non nul $n \geq 1$ , on pose :$S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

0,5 pt Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques

## Session : Normal 2014

# Mathématiques

### Exercice 1 : (3 pts)

$n \in \mathbb{N}$, et $a = 333..31$.

0.5 pt **1 -** Montrons que $a_1$, et $a_2$ sont premier entre eux :

on $a_1 = 31$ et 31 est un nombre premier

et on a : $a_2 = 331$, et 331 ne divise pas les nombres premiers dont les carre sont inférieure ou égale a 331 ( c 'est a dir : 2-3-7-11-13 et 17).

donc 331 est un nombre premier.

D'où $\boxed{a_1, \text{ et } a_2 \text{ sont premier entre eux.}}$

0.5 pt **2 -** Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^\star) : 3a_n + 7 = 10^{n+1}$ :

On a :

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N}^\star) : a_n &= 1 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + ... + 3 \times 10^n \\ &= 1 + 3\left(10 + 10^2 + ... + 10^n\right) \\ &= 1 + 3\left(10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) \\ &= 1 + 3\left(\frac{10^{n+1} - 10}{9}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{10^{n+1} - 10}{3}\right) \\ &= \frac{10^{n+1} - 7}{3}\end{aligned}$$

d'où $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^\star) : 3a_n + 7 = 10^{n+1}.}$

0.75 pt **3 -** Montrons que : $(\forall k \in \mathbb{N}) : 10^{30k+2} \equiv 7\,[31]$ :

On a 31 est un nombre premier, et on sait que 10 ne divise pas 31 donc :

$31 \wedge 10 = 1$, et 31 est premier.

Donc d'après le théorème de Fermat on a :

$$\begin{aligned} 10^{31-1} \equiv 1\,[31] &\Rightarrow 10^{30} \equiv 1\,[31] \\ &\Rightarrow \left(10^{30}\right)^k \equiv 1^k\,[31] \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \\ &\Rightarrow 10^{30k} \equiv 1\,[31] \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \\ &\Longrightarrow 10^{30k+2} \equiv 100\,[31] \quad (\forall k \in \mathbb{N})\,(1) \end{aligned}$$

d'une autre part on a $100 \equiv 7\,[31]$ (2)

**0.75 pt** de (1) et (2) on déduit que : $\boxed{(\forall k \in \mathbb{N})\, 10^{30k+2} \equiv 7\,[31]\,.}$

**4 -** Montrons que $(\forall k \in \mathbb{N}) : 3a_{30k+1} \equiv 0\,[31]$, puis on déduire que 31 divise $a_{30k+1}$

On a $\forall k \in \mathbb{N} : 30k+1 \in \mathbb{N}^\star$

Donc d'après la question 2) on a :$3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+2}$

et d'après la question 3) on a : $10^{30k+2} \equiv 7\,[31]$ donc : $3a_{30k+1} + 7 \equiv 7\,[31]$

c' est a dire $3a_{30k+1} \equiv [31]$

et puisque 31 divise $3a_{30k+1}$, et $31 \wedge 3 = 1$ d'après le théorème de Gauss on a : 31 divise 31 divise $a_{30k+1}$

**0.5 pt** d'où $(\forall k \in \mathbb{N}) : 3a_{30k+1} \equiv 0\,[31]$, puis on déduire que 31 divise $a_{30k+1}$. D'où $\boxed{31 \text{ divise } a_{30k+1}}$

**5 -** Montrons que l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ :

Supposons que $\exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a_n x + 31y = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n \equiv 1\,[30]$, alors $(\exists k \in \mathbb{Z})$ tel que :$n = 30k+1$

On sait que 31 divise $a_{30k+1}$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$

Alors 31 divise $a_n$ car $n = 30k+1$ c 'est a dire $(\exists k' \in \mathbb{Z})$ tel que :$a_n = 31k'$

on remplaçant $a^n$ par $31k'$ dans l'équation $a_n x + 31y = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} 31k'x + 31y = 1 &\Leftrightarrow 31\,(k'x+y) = 1 \\ &\Rightarrow (x - x_\Omega) 31 divise 1 car\,(k'x+y)\,in\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \text{Absurd} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\text{si } n \equiv 1\,[30] \text{ alors l'équation } a_n x + 31y = 1 \text{ n'admet pas des solutions dans } \mathbb{Z}^2.}$

## Exercice 2 : (3.5 pts)

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2; M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \qquad E = \left\{M(a,b)/(a;b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

**0.5 pt**

**1 -** Montrons que $E$ est un sous groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}, +)$ :

On a :$\cdot I = M(1,0) \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$

$$(\forall (M(a,b),M(c,d)) \in E^2)\,; M(a,b)-M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-c & a-b-c+d \\ b-d & a+b-c-d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-c & (a-c)-(b-d) \\ b-d & (a-c)+(b-d) \end{pmatrix}$$
$$= M(a-c,b-d) \in E$$

D'où $\boxed{E \text{ est un sous groupe de } (M_2(\mathbb{R},+)}$

**0.75 pt**

**2 -** On a :$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et on a : $1+0 \neq 2$ Donc :$J = M(1,0) \in E$ et $J^2 \notin E$

D'où $\boxed{E \text{ est une partie non stable de } (M_2(\mathbb{R},\times)}$

**0.5 pt**

**3 -** a On a :

$$\left(\forall\, ((a,b)\,,(c,d)) \in (\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})^2\right); \varphi((a+bi)\times(c+di)) = \varphi(ac-bd+i(ad+bc))$$
$$= M(ac-bd, ad+bc)$$

et on a :

$$\varphi((a+bi) * \varphi((c+di) = M(a,b) * M(c,d)$$
$$= \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ac-bd & ac-ad-bc-bd \\ ad+bc & bc-bd+ac+ad \end{pmatrix}$$
$$= M(ac-bd, ad+bc)$$

Donc : $(\forall((a,b),(c,d)) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})\,;\varphi((a+bi)\times(c+di)) = \varphi(a+bi) * \varphi(c+di)$

0.25 pt d'où $\boxed{\varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{C}^\star,\times) \text{ vers } (M_2(\mathbb{R}),*)}$

b $M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0) \Leftrightarrow a+bi \in \mathbb{C}^\star \Leftrightarrow \varphi(a+bi) \in \varphi(\mathbb{C}^\star) \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^\star)$

Donc : $M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^\star)$

0.5 pt D 'ou $\boxed{\varphi(\mathbb{C}^\star) = E^\star}$

c On a : $(\mathbb{C}^\star,\times)$ est un groupe commutatif, et $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^\star,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),*)$

Donc $(\varphi(\mathbb{C}^\star),\star)$ est un groupe commutatif, et on a : $\varphi(\mathbb{C}^\star) = E^\star$.

0.5 pt d'où $\boxed{(E^\star,\star) \text{ est un groupe commutative}}$

**4 -** On a : $(\forall\,(A,B,C) \in E^3)\,, A\star(B+C) = A\times N\times(B+C) = A\times N\times B + A\times N\times C = A\star B + A\star C$.

0.5 pt D'où $(\forall\,(A,B,C) \in E^3)\,, A\star(B+C) = A\star B + A\star C$

**5 -** On a d'après la question 1) $(E,+)$ est un groupe d'unité 0

et d'après la question 3.c) on a $(E,\star)$ est un groupe commutatif

d'après la question 4)la loi est distributive sur la loi $+$

Donc $\boxed{(E,+,\star) \text{ est un corps commutatif}}$

## Exercice 3 : (3.5 pts)

0.25 pt **1 -** $(E): z^2 - \sqrt{2}ie^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

On a :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^2 - 4e^{2i\theta}\\ &= 2e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta}\\ &= -2e^{2i\theta}\\ &= \left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\Delta = \left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2.}$

0.75 pt b Puisque $\Delta \neq 0$ l'équation $(E)$ admet deux solutions $z_1$, et $z_2$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}-\sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = [1,-\frac{\pi}{4}]\times[1,\theta] = [1,\theta-\frac{\pi}{4}]$ :

Puisque on a : $z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}+\sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = [1,\frac{\pi}{4}]\times[1,\theta] = [1,\theta+\frac{\pi}{4}]$,

Donc : $\boxed{z_1 = [1,\frac{\pi}{4}-\theta]\,,\quad z_2 = [1,\frac{\pi}{4}+\theta]\ .}$

0.5 pt **2 -** a On a : $\overrightarrow{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{T_1T_2}\right)} \equiv \text{Arg}\left(\frac{\text{aff}(\overrightarrow{T_1T_2})}{\text{aff}(\overrightarrow{OA})}\right) \equiv (2\pi)$

et $\frac{e^{(\theta-\frac{\pi}{4})}-e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{-2i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = -i = [1,-\frac{\pi}{2}]\,,$

c'est a dire $\overrightarrow{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{T_1T_2}\right)} \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

**0.25 pt** $\boxed{\text{les deux droites } (OA), \text{ et } (T_1T_2) \text{ sont perpendiculaires}}$

b On a : $\overrightarrow{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK})} \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{\text{aff}(\overrightarrow{OK})}{\text{aff}(\overrightarrow{OA})}\right)(2\pi)$

et $\frac{\text{aff }(\overrightarrow{OK})}{\text{aff}(\overrightarrow{OA})} = \frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}+e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = [\frac{1}{2}, 0]$ ,

donc $\boxed{\text{les points } O, A, \text{ et } K \text{ sont alignées}}$

c On a $(OA)$, et $(T_1T_2)$ sont perpendiculaires , et $K$ est le milieus de segment $[T_1T_2]$, et$K \in (OA)$

**0.25 pt** Donc : $\boxed{(OA) \text{ est la médiatrice de segment } [T_1T_2]}$

**3 -** a

$$\begin{aligned} r(M) = M' &\Leftrightarrow \left(z_{M'} - z_{T_1}\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(z_M - z_{T_1}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(z' - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(z - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}\right) \\ &\Leftrightarrow z' = i\left(z - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}\right) + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} \\ &\Leftrightarrow z' = iz + (1-i)e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} \\ &\Leftrightarrow z' = iz + \left(\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

**0.5 pt** Donc $\boxed{z = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}}$

b

$$\begin{aligned} r(I) &= B \\ &\Leftrightarrow z_B = \sqrt{2}e^{i\theta} + iz_I \\ &\Leftrightarrow b = \sqrt{2}e^{i\theta} + 1 \end{aligned}$$

**0.25 pt** Donc $\boxed{b = \sqrt{2}e^{i\theta} + 1}$

c

$$\frac{z_B - z_A}{z_I - z_J} = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + i - \sqrt{2}e^{i\theta}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_I - z_J}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow (IJ) \perp (AB)$$

**0.25 pt** Donc $\boxed{\text{les droites } (AB) \text{ et } (IJ) \text{ sont perpendiculaires.}}$

**4 -**

$$\overrightarrow{AC} = -\vec{v} \Leftrightarrow \text{ aff } (\overrightarrow{AC}) = \text{aff}(-\vec{v})$$
$$\Leftrightarrow z_C - z_A = -i$$
$$\Leftrightarrow z_c = z_A + i$$
$$\Leftrightarrow z_c = \sqrt{2}e^{i\theta} - i$$

0.25 pt

Donc $\boxed{z_c = \sqrt{2}e^{i\theta} - i.}$

**5 -**

$$\frac{z_B + z_C}{2} |= \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + i + \sqrt{2}e^{i\theta} - i}{2}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}e^{i\theta}}{2} = \sqrt{2}e^{i\theta} = z_A$$

Donc $\boxed{A \text{ est le milieu de segment } [BC]}$

## Problème : (8 pts)

### Partie I

On considère la fonction $g$ définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x - \ln x$

0.5 pt

**1 -** a / On a la fonction ln est continue sur $]0, +\infty[$ et on a la fonction $x \mapsto \dfrac{-x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$(fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ donc elle est définie sur $]0, +\infty[$

D'où la fonction $f$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme Produits de deux fonctions continue .

• Étudions la continuité de la fonction $f$ a droite de 0 :

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-xlnx}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} xlnx \times \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-1}{1+x^2} = 0 \times (-1) = 0 = f(0)$.

Donc $\boxed{f \text{ est continue a droite de 0.}}$

On a $f$ est continue sur $]0, +\infty[$ , et continue a droite de 0 Donc $f$ est continue sur $[0, +\infty[$.

0.25 pt

b / Étudions le signe de la fonction $f$ sur $[0, +\infty[$ :

On a$(\forall x \in ]0, +\infty[)\,; f(x) = \left(\dfrac{-x}{1+x^2}\right) lnx$

On remarque que $(\forall x \geq 0)\,; \left(\dfrac{-x}{1+x^2}\right) \leq 0$.

Donc le signe de $f$ sur $[]0, +\infty[)$ est le singe de $lnx$.

si $x = 1$ alors $lnx = 0$

si $x > 1$ alors $lnx > 0$

si $x < 0$ alors $lnx < 1$

Donc :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**0.25 pt** **2 -** a /

$$\begin{aligned}(\forall x \in ]0,+\infty[)\,;f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\frac{-1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\\ &= \frac{\frac{-1}{x}(-\ln x)}{\frac{x^2+1}{x^2}}\\ &= \frac{-1}{x}(\ln x)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\\ &= \frac{x\ln x}{1+x^2}\\ &= -f(x)\end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in ]0,+\infty[)\,;f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ Donc : $\boxed{(\forall x > 0); f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)}$

**0.25 pt** b / On a la fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a la fonction $x \mapsto \dfrac{-x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$(fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $]0,+\infty[$

D'où $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } ]0,+\infty[ \text{ comme Produits de deux fonctions continue .}}$

**0.5 pt** c / On a la fonction ln est continue sur $[0,+\infty[$,donc $f$ est continue sur $[0;1]$.

Et on a la fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc $f$ est dérivable sur $]0;1[$

. Donc d'après le théorème des accroissement finies :

$$\boxed{\exists\alpha \in ]0;1[\,;\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(\alpha).\Rightarrow \exists\alpha \in ]0;1[\,; f'(\alpha)=0, \text{ car } f(1)-f(0)=0.}$$

**0.5 pt** d / soit $x$ un nombre réel strictement positif.

On a :$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$, et les fonctions $f$ , $x \mapsto \frac{1}{x}$ , et $x \mapsto -f(x)$ sont dérivable sur $]0,+\infty[$.

Donc $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Donc :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' &= (-f(x))'\\ \Rightarrow \frac{-1}{x^2}\left(f'\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= -f'(x)\\ \Rightarrow \frac{-1}{\alpha^2}\left(f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) &= -f'(\alpha) \text{ car } \alpha > 0\\ \Rightarrow f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= 0; \text{car } f'(\alpha)=0\end{aligned}$$

## PARTIE II

**0.5 pt**

**1 -** a / Il suffit de montrer que :$(\forall t \geq 1); \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

On a :

$$\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{2} = \frac{2t^2 - 1 - t^2}{2\left(1+t^2\right)} = \frac{t^2 - 1}{2\left(1+t^2\right)} = \frac{(t-1)(t+1)}{2\left(1+t^2\right)}$$

On remarque que :$(\forall t \geq 1); (t-1) \geq 0$

Donc : $(\forall t \geq 1); \frac{(t-1)(t+1)}{2(1+t^2)} \geq 0$

C 'est a dire : $(\forall t \geq 1); \frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{2} \geq 0$

C' est a dire : $(\forall t \geq 1); \frac{t^2}{1+t^2} \geq \frac{1}{2}$

De même on a : $1 - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}$

On remarque que :$(\forall t \geq 1); \frac{1}{1+t^2} \geq 0$

C 'est a dire :$(\forall t \geq 1); 1 - \frac{t^2}{1+t^2} \geq 0$

C 'est a dire :$(\forall t \geq 1); 1 \geq \frac{t^2}{1+t^2}$

D'où $\boxed{(\forall t \geq 1); 1 \geq \frac{t^2}{1+t^2} \geq \frac{1}{2}}$

**1 pt**

b / Soient $t \geq 1$, et $x \geq 1$ : D'après la question précédente on a :$1 \geq \frac{t^2}{1+t^2} \geq \frac{1}{2}$

On multiplie les membres par le nombre positif $\frac{\ln t}{t}$ on obtient :

$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t}{t}\right) \leq \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t} \leq \frac{\ln t}{t}$ Donc : $\frac{1}{2}\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt \leq \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}dt \leq \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt$

- Calculons l'intégral $\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt$ en utilisant une intégrale par parties

$$\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt = \int_1^x (\ln t)'(\ln t)dt$$
$$= \left[(\ln t)^2\right]_1^x - \int_1^x (\ln t)(\ln t)'dtdt$$
$$= (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt$$
$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt = (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt$$
$$\Rightarrow 2\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt = (\ln x)^2$$
$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

On a : $\frac{1}{2}\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt \leq \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}dt \leq \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt$

On multiplie tous les membres par -1 puis en ajoutant $F(1)$ on aura :

$$F(1)-\frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(1)-\int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}dt \leq \quad \leq F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$F(1)-\frac{(\ln x)^2}{2} \leq \int_0^1 f(t)dt - \int_1^x -f(t)dt \leq \quad \leq F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$F(1)-\frac{(\ln x)^2}{2} \leq \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \leq \quad \leq F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$F(1)-\frac{(\ln x)^2}{2} \leq \int_0^x f(t)dt \leq F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$F(1)-\frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(x) \leq F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}$$

Donc : $\boxed{F(1)-\frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(x) \leq F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}}$

**1 pt** c / On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x))^2 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4} = -\infty$

Donc on aura : $F(x) \leq F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}$

D'après le théorème de comparaison des limites on a : $\left[\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty\right]$ et on de plus :$F(1)-\frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(x) \leq F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}$

On multiplie tous les membres par le nombre positif $\frac{1}{x}$ on aura : $\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right) \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x}-\frac{1}{4}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$ • Calculons la limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$ :

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\ln \sqrt{x}^2\right)^2}{(\sqrt{x})^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$= 4\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\lim_{\substack{y\to+\infty\\ y=\sqrt{x}}}\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2$$

$$= 4\times 0^2 = 0$$

Donc on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{4}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right) = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = 0$

Alors $\boxed{\text{C}_\text{f} \text{ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de } +\infty}$

**0.5 pt** **2 -** a / On a $f$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ donc $F$ est la fonction primitive de la fonction $f$ sur $[0,+\infty$ qui s'annule en 0

On a $f$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty$ et $0 \in [0,+\infty[$ donc $F$ est dérivable sur $[0,+\infty[$, et sa fonction dérivée est la fonction $f$

Donc : $\boxed{\forall x \in [0,+\infty[; F'(x) = f(x) = \frac{-x\ln(x)}{1+x^2}.}$

**0.25 pt** b / tableau de variation de la fonction $F$

$\forall x \geq 0; F'(x) = f(x)$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $F(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $F(1)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

## Partie III

**0.5 pt**

**1 -** a / On considéré la fonction $\phi$ définie sur $]0,+\infty[$ par :$\phi(t)=\frac{1}{e}+t\ln(t)$

On a $\phi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme sommes de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$

Donc $\forall t>0; \phi'(t)=1+\ln(t)$.

On a : $t=\frac{1}{e}\Longrightarrow\phi(t)=0$

$t>\frac{1}{e}\Longrightarrow\phi(t)>0$

$t<\frac{1}{e}\Longrightarrow\phi(t)<0$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\phi'(t)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\phi(t)$ | \|\| $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

D'après le tableau de variation on 0 est une valeur minimale de la fonction $\phi$ sur $]0,+\infty[$

Donc $\forall t>0; \phi(t)\geq 0$

D'où $\boxed{\forall t>0; \frac{1}{e}\geq -t\ln(t)}$

**0.25 pt**

b / Soit $t\in]0,+\infty[$, on a : $-t\ln)t)\leq\frac{1}{e}$

On multiplie les deux membres de l'inegalites par le nombre positif : $\frac{1}{1+t^2}$ on trouve :

$\frac{-t\ln)t)}{1+t^2}\leq\frac{1}{e(1+t^2)}$

Puisque $\frac{1}{1+x^2}\leq 1$, alors $\forall t>0; \frac{-t\ln)t)}{1+t^2}\leq\frac{1}{e(1+t^2)}\leq\frac{1}{e}$

Et pour $t=0$ on $f(0)=0\leq\frac{1}{e}$,

Donc $\boxed{\forall t\geq 0; f(t)=\frac{1}{e}}$

**0.25 pt**

c / Soit x un nombre réel strictement positif :

$(t\geq 0)\Rightarrow f(t)\leq\frac{1}{e}$

$\Rightarrow\int_0^x -f(t)dt\leq\int_0^x -\frac{1}{e}dt$

$\Rightarrow F(x)\leq\frac{1}{e}x\Rightarrow F(x)\leq\frac{1}{e}x\leq x\Rightarrow F(x)<x; (\forall x>0)$

D'où $\boxed{(\forall x>0); F(x)<x}$

**0.5 pt** **2 - a /** On utilisant le raisonnement par récurrence : On considéré la proposition $(P_n)$ suivante :

$(P_n) : u_n \in ]0,1[$

Pour $n = 0$ on a $u_0 \in ]0,1[$ donc $(P_0)$ est vraie

Supposons que $(P_n)$ est vraie et montrons que $(P_{n+1})$ est vraie : $\rightarrow$ $(P_n)$ est vraie

$(P_n)$ est vraie $\Rightarrow u_n \in ]0,1[$

$\Rightarrow 0 < u_n < 1$

$\Rightarrow F(0) < F(u_n) < F(1)$

(l'ordre n'est pas changer car $F$ est strictement croissante sur$[0,1]$)

$\Rightarrow 0 < F(u_n) < F(1)$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < F(1)$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < F(1) < 1$

car $\forall x > 0; F(x) < x$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$

$\Rightarrow u_{n+1} \epsilon ]\,0,1[$

$\Longrightarrow (P_{n+1})$ est vraie

Donc d'après le raisonnement par récurrence on a :$(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $(P_n)$ est vraie

D'où $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in ]0,1[}$

**0.5 pt** b / On a : $(\forall x > 0); F(x) < x$, et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in ]0,1[$

C'est a dire : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); F(u_n) < u_n$.

C'est a dire : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < u_n$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

Et puisque elle est minorée par 0

$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

**0.5 pt** c / On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente définie par :$u_{n+1} = F(u_n)$

Et on F est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ de plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc sa limite vérifie :$F(l) = l$

D'autre part on a :$(\forall x > 0); F(x) < x$, et $F(0) = \int_0^0 -f(t)dt = 0$

Donc l'unique solution de l'équation $F(l) = l$ est 0 .

D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

## Exercice 5 : (2 pts)

0.5 pt

**1 -** a / On pose la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ par : $x \mapsto \frac{-1}{x}$, et la fonction $v$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ par : $x \mapsto e^x$

On a $u$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$ et $v$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$ donc $vou$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$ (car $u(\mathbb{R}^\star) \subseteq \mathbb{R}$).

Donc $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$

et puisque $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$

Donc $\boxed{\text{la fonction : } x \mapsto \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} \text{ est continue sur } ]0, +\infty[}$ comme produits de deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$

0.25 pt

b / On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} & = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{2x^2} e^{\frac{-1}{2x}}\right)^2 = \lim_{x \to 0^+} 4\left(\frac{1}{2x^2} e^{\frac{-1}{2x}}\right)^2 \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{(\frac{e^t}{t})}\right)^2, \quad (t = \frac{1}{2x}) \\
&= 4 \lim_{u \to +\infty} (\frac{1}{u})^2, \quad (u = \frac{e^x}{x}) \\
&= 0 = g(0)
\end{aligned}$$

0.25 pt

Donc $\boxed{g \text{ est continue a droite de } 0.}$

c / On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} & = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2}{2x^2} e^{\frac{-1}{2x}}\right)^2 = \lim_{x \to 0^-} 4\left(\frac{1}{2x^2} e^{\frac{-1}{2x}}\right)^2 \\
&= \lim_{u \to -\infty} \left(\frac{1}{(\frac{e^u}{u})}\right)^2, \quad (u = \frac{1}{2x}) \\
&= 4 \lim_{t \to +\infty} (\frac{1}{t})^2, \quad (t = \frac{e^u}{u}) \\
&= +\infty \neq g(0)
\end{aligned}$$

Donc $g$ est n'est pas continue a gauche de 0.

0.25 pt

Donc $\boxed{g \text{ est n'est pas continue en } 0.}$

**2 -** a / Calculons $L(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$

$$L(x)=\int_0^x -g(t)dt=\int_0^x -\left(\frac{1}{t^2}e^{\frac{-1}{t}}\right)dt=\int_0^x -\left(e^{\frac{-1}{t}}\right)'dt$$
$$=\int_0^x -\left(t^2g(t)\right)'dt=\left[t^2g(t)\right]_0^x$$
$$=x^2g(x)-0^2g(0)$$
$$=x^2g(x)$$
$$=e^{\frac{-1}{x}}$$

**0.25 pt** Donc $\boxed{L(x)=e^{\frac{-1}{x}}}$

b / On a : la fonction $L(x)$ est la compose de deux fonctions continue $\varphi$ et $\psi$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ respectivement par :

$x\mapsto\frac{-1}{x}$, et $x\mapsto e^x$

On a $\varphi(\mathbb{R}^\star)\subseteq\mathbb{R}$

**0.25 pt** Donc $\boxed{\text{la fonction } x\mapsto e^{\frac{-1}{x}} \text{ est continue sur } ]0,+\infty[}$

**0.5 pt** c / On a : $\lim\limits_{x\to0^+}L(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{-1}{x}}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$

**3 -** a /

$$S_n=n\left(\left(\frac{1}{1}\right)^2e^{\frac{-n}{1}}+\left(\frac{1}{2}\right)^2e^{\frac{-n}{2}}+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}\right)^2e^{\frac{-n}{n-1}}\right)$$
$$=\frac{n^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2e^{\frac{-n}{k}};n\geq1$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n}{k}\right)^2e^{\frac{-n}{k}};n\geq1$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2}e^{\frac{-1}{\left(\frac{k}{n}\right)}};n\geq1$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right);n\geq1$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{0}{n}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right);n\geq1$$
$$(\forall n\geq1);\quad S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)$$

**0.5 pt** Donc $\boxed{S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)}$

b / On a $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g\left(0+\frac{k(1-0)}{n}\right)$

Puisque g est continue sur $[0,1]$ alors la suite $(S_n)_{n\geq1}$ est convergente est on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1 -g(t)dt=L(1)=\frac{1}{e}$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{e}}$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat SCIENCES MATHÉMATIQUE**

**Session : Rattrapage** juillet 2014

# MATHÉMATIQUES

Série : **SCIENCES MATHÉMATIQUE**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***L'épreuve est composée de six exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :***

— Exercice 1 : **Probabilité.** ........ **2 points**
— Exercice 2 : **Arithmétique.** ........ **1 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** ........ **3.75 points**
— Exercice 4 : **Nombres complexes** ........ **3.25 points**
— Exercice 5 : **Analyse** ........ **7.5 points**
— Exercice 6 : **Analyse** ........ **2.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$
♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : ( 2 pts )

Considèrons trois urnes $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$.

L'urne **W** contient **3** boules indiscernables au toucher : **1** Boule noire et **2** boules blanches. chacune des urnes **U** et **V** contient **4** boules indiscernables au toucher : **2** Boule noires et **2** boules blanches.

On considère l'expérience suivante :

On tire au hasard une boule de l'urne **W** : Si elle est blanche, on la met dans l'urne **U**, puis on tire deux boules simultanément de l'urne **U**, Si elle est noire, on la met dans l'urne **V**, puis on tire deux boules

**0.25 pt** **1 -** Quelle est la probabilité pour que le tirage des deux boules soit de l'urne $\boldsymbol{U}$ ?

**0.75 pt** **2 -** Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches à la fin de l'expérience ?

**3 -** Soit $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches à la fin de l'expérience.

**1 pt** Déterminer la loi de probabilité de la variable **X**.

## Exercice 2 : (1 pts)

Soit **n** un nombre entier naturel non nul.

Posons $\boldsymbol{c_n = 2.10^n - 1}$ et $\boldsymbol{b_n = 2.10^n + 1}$

**0.5 pt** **1 -** Montrer que $\boldsymbol{b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2}$, puis en déduire que $\boldsymbol{b_n}$ et $\boldsymbol{c_n}$ sont premiers entre eux.

($\mathbf{a \wedge b}$ représente le plus grand diviseur commun de **a** et **b**)

**0.5 pt** **2 -** Déterminer un couple $(\mathbf{x_n, y_n})$ de $\mathbf{Z^2}$ vérifiant : $\mathbf{b_n x_n + c_n y_n = 1}$

## Exercice 3 : (3.75 pts)

On pose $\mathbf{J = ]-1, 1[}$

**Partie I :** Soient **a** et **b** deux éléments de l'intervalle **J**, on pose : $\mathbf{a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}}$

**1 -** Vérifier que $\left(\forall (\mathbf{a,b}) \in \mathbf{J^2}\right); \mathbf{1 + ab > 0}$, puis en déduire que $*$ est une loi de composition

**0.75 pt** interne dans **J**.

**0.5 pt** **2 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans **J**.

**0.25 pt** **b)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans **J** qu'on déterminera.

**0.5 pt** **c)** Montrer que $(\mathbf{J}, *)$ est un groupe commutatif.

**Partie II :** On considère l'application **f** définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$

**0.75 pt** **1 -** Montrer que la fonction **f** est une bijection de $\mathbb{R}$ vers **J**.

**2 -** Soit **g** la bijection réciproque de l'application **f** ( la détermination de **g** n'est pas demandé)

**0.5 pt** Quel que soient **x** et **y** de **J**, on pose : $\mathbf{x \perp y = f(g(x) \times g(y))}$

Montrer que **f** est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(\mathbf{J^*}, \perp)$ tel que $\mathbf{J^* = J - \{0\}}$.

**3 -** On rappelle que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif et on admet que la loi $\perp$ est distributive
0.5 pt par rapport à la loi $*$ dans $\mathbf{J}$.
Montrer que $(\mathbf{J}, *, \perp)$ est un corps commutatif.

## Exercice 4 : (3.25 pts)

**Partie I :**

**1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + \text{ß} = 0$ (a est la solution de l'équation telle
0.5 pt que $\mathbf{Re(a) > 0}$ )

0.5 pt **2 - a)** Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\mathbf{1 + a}$.

0.25 pt **b)** En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

**c)** Vérifier que $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$, en déduire la forme trigonométrique du nombre
0.5 pt complexe $1 - a$.

**Partie II :** Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}$ et $M'$ d'affixes respectifs $\mathbf{a}, -\mathbf{a}, z$ et $z'$ tels que $\mathbf{zz'} + \text{ß} = \mathbf{0}$.

0.25 pt **1 -** Soit $\mathbf{N}$ le point d'affixe $\overline{z}$, conjugué de $z$.
Montrer que les droites $(\mathbf{ON})$ et $(OM')$ sont perpendiculaires.

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $z' - \mathbf{a} = \text{ß}\frac{z - \mathbf{a}}{\mathbf{az}}$.

0.5 pt **b)** Montrer que si $z \neq -\mathbf{a}$, alors : $z' \neq -\mathbf{a}$ et $\frac{z' - \mathbf{a}}{z' + \mathbf{a}} = -\frac{z - \mathbf{a}}{z + \mathbf{a}}$.

0.5 pt **3 -** On suppose que les points $A, B, M$ ne sont pas alignés.
Montrer que le point $\mathbf{M'}$ appartient au cercle circonscrit au triangle $\mathbf{ABM}$.

## Exercice 5 : ( 7.5 pts )

**Partie I :** Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $\mathbf{f(x)} = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$.
Et $(\mathbf{C_f})$ la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\text{ß}}; \vec{\mathbf{j}})$ unité $\mathbf{1\ cm}$.

**1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathbf{f(x)}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{f(x)}$, puis interpréter géométriquement les deux résultats ob-
1 pt tenus.

0.75 pt **2 -** Calculer $\mathbf{f'(x)}$, puis en déduire les variations de la fonction $\mathbf{f}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

**3 -** Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $\mathbf{g_n}$ définie sur $]0, 1[$ par : $\mathbf{g_n(x) = f(x) - x^n}$

0.25 pt **a)** Montrer que $\mathbf{g_n}$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$.

0.5 pt **b)** En déduire que pour tout entier $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$ il existe $\alpha_n \in ]0, 1[$ unique, tel que :
$\mathbf{f}(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$.

0.5 pt **c)** Montrer que pour tout entier $\mathbf{n \geq 1 : g_n}(\alpha_{n+1}) < 0$.

**d)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est conver-
0.75 pt gente.

**4 -** On pose que : $\mathbf{l} = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

0.25 pt — **a)** Vérifier que : $\mathbf{0 < \alpha_1 \leq l \leq 1}$.

0.25 pt — **b)** Vérifier que : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)\,;\mathbf{h}(\alpha_n) = \mathbf{n}$ avec $\mathbf{h(x)} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$.

0.5 pt — **c)** Montrer que : $\mathbf{l = 1}$.

0.25 pt — **d)** En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = 0$.

## Partie II :

0.25 pt — **1 - a)** Étudier le signe de l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt$ pour tout $x$ de $]0, +\infty[$

0.5 pt — **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$(\forall x > 0);\ \displaystyle\int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln x$

0.25 pt — **c)** En déduire, en $\mathbf{cm^2}$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C_f)$ et les droites d'équations respectives $x = 1, x = e^2$ et $y = 0$

**2 -** Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$, on pose : $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 pt — **a)** Montrer que pour tout entiers naturels $\mathbf{n}$ et $\mathbf{k}$ tels que : $\mathbf{n \geq 2}$ et $\mathbf{1 \leq k \leq n-1}$, on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 pt — **b)** Montrer que : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)\,;\ \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt$

0.5 pt — **c)** En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$

## Exercice 6 : ( 2.5 pts )

On considère la fonction $\mathbf{g}$ définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2}dt$.

**1 -** Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, on pose : $k(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt$.

0.25 pt — **a)** Vérifier que pour tout $x$ de $[0, +\infty[$, on a : $g(x) = -k(\sqrt{x})$.

0.5 pt — **b)** Montrer que la fonction $\mathbf{g}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

0.5 pt — **c)** Calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$, puis en déduire que $g$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

0.75 pt — **2 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0);\ \dfrac{g(x) - g(0)}{x} < -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$

0.5 pt — **b)** En déduire que la fonction $g$ n'est pas dérivable à droite en 0 et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

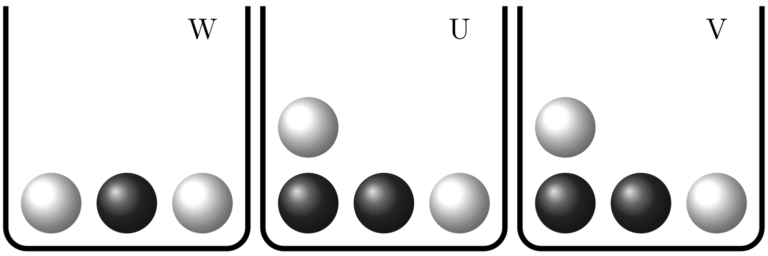
# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques A et B

Session : RATTRAPAGE 2014

## MATHÉMATIQUES

### Exercice 1 : (2 pts)




L'expérience consiste à tirer une boule de l'urne W.

- Si la boule tirer est blanche, on la remet dans l'urne U puis on tire simultanément deux boules de l'urne U.

- Si la boule tirer est noire, on la remet dans l'urne V puis on tire simultanément deux boules de l'urne V.

**1 -** Calculons la probabilité pour que le tirage soit effectuer de l'urne U

Notons $T_u$ l'événement " le tirage est effectuer de l'urne U " ,Pour réaliser cet événement il faut tirer une boule blanche de l'urne W

Soit donc $B_w$ l'évènement " tirer une boule blanche de l'urne W ", Alors puisque le tirage se faut au hasard d'une boule de l'urne W qui contient deux boules blanche et une noire on a

$P(B_w) = \frac{2}{3}$ et par suite : $\boxed{P(T_u) = \frac{2}{3}}$

**2 -** Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanche a la fin de l'expérience

Soit B l'évènement **" Tirer deux boules blanches a la fin de l'expérience "**

Pour réaliser cet évènement il faut tirer une boule blanche de l'urne **W** que l'on remet dans l'urne U puis tirer 2 boules blanches de l'urne **U** ou tirer une boule noire de l'urne w que l'on remet dans l'urne **V** puis tirer simultanément deux boule noire de l'urne W que l'on remet dans l'urne **V** puis tirer simultanément deux boules blanches de l'urne **V** .

Pour cela noter $B_w$ l'évènement : **" tirer une boule blanche de l'urne W"** on a donc $P(B_w) = \frac{2}{3}$ et notons $N_w$ L'évènement **" tirer une boule noire de l'urne W"**

On a donc $P(B_w) = \dfrac{2}{3}$ et notons $N_w$ l'évènement **"tirer une boule noire de l'urne W"**

On a donc $P(N_w) = \dfrac{1}{3}$

Noter $B_u$ l'évènement **"tirer deux boules blanches de l'urne U sachant que $B_w$ est réaliser "** ; On a donc :

$$P(B_u) = \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$$

Notons $B_w$ l'évènement **"tirer deux boules blanches de l'urne V sachant que $N_w$ est réaliser**; on a donc :

$$P(B_V) = \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{30}$$

Finalement : $\boxed{P(B) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{7}{3}}$

**3 -** Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boule blanches obtenue a la fin de l'expérience , Déterminer la lois de probabilité de $X$

A la fin de l'expérience on peut obtenir 0 , 1 ou 2 boules blanche donc les valeur prise par $X$ sont 0 , 1 et 2 $P(X=0) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{C_2^2}{C_5^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{5}{30}$

$P(X=1) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{C_2^1 C_2^1}{C_5^2} = \dfrac{18}{30}$

$P(X=2) = \dfrac{7}{30}$

Donc : la loi de probabilité de $X$ est donnée par :

| $X = x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{5}{30}$ | $\frac{18}{30}$ | $\frac{7}{30}$ |

$\boxed{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) = 1}$

## Exercice 2 : (1 pts)

On pose : $b_n = 2 \times 10^n + 1$ ; $c_n = \times 10^n + 1$ $n \in \mathbb{N}^*$

**1 -** Montrer que $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ puis déduisons que $b_n \wedge c_n = 1$

On a :

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \cdot 10^n + 1 \\ &= 2 \cdot 10^n - 1 + 2 \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 10^n - 1) + 2 \\ &= cdotc_n + 2 \quad \text{avec} \quad 2 < c_n, \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Donc d'après l'algorithme d'Euclide on a : $\boxed{b_n \wedge c_n = C_n \wedge 2}$

Et comme $C_n$ est un nombre impair et 2 est pair inférieur strictement à $C_n$, alors $C_n$ et 2 sont premier entre eux et par-suite $b_n$ et $c_n$ sont premier enter eux. c-à-d : $\boxed{b_n \wedge c_n = 1}$.

**2 -** Déterminons $(x_n; y_n) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $b_n \cdot x_n + c_n \cdot y_n = 1$.

On a : $b_n \wedge c_n = 1$, alors d'après **le théorème de Bezout** il existe : $(x_n, y_0) \in \mathbb{Z}$ tel que : $b_n \cdot x_n + c_n \cdot y_n = 1$

d'après l'algorithme d'Euclide, on a :

$$b_n = c_n + 2$$
$$c_n = 2 \cdot (10^n - 1) + 1$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= c_n - 2\left(10^n - 1\right) \\ &= c_n - \left(b_n - c_n\right)\left(10^n - 1\right) \\ &= c_n - b_m\left(10^n - 1\right) + c_n\left(10^n - 1\right) \\ &= -\left(10^n - 1\right) b_n + c_n\left(1 + 10^n - 1\right) \\ &= -\left(10^n - 1\right) b_n + 10^n \cdot c_n \end{aligned}$$

Donc : $x_n = -\left(10^m - 1\right)$ et $y_n = 10^n$

En conclusion : $\boxed{\exists\left(x_n, y_n\right) \in \mathbb{Z}^2 \quad / \quad x_n \cdot b_n + y_n \cdot c_n = 1}$

## Exercice 3 : (3.75 pts)

On pose : $J = ]-1, 1[$

### Partie I

Pour tout $a$ et $b$ de l'intervalle $J$ on pose $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$

**1 -** Vérifier que $\forall (a,b) \in J^2$ on a :$1 + ab > 0$ et déduire que $*$ est une loi de composition interne

Soit $(a,b) \in J^2$ on a :

$$\begin{aligned}(a,b) \in J^2 &\Longrightarrow -1 < a < 1 \quad \text{et} \quad -1 < b < 1\\ &\Longrightarrow |a| < 1 \quad \text{et} \quad |b| < 1\\ &\Longrightarrow |ab| < 1\\ &\Longrightarrow -1 < ab < 1\\ &\Longrightarrow ab + 1 > 0\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall (a,b) \in J^2 \quad 1 + ab > 0}$

De plus : $\dfrac{a+b}{1+ab} - 1 = \dfrac{a+b-1-ab}{1+ab} = \dfrac{a(1-b)-(1-b)}{1+ab} = \dfrac{(1-b)(a-1)}{1+ab} < 0$

Donc : $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab} < 1$

D'autre part : $\dfrac{a+b}{1+ab} + 1 = \dfrac{a+b+1+ab}{1+ab} = \dfrac{(a+1)(b+1)}{1+ab} > 0$

Donc $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab} > -1$

Alors on déduire que $\forall (a,b) \in J^2 \quad a * b \in J$

Donc : la loi $*$ est une loi de composition interne dans $J$

**2 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative est associativité

- Soit $(a,b) \in J^2$ , On a : $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab} = \dfrac{b+a}{a+ab} = b * a$

  Donc : $\forall (a,b) \in J^2 : \quad a * b = b * a$

  D'où : la loi $*$ est commutative dans $J$

- Soit $(a,b,c) \in J^3$, On a :

  $$a * (b * c) = a * \dfrac{b+c}{1+bc} = \dfrac{a + \dfrac{b+c}{1+bc}}{1 + a(\dfrac{b+1}{1+bc})} = \dfrac{a+b+c(1+ab)}{1+ab+(a+b)c} = (a * b) * c$$

  Donc : $\forall (a,b,c) \in J^3 : \quad a * (b * c) = (a * b) * c$

  D'où : la loi $*$ est associative dans $J$

**b)** Montrer que $(J, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera :

Cherchons s'il existe $e$ tel que : $a * e = e * a = a$

On a :

$$\begin{aligned} a * e &\Longrightarrow \frac{a+e}{1+ae} = a \\ &\Longrightarrow a + e = a + a^2 e \\ &\Longrightarrow e - a^2 e = 0 \\ &\Longrightarrow e(1-a^2) = 0 \\ &\Longrightarrow e = 0 \end{aligned}$$

Comme $e = 0 \in J$ et $*$ est commutative ; on conclut que :

$(\exists e = 0 \in J)\,(\forall a \in J) \quad a * e = e * a = a$

D'où : $(J, *)$ admet un élément neutre $e = 0$

**c)** Montrer que $(J, *)$ est un groupe commutatif

- La loi * est commutative et admet un élément neutre dans $J$

- Soit $a \in J$ cherchons s'il existe $a' \in J$ tel que $a * a' = a' * a = e$

On a :

$$\begin{aligned} a * a' = e &\Longleftrightarrow \frac{a+a'}{1+aa'} = 0 \\ &\Longleftrightarrow a + a' = 0 \\ &\Longleftrightarrow a' = a \end{aligned}$$

Et comme $*$ est commutative , alors $*$ admet un symétrique dans $J$

D'où : Tout élément de $J$ admet un symétrique dans $J$ par $*$

Par conséquence : $(J, *)$ est un groupe commutative .

## Partie II

$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

**1 -** Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J$

Soit $y \in J$ cherchons s'il existe $x$ de $\mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y$$
$$\Leftrightarrow e^x - 1 = e^x y + y$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1+y}{1-y}$$
$$\Leftrightarrow x = ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Donc : $\boxed{f \text{ est bijective dan } \mathbb{R} \text{ sur } J}$

**2 -** Soit $g$ la bijection réciproque de $f$, $\forall(x,y) \in j^2$ on a $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

- Montrons que $f$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(J^*, \perp)$

Remarquons d'abord 0 a un antécédent unique en 0 par $f$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a : $f(x) \in R^*$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ , puisque $g$ est bijection réciproque de $f$ , on a :

$f(x) \perp f(y) = f(g(f(x) \times g(f(y))) = f(x \times y)$

D'où : $\boxed{\forall(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \quad f(x \times y) = f(x) \perp f(y)}$

ce qui montre que $f$ est une homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(J^*, \perp)$

**3 -** On a : $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif, $\perp$ est distributive par rapport à $*$ dans $J$.

- Montrons que $(J, *, \perp)$ est un corps commutatif

On a :

- $(J, *)$ est un groupe commutatif
- $f$ est un homomorphisme de groupe et commutative alors $f(\mathbb{R}^*), \perp)$ est un groupe commutatif

  ET comme $f(R) = J$ et $f(0) = 0$ et $f(R^*) = J^*$ donc $(J, \perp)$ est un groupe commutatif.
- $\perp$ est distributive par rapport a $*$ dans $J$.

En conclut donc que : $\boxed{(J, *, \perp) \text{ est un corps commutatif.}}$

## Exercice 4 : (3.25 pts)

**1 -** Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ : $z^2 + i = 0$

Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ solution de l'équation

$$\begin{aligned} z^2 + i = 0 &\Leftrightarrow z^2 = -i \\ &\Leftrightarrow r^2 e^2 i\theta = e^{-i\dfrac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow r^2 = 1 \quad et \quad 2\theta = -\frac{\pi}{2} = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad r = 1 \quad et \quad \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}$$

Donc les solution sont : $\boxed{z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$ et $\boxed{z_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

**2 -** Déterminer le module et l'argument de $1 + a$

$$\begin{aligned} 1 + a &= e^{-i\dfrac{\pi}{4}} \\ &= e^{-i0} + e^{-i\dfrac{\pi}{2}} \\ &= e^{-i\dfrac{\pi}{8}}\left(e^{i\dfrac{\pi}{8}} + e^{-i\dfrac{\pi}{8}}\right) \\ &= 2cos(\frac{\pi}{8} e^{-i\dfrac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Et comme $cos(\frac{\pi}{8}) > 0$ alors $\boxed{|1 + a| = 2cos\frac{\pi}{8}}$ et $\boxed{arg(1 + a) = -\frac{\pi}{8})\,[2\pi]}$

**3 -** Déduire $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} 1 + a &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Et alors

$$\begin{aligned}|1+a| &= \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{6+4\sqrt{2}}{4}+\frac{2}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}}{4}}\\ &= \sqrt{2+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

et on a d'après la question présidente $|1+a| = 2cos(\frac{\pi}{8})$

Donc : $2cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ D'où : $\boxed{cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}}$

**4 -** Vérifier que $(1+a)(1-a) = 1+i$ et déduisons la forme trigonométrique du nombre $1-a$

- On a :

$$\begin{aligned}(1+a)(1-a) &= 1-a^2\\ &= 1-(-i)\\ &= 1+i\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{(1+a)(1-a) = 1+i}$

- On sait que : $1+i = \sqrt{2}e^{i\dfrac{\pi}{4}}$ et comme $1+a = 2cos\frac{\pi}{8}e^{-i\dfrac{\pi}{4}}$ alors :

$$\begin{aligned}1-a &= \\ &= \frac{1+i}{1+a}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2cos(\frac{\pi}{8})}e^{i\dfrac{3\pi}{8}}\\ &= \sqrt{2+\sqrt{2}}\left(cos\frac{3\pi}{8}+isin\frac{3\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{1-a = \sqrt{2+\sqrt{2}}\left(cos\frac{3\pi}{8}+isin\frac{3\pi}{8}\right)}$

**5 -** Montrer que : $(ON)\perp(OM^{'})$

Remarque d'abord que : $z \neq 0$ et $z^{'} \neq 0$

puisque : $zz' + i = 0$ et alors

$$\begin{aligned} \frac{z-0}{\overline{z}-0} &= \frac{z^{'}}{z} \\ &= \frac{zz^{'}}{z\overline{z}} \\ &= \frac{-i}{|z|^2} \\ &= -\frac{1}{|z|^2}i \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{z'}{z}$ est un nombre imaginaire pur d'où : $\boxed{(ON)\perp(OM^{'})}$

**6 -** Montrer que $z^{'} - a = i\dfrac{z-a}{az}$

On a :

$$\begin{aligned} i\frac{z-a}{az} &= i\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right) \\ &= i\left(\frac{1}{a} - iz'\right) \\ &= i\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2} - iz^{'}\right) \\ &= i\overline{a} + z^{'} \\ &= z^{'} - a \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{z^{'} - a = i\dfrac{z-a}{az}}$

**7 -** Montrer que si : $z \neq a$ alors $z^{'} \neq a$ et $\dfrac{z'-a}{z^{'}+a} = -\dfrac{z-a}{z+a}$

Par contrapposer si $z' = -a$ alors d'après le résultats de la question précédente on a $-2a = i\dfrac{z-a}{az}$

d'où : $-2a^2z = i(z-a)$ et comme $a^2 = -i$ on obtient $2z = z - a$ c-à-d : $z = -a$ ; on conclut donc que si : $z \neq -a$ alors : $z' \neq -a$

Dans ce cas on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{z'-a}{z'+a} &= \frac{i(\frac{z-a}{za})}{i(\frac{z-a}{za})+2a}\\ &= \frac{i(z-a)}{i(z-a)+2a^2z}\\ &= \frac{i(z-a)}{i(z-a)-2z}\\ &= \frac{i(z-a)}{-i(z+a)}\\ &= -\frac{z-a}{z+a}\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\frac{z'-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a}}$

**8 -** Supposons que les point A , B et M ne sont pas alignes , Montrer que le point $M^{'}$ appartient au cercle circonscrite au triangle ABM

Puisque $A(a)$ et $b(-a)$ ont des affixe opposes alors ils sont symétrique par rapport a O

Et comme les point A , B et M ne sont pas alignes alors $z \neq -a$ et donc $z^{'} \neq -a$ ,

et appartiennent donc a un même cercle qui est une cercle circonscrite au triangle ABM qui a pour hypothèses le segment $[AB]$

On déduite donc $\frac{z'-a}{z'+a} \div \frac{z-a}{z+a} = -1 \in \mathbb{R}$ Donc : $\boxed{\text{les point A , B et M sont cocycliques.}}$

## Exercice 5 : (7.5 pts)

### Partie I

On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{-ln(x)}{\sqrt{x}}$

**1 -** Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interprétons les résultats.

- On a :$(\forall > 0)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(-ln(x))$

  et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -ln(x) = +\infty$

  Alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$ Et donc la courbe représentative de $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

- Et on a : $(\forall > 0)$ $f(x) = -2\frac{ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ $\left(ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}ln(x)\right)$

  et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{ln(t)}{t} = 0$ $(t = \sqrt{x})$

Alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Et donc la courbe représentative de $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

**2 -** Calculons $f(x)$ pour tout $x > 0$ et déduisons les variable de $f$ sur $]0; +\infty[$

Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{x}.\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-ln(x)\right)}{x} \\ &= \frac{-2 + ln(x)}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall x \in ]0; +\infty[: \quad f'(x) - \frac{-2 + ln(x)}{2x\sqrt{x}}}$ -Et on a sur $]0; +\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow -2 + ln(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow ln(x) = 2 \\ &\Longleftrightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Longleftrightarrow -2 + ln(x) > 0 \\ &\Longleftrightarrow ln(x) > 2 \\ &\Longleftrightarrow x > e^2 \end{aligned}$$

$$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < e^2$$

D'où $f$ est strictement croissante sur $[e^2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; e^2]$, avec $f$ est continue au point $e^2$ et $f(e^2) = -\frac{1}{e}$

**3 -** $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ : $\quad g_n(x) = f(x) - x^n \qquad ; x \in ]0; 1[$

**a)** Montrons que $g_n$ est strictement décroissante sur $]0; 1[$ :

On a : $\forall x \in ]0; 1[ \quad g_n'(x) = f(x)' - nx^{n-1} < 0 \qquad$ car $f(x)'$ et $-nx^{n-1} < 0$ sur $]0; 1[$

Donc $g_n$ est est strictement décroissante sur $]0; 1[$

**b)** Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists! \alpha_n \in ]0;1[) \quad f(\alpha_n) = \alpha_n^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g_n$ est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$

Donc $g_n$ est une bijection de $]0;1[$ vers $g_n\left(]0,1[\right) = ]-1,+\infty[ \quad \Big(g_n(1) = -1;\ \lim\limits_{n\to 0^+} g_n(x) = \lim\limits_{n\to 0^+} f(x) -$

Et comme $0 \in ]-1;+\infty[$ alors il admet un antécédent unique $\alpha_n \in ]0,1[$

c-à-d : $g_n(\alpha_n) = 0$ ou encore $f(\alpha_n) = \alpha_n^n$

Donc : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists! \alpha_n \in ]0;1[) \qquad f(\alpha_n) = \alpha_n^n}$

**c)** Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 &\iff f(\alpha_{n+1}) - (\alpha_{n+1})^{n+1} = 0 \\ &\iff f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} g_n(\alpha_{n+1}) &= f(\alpha_{n+1}) - (\alpha_{n+1})^n \\ &= (\alpha_{n+1})^{n+1} - (\alpha_{n+1})^n \\ &= (\alpha_{n+1})^n\,(\alpha_{n+1} - 1) \end{aligned}$$

et comme $\quad \alpha_{n+1} \in ]0;1[$ alors $\alpha_{n+1}^n > 0$ et $\alpha_{n+1} - 1 < 0$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g_n(\alpha_{n+1}) < 0}$

**d)** Montrons que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, puis déduisons qu'elle est convergente :

Soit $n \geq 1$, comme $g_n(\alpha_n) = 0$ alors selon le résultat de la question précédente on déduit que $g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$ pour tout $n \geq 1$

et comme $g_n$ est une bijection strictement décroissante alors $g_n^{-1}\left(g_n(\alpha_n)\right) < g_n^{-1}\left(g_n(\alpha_{n+1})\right)$

D'où $\forall n \geq 1 : \quad \alpha_n < \alpha_{n+1}$ ce qui montre que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, et puisque elle est majorée par 1 , alors elle est convergente.

**4 -** On pose : $\quad l = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

**a)** Vérifions que : $\quad 0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$

On a $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \alpha_n < 1 \quad$ et comme $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante , alors elle est minorée par son premier terme $\alpha_1 \in ]0;1[$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \alpha_1 \leq l \leq 1}$ oú $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

**b)** Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h(\alpha_n) = n$ oú $h(x) = \frac{-1}{2} + \dfrac{ln\left(-ln(x)\right)}{ln(x)}, 0 < x < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $\alpha_n \in ]0,1[$ donc $h(x) = \frac{-1}{2} + \dfrac{ln\left(-ln(x)\right)}{ln(x)}$

et comme

$$\begin{aligned} g_n(\alpha_n) = 0 &\iff f(\alpha_n) - (\alpha_n)^n = 0 \\ &\iff \frac{-ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}} - (\alpha_n)^n = 0 \\ &\iff -ln(\alpha_n) = (\alpha_n)^n.\sqrt{\alpha_n} \\ &\iff ln\left(-ln(\alpha_n)\right) = nln(\alpha_n) + \frac{1}{2}ln(\alpha_n) \\ &\iff \frac{ln\left(-ln(\alpha_n)\right)}{ln(\alpha_n)} = n + \frac{1}{2} \\ &\iff -\frac{1}{2} + \frac{ln\left(-ln(\alpha_n)\right)}{ln(\alpha_n)} = n \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h(\alpha_n) = n}$

**c)** Montrons que $l = 1$

On a : $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$. supposons que $l \neq 1$ alors comme $h$ est continue sur $]0,1[$ donc $h$ est continue en $l$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} h(\alpha_n) = h(l)$ ce qui est absurde puisque $h(\alpha_n) = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Donc : $\boxed{l = 1}$

**d)** Déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = 0$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$, et puisque $f$ est continue sur $]0;+\infty[$ alors elle l'est au point 1 et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\alpha_n) = f(1) = 0$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = 0}$

## Partie II

**1 - a)** Étudions le signe de l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt\,;\, x \in \mathbb{R}_+^*$

- Soit $0 < x < 1$, on a $\forall t \in [x,1]$ : $f(t) = \dfrac{-ln(t)}{\sqrt{t}} \geq 0$ car : $ln(t) \leq 0$ donc : $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt \geq 0$

- Soit $x > 1$ donc $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt = \int_1^x -f(t)dt$ et comme $-f(t) \geq 0$ pour $t \in [1, x]$ alors $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt \geq 0$

- Et si $x = 0$, alors $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt = \int_1^1 f(t)dt = 0$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \displaystyle\int_x^1 f(t)dt \geq 0}$

**b)** En intégrant par parties, montrons que : $\forall x > 0;\quad \displaystyle\int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}ln(x)$

Soit $x > 0$, on pose :

$\begin{cases} u(t) = -ln(t) \\ v'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{-1}{t} \\ v(t) = 2\sqrt{t} \end{cases}$ Donc :

$$\begin{aligned}
\int_x^1 f(t)dt &= \left[-2\sqrt{t}ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{-2\sqrt{t}}{t}dt \\
&= 2\sqrt{x}ln(x) + 2\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt \\
&= 2\sqrt{x}ln(x) + 2\left[2\sqrt{t}\right]_x^1 \\
&= 2\sqrt{x}ln(x) + 4 - 4\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall x > 0 : \quad \displaystyle\int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}ln(x)}$

**c)** Déduisons que l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 1$ , $x = e^2$ et $y = 0$ :

- Si on note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 1$ , $x = e^2$ et $y = 0$, on aura : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^{e^2} |f(t)|\, dt \quad (u.a)$

Et comme $\forall t \in [1, e^2]$ : $\quad f(t) = \dfrac{-ln(t)}{\sqrt{t}} \leq 0$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^{e^2} |f(t)|\, dt \\
&= -\int_{e^2}^1 -f(t)dt \\
&= 4 - 4\sqrt{e^2} + 2\sqrt{e^2}ln(e^2) \\
&= 4 - 4e + 4e \\
&= 4
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\mathcal{A} = 4 \times (u.a)}$

**2 -** $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

**a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \forall k \in \{1,2,3,...,n-1\}$ : $\quad \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{x}f\left(\frac{k}{n}\right)$ :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$ et soit $k \in \{1,2,3,...,n-1\}$ ; on a : $k \leq n-1$ , donc $0 < \frac{k+1}{n} < 1$, alors $0 < \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leq 1$

et comme $f$ strictement décroissante sur $]0; e^2]$, alors pour tout $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$

On a : $\quad f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

Donc : $\quad \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leq \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx$

D'où : $\quad \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leq \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right)$

c-à-d : $\quad \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

Donc : $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}), (\forall k \in \{1,2,3,...,n-1\})$ : $\boxed{\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{x}f\left(\frac{k}{n}\right)}$

**b)** Déduisons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ : $\quad \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ;

- On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= u_n \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

- Et on a : $\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$

Donc d'après la question (a), on déduit que : $\quad u_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= u_n\end{aligned}$$

Part suite : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq u_n$

Finalement : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$

En remarque que pour $n=1$ la propriété est vraie,

D'où : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) : \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt}$

**c)** Déduisons que : $\lim u_n = 4$ :

- D'après le résultat de la question II-1-b), on déduit que :

$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt = 4-4\sqrt{\frac{1}{n}}+2\sqrt{\frac{1}{n}}ln\left(\frac{1}{n}\right)$

Et puisque : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}ln\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-ln(n)}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}=$

0

alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt = 4$

Et comme :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\frac{-ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)=4$

D'où en déduit d'après les propriétés des limites et ordres que : $\boxed{\lim u_n = 4}$

## Exercice 6 : (2.5 pts)

$(\forall x \in [0,+\infty[) : \quad g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt \quad$ et $\quad (\forall x \in \mathbb{R}) : \quad k(x) = \int_{1}^{x} e^{-t^2}dt$

**1 - a)** Vérifions que : $\quad (\forall x \in [0,+\infty[) : \quad g(x) = -k(\sqrt{x})$

- Soit $x \in [0,+\infty[$ , on a :

$$k(\sqrt{x}) = \int_{1}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt = -\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt = -g(x)$$

Donc : $\boxed{(\forall x \in [0,+\infty[) : \quad g(x) = -k(\sqrt{x})}$

**b)** Montrons que $g$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ :

- On a : $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (comme composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ).

Donc : la fonction $k : x \longmapsto \int_{1}^{x} e^{-t^2}dt$ est dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$.

Et puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ et prend ces valeur dans $\mathbb{R}$.

Alors : la fonctions $x \longmapsto k(\sqrt{x})$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ par composition.

Par suite : $g = -k$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$

**c)** Calculons $g'(x)$ pour tout $x \in ]0,+\infty[$ et déduisons que $g$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ :

- Soit $x \in ]0,+\infty[$ , on a :

$$g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}k'(\sqrt{x}) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}e^{-(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$$

Donc : $\boxed{\forall x \in ]0,+\infty[ \quad g'(x) = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{x}}}$

- De l'expression de $g'(x)$ on déduit que $\forall x \in ]0,+\infty[ \quad g'(x) < 0$ et comme $g$ comme à droite de 0 , on conclut que : $g$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

**2 - a)** Montrons que : $(\forall x > 0)$ : $\quad \frac{g(x)-g(0)}{x} < \frac{-1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$

Soit $x > 0$

On a $g$ est continue sur $[0,x] \subset [0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[ \subset [0,+\infty[$

Donc d'après le théorème des accroissement finis il existe $c \in ]0,x[$ tel que : $g(x)-g(0) =$

$(x-0)g'(c)$

c-à-d : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \dfrac{-e^{-c}}{2\sqrt{c}}$

et comme :

$$\begin{aligned} 0<c<x &\Longrightarrow -x<-c<0 \quad \text{et} \quad 0<2\sqrt{c}<2\sqrt{x} \\ &\Longrightarrow e^{-x}<e^{-c}<1 \quad \text{et} \quad 0<\frac{1}{2\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{c}} \\ &\Longrightarrow \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}<\frac{e^{-c}}{2\sqrt{c}} \\ &\Longrightarrow \frac{-e^{-c}}{2\sqrt{c}}<\frac{-e^{-x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{(\forall x>0) : \quad \dfrac{g(x)-g(0)}{x} < \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}e^{-x}}$

**b)** Déduisons que $g$ n'est pas dérivable à droite en 0 et donnons une interprétation graphique du résultat obtenu :

-En utilisant le résultat précédent et les propriétés des limites et ordre et en tenant compte que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-e^{-x}}{\sqrt{x}} = -\infty$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -e^{-x} = -1$

Alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = -\infty}$ , Ce qui montre que $g$ n'est pas dérivable à droite de 0

Et donc la courbe de $g$ admet à droite du point $(0, g(0))$ une demi-tangente verticale dirigé vers le bas.

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2015

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux répartis suivant les domaines comme suit :***

- Exercice 1 : **Nombres complexes** ........ **3 points**
- Exercice 2 : **Arithmétique** ........ **3 points**
- Exercice 3 : **Structures algébriques** ........ **4 points**
- Exercice 4 : **Analyse** ........ **6.5 points**
- Exercice 5 : **Analyse** ........ **3.5 points**

## Exercice 1 : ( 3 pts )

**1 -** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

**0,25 pt** **a)** Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation $(E)$.

**0,5 pt** **b)** Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : $b \in \mathbb{R}$)

**0.25 pt** **c)** Vérifier que : $b = (1 - i\sqrt{3})a$

**2 -** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
Soit $A$ le point d'affixe $a$ et $B$ le point d'affixe $b$.

**0,5 pt** **a)** Déterminer $b_1$ l'affixe du point $B_1$ image du point $O$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

**0,5 pt** **b)** Montrer que $B$ est l'image de $B_1$ par l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\sqrt{3}$.

**0,5 pt** **c)** Vérifier que : $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

**0,5 pt** **d)** Soit $C$ un point, d'affixe $c$, appartenant au cercle circonscrit au triangle $OAB$ et différent de $O$ et de $A$. Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{c}{c-a}$

## Exercice 2 : ( 3 pts )

Soit $x$ un nombre entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

**0,25 pt** **1 -** Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

**2 -** Soit $d$ un diviseur commun de $x$ et de 2015

**0,5 pt** **a)** Montrer que $d$ divise 1436.

**0,5 pt** **b)** Déduire que $x$ et 2015 sont premiers entre eux.

**0,75 pt** **3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que :
$x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$ ).

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis déduire que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$.

**0,5 pt** **4 -** Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$.

## Exercice 3 : (4pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont l'unité $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif. Pour tout réel $x$, on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$
et on considère l'ensemble $E = \{M(x) / x \in \mathbb{R}\}$.

On munit $E$ de la loi de composition interne $T$ définie par :

$$\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad M(x) T M(y) = M(x + y + 1)$$

**1 -** Soit $j$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $E$ définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad j(x) = M(x - 1)$

0,5 pt **a)** Montrer que $j$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,T)$.

0,5 pt **b)** Montrer que $(E,T)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right) \quad M(x)\times M(y)=M(x+y+\text{xy})$.

0,5 pt **b)** En déduire que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ et que la loi " $\times$ " est commutative dans $E$.

0,5 pt **c)** Montrer que la loi " $\times$ " est distributive par rapport à la loi " $T$ " dans $E$.

0,5 pt **d)** Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans $(E,T)$ et que I est l'élément neutre dans $(E,\times)$.

0,25 pt **3 - a)** Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}) \quad M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)=I$.

0,75 pt **b)** Montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif.

## Exercice 4 : (6.5pts)

**Partie I :** Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \ \ et \quad f(x)=x\left(1+\ln^2 x\right) \text{ pour } x>0$$

Soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction $f$ est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

0,5 pt **c)** Calculer $f'(x)$ pour $x>0$, en déduire que $f$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

0,25 pt **3 - a)** Montrer que la courbe $(C)$ admet un point d'inflexion I d'abscisse $e^{-1}$.

0,25 pt **b)** Étudier la position relative de la courbe $(C)$ par rapport à la droite d'équation : $y=x$.

0,5 pt **c)** Tracer la courbe $(C)$. (On prendra $e^{-1}\approx 0,4$).

**Partie II :** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geqslant0}$ définie par :

$$u_0=e^{-1} \quad et \quad (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)$$

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ e^{-1}\leqslant u_n<1$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant0}$ est strictement croissante, puis déduire qu'elle est convergente.

**3 -** On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

0,25 pt **a)** Montrer que $e^{-1}\leqslant l\leqslant 1$

0,5 pt **b)** Déterminer la valeur de $l$.

**Partie III :** Soit la fonction numérique $F$ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_1^x f(t)\text{dt}$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $H : x\mapsto -\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x^2\ln x$ est une primitive de la fonction $h : x\mapsto x\ln x$ sur $]0,+\infty[$.

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad \int_1^x t\ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)dt$

**0,5 pt** **c)** En déduire que : $(\forall x > 0) \quad F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$

**0,25 pt** **2 - a)** Montrer que la fonction $F$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

**0,5 pt** **b)** Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ puis déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

## Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique $g$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \quad \text{pour} \quad x > 0$$

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad (\forall t \in [x, 2x]) \quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$.

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad e^{-2x}\ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\ln 2$. .

**0,25 pt** **c)** En déduire que la fonction $g$ est continue à droite en $0$ .

**0,75 pt** **2 -** Montrer que la fonction $g$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$. .

**0,5 pt** **3 - a)** Montrer que : $(\forall t > 0) \quad -1 \leqslant \frac{e^{-t} - 1}{t} \leqslant e^{-t}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis )

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad -1 \leqslant \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leqslant \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$..

**0,5 pt** **c)** En déduire que la fonction $g$ est dérivable à droite en $0$ .

$$\boxed{\text{FIN}}$$

R O Y A U M E D U M A R O C

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : NORMAL 2015

MATHÉMATIQUES

### Exercice 1 : (3 pts)

**1 -** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z^2 - (5+i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$

0.25 pt **a)** Vérifions que $(3-i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation $(E)$.

On a dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - \left(5+i\sqrt{3}\right)z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$, donc le discriminant de l'équation est

$$\begin{aligned} \triangle = b^2 - 4ac &= \left(5+i\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 1\times\left(4+4i\sqrt{3}\right) \\ &= 25 + 10i\sqrt{3} - 3 - 16 - 16i\sqrt{3} \\ &= 9 - 6i\sqrt{3} - 3 \\ &= \left(3-i\sqrt{3}\right)^2 \end{aligned}$$

0.5 pt **b)** Déterminons a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que $b\in\mathbb{R}$)

Puisque $\triangle = \left(3-i\sqrt{3}\right)^2 \neq 0$, donc ses racines carrées sont $3-i\sqrt{3}$ et $-3+i\sqrt{3}$, alors l'équation admet deux solutions qui sont

$$\begin{array}{lcccc} & z_1 = \dfrac{-b+3-i\sqrt{3}}{2a} & et & z_2 = \dfrac{-b-3+i\sqrt{3}}{2a} \\ \Leftrightarrow & z_1 = \dfrac{(5+i\sqrt{3})+(3-i\sqrt{3})}{2} & et & z_2 = \dfrac{(5+i\sqrt{3})-(3-i\sqrt{3})}{2} \\ \Leftrightarrow & z_1 = \dfrac{8}{2} & et & z_2 = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow & z_1 = 4 & et & z_2 = 1+i\sqrt{3} \end{array}$$

D'où $a = 1+i\sqrt{3}$ et $b = 4$ (car $b\in\mathbb{R}$)

**0.25 pt** **c)** Vérifions que $b = (1 - i\sqrt{3})a$

On a $a = 1 + i\sqrt{3} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{1^2 - (i\sqrt{3})^2}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{1+3}{1-i\sqrt{3}}$

Donc $\left(1 - i\sqrt{3}\right)a = 4 = b$, d'où $b = \left(1 - i\sqrt{3}\right)a$

**2 -** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. Soit $A$ le point d'affixe $a$ et $B$ le point d'affixe $b$.

**0.5 pt** **a)** Déterminons $b_1$ l'affixe du point $B_1$ image du point $O$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit $z$ l'affixe du point $M$ et $z'$ l'affixe du point $M'$ image de M par la rotation $R$ de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire $R(M) = M'$, donc $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a)$ Alors

$$\begin{array}{rrcl} & z' &=& \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)(z-a) + a \\ \Leftrightarrow & z' &=& (0 + i\times 1)\left(z - 1 - i\sqrt{3}\right) + 1 + i\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow & z' &=& iz - i + \sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow & z' &=& iz + i\left(\sqrt{3} - 1\right) + \sqrt{3} + 1 \end{array}$$

On a $R(O) = B_1$, donc

$$\begin{array}{lrcl} & z_{B_1} &=& iz_O + i\left(\sqrt{3}-1\right) + \sqrt{3} + 1 \\ \textit{Alors} & b_1 &=& i\times 0 + i\left(\sqrt{3}-1\right) + \sqrt{3} + 1 \\ \text{D'où} & b_1 &=& i\left(\sqrt{3}-1\right) + \sqrt{3} + 1 \end{array}$$

**0.5 pt** **b)** Montrons que $B$ est l'image de $B_1$ par l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\sqrt{3}$.

Soit $z$ l'affixe du point $M$ et $z'$ l'affixe du point $M'$ image de M par l'homothétie $R$ de centre $A$ et de rapport $\sqrt{3}$, c'est à dire $h(M) = M'$, donc $z' - a = k(z - a)$.

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Alors} & z' &=& \sqrt{3}(z-a) + a \\ \Leftrightarrow & z' &=& \sqrt{3}\left(z - 1 - i\sqrt{3}\right) + 1 + i\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow & z' &=& \sqrt{3}z - \sqrt{3} - 3i + 1 + i\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow & z' &=& \sqrt{3}z + i\left(\sqrt{3} - 3\right) - \sqrt{3} + 1 \end{array}$$

Si on remplace $z$ par $b_1$, On a

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3}b_1 + i\left(\sqrt{3}-3\right) - \sqrt{3} + 1 &=& \sqrt{3}\left(i\left(\sqrt{3}-1\right) + \sqrt{3} + 1\right) + i\left(\sqrt{3}-3\right) - \sqrt{3} + 1 \\ &=& 3i - i\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} + i\sqrt{3} - 3i - \sqrt{3} + 1 \end{array}$$

Donc $\sqrt{3}b_1 + i\left(\sqrt{3}-3\right) - \sqrt{3} + 1 = 4 = b$. D'où $h(B_1) = B$

**0.5 pt** **c)** Vérifions que $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

On a

$$\frac{b}{b-a} = \frac{(1-i\sqrt{3})\,a}{(1-i\sqrt{3})\,a-a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1} = \frac{i+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1+\frac{1}{\sqrt{3}}i \quad = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\dfrac{\pi}{6}}$$

D'où $\quad arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

0.5 pt

**d)** Soit $C$ un point, d'affixe $c$, appartenant au cercle circonscrit au triangle $OAB$ et différent de $O$ et de $A$. Déterminons un argument du nombre complexe $\frac{c}{c-a}$

Puisque $C$ appartient au cercle circonscrit au triangle $OAB$, donc les points $O, A, B$ et $C$ sont cocycliques.

$$\begin{aligned}
&\textit{Donc} && \frac{z_C-z_O}{z_C-z_A} \div \frac{z_B-z_O}{z_B-z_A} \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow && \frac{c}{c-a} \div \frac{b}{b-a} \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow && arg\left(\frac{c}{c-a} \div \frac{b}{b-a}\right) \equiv 0 \quad [2\pi]\\
&\Leftrightarrow && arg\left(\frac{c}{c-a}\right) - arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv 0 \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

Puisque $\quad arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

D'où $\quad arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

## Exercice 2 : (3 pts)

Soit $x$ un nombre entier relatif tel que $x^{1439} \equiv 1436 \quad [2015]$

0.25 pt

**1 -** Sachant que $1436\times1051-2015\times749 = 1$, montrons que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

Rappel (Théorème de Bézout) : $\quad a \wedge b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, u, v \in \mathbb{Z};\ au+bv = 1$

On a $1436 \times 1051 + 2015 \times (-749) = 1$, alors d'après le théorème de Bézout ; on a

$$2015 \wedge 1436 = 1$$

D'où $\quad$ 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

**2 -** Soit $d$ un diviseur commun de $x$ et de 2015.

0.5 pt

**a)** Montrons que $d$ divise 1436

On a $x^{1439} \equiv 1436 \quad [2015]$

$$\Rightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z}); \quad x^{1439} - 1436 = 2015k$$
$$\Rightarrow (\exists\, k \in \mathbb{Z}); \quad x^{1439} - 2015k = 1436$$

Puisque $d_x$ et $d_{2015}$, donc $d_{x^{1439}}$ et $d_{2015k}$

Alors $d_{x^{1439}-2015k}$, donc $d_{1436}$

D'où $d$ divise 1436.

0.5 pt **b)** Déduirons que $x$ et 2015 sont premiers entre eux.

On pose $x \wedge 2015 = d$, donc $d_x$ et $d_{2015}$

Alors d'après la question $2-b)$ ; $d_{1436}$, et puisque $d_{2015}$

Donc $d_{1436\times 1051}$ et $d_{2015\times 749}$

$$\Rightarrow \quad d_{1436\times 1051 - 2015\times 749} \,; \quad \text{c'est à dire} \quad d_1$$

Donc $d = -1$ ou $d = 1$, alors $d = 1$

D'où $x$ et 2015 sont premiers entre eux.

0.75 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de Fermat, montrons que

$x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$ ).

Rappel (Théorème de Fermat) : $p \in \mathbb{P}$ et $a \wedge p = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

On a $2015 = 5 \times 13 \times 31$, et on a $x \wedge 2015 = 1$

Donc $x \wedge (5 \times 13 \times 31) = 1$, alors $x \wedge 5 = x \wedge 13 = x \wedge 31 = 1$

On sait que $5, 13$ et $31$ sont des nombres premiers, et $x$ un entier relatif non nul et pas divisible par les nombres $5, 13$ et $31$. Alors d'après le théorème de Fermat

$$\begin{array}{lllll}
 & x^{5-1} \equiv 1 \quad [5]\,; & x^{13-1} \equiv 1 \quad [13] & \text{et} & x^{31-1} \equiv 1 \quad [31] \\
\Rightarrow & x^{4} \equiv 1 \quad [5]\,; & x^{12} \equiv 1 \quad [13] & \text{et} & x^{30} \equiv 1 \quad [31] \\
\Rightarrow & (x^{4})^{360} \equiv 1 \quad [5]\,; & (x^{12})^{1200} \equiv 1 \quad [13] & \text{et} & (x^{30})^{48} \equiv 1 \quad [31] \\
\Rightarrow & x^{1440} \equiv 1 \quad [5]\,; & x^{1440} \equiv 1 \quad [13] & \text{et} & x^{1440} \equiv 1 \quad [31]
\end{array}$$

0.5 pt **b)** Montrons que $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis déduire que $x^{1440} \equiv 1[2015]$.

On a d'après $3-b)$ ; $x^{1440} \equiv 1 \quad [5]$ et $x^{1440} \equiv 1 \quad [13]$

Donc $5_{x^{1440}-1}$ et $13_{x^{1440}-1}$

et puisque $5 \wedge 13 = 1$, donc $5 \times 13_{x^{1440}-1}$

$$\Rightarrow \quad 65_{x^{1440}-1}$$
$$\Rightarrow \quad x^{1440} \equiv 1 \quad [65]$$

et on a $x^{1440} \equiv 1 \quad [31]$, donc $65_{x^{1440}-1}$ et $31_{x^{1440}-1}$

Puisque $65 \wedge 31 = 1$, donc $65 \times 31_{x^{1440}-1}$

$$\Rightarrow \quad 2015_{x^{1440}-1}$$

D'où $x^{1440} \equiv 1 \quad [2015]$

**0.5 pt** **4 -** Montrons que $x \equiv 1051[2015]$

On a $x^{1439} \equiv 1436 \quad [2015]$, donc $x^{1440} \equiv 1436\,x \quad [2015]$

et on a $x^{1440} \equiv 1 \quad [2015]$. Donc $1436x \equiv 1 \quad [2015]$

Puisque $1436 \times 1051 - 1 = 2015 \times 749$, donc $1436 \times 1051 \equiv 1 \quad [2015]$

Alors $1436x - 1436 \times 1051 \equiv 0 \quad [2015]$

$$\Rightarrow \quad 1436(x - 1051) \equiv 0 \quad [2015]$$

$$\Rightarrow \quad 2015_{1436(x-1051)}$$

$$\Rightarrow \quad 2015_{x-1051} \qquad (\text{car} \quad 2015 \wedge 1436 = 1)$$

$$\Rightarrow \quad x - 1051 \equiv 0 \quad [2015]$$

D'où $x \equiv 1051 \quad [2015]$

## Exercice 3 : (4 pts)

$(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont l'unité est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif. Pour tout nombre réel $x$, on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E = \{M(x)x \in \mathbb{R}\}$. On munit $E$ de la loi de composition interne $T$ définie par

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\,; \quad M(x)TM(y) = M(x+y+1)$$

**1 -** Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $E$ définie par $(\forall x \in \mathbb{R})\,; \quad \varphi(x) = M(x-1)$

**0.5 pt** **a)** Montrons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, T)$.

On a $\varphi(x+y) = M(x+y-1)\,; \quad (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$

et $\varphi(x)T\varphi(y) = M(x-1)TM(x-1) = M(x-1+y-1+1) = M(x+y-1)\,; \; (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$

Donc $\varphi(x+y) = \varphi(x)T\varphi(y)\,; \quad (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$

D'où $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, T)$.

**0.5 pt** **b)** Montrons que $(E, T)$ est un groupe commutatif .

On a $\varphi(x+1) = M(x+1-1) = M(x)\,; \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

Donc $(\forall M \in E), (\exists m \in \mathbb{R})\varphi(m) = M$, c'est à dire $\varphi(\mathbb{R}) = E$

Alors $\varphi$ est surjective, et puisque $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

D'où $(E,T)$ est aussi un groupe commutatif d'élément neutre $\varphi(0) = M(-1)$ .

**0.5 pt** **2 - a)** Montrons que $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$ $M(x) \times M(y) = M(x+y+\text{xy})$.

On a $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ ; $(\forall x \in \mathbb{R})$

Donc $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-x)(1-y)-2xy & (1-x)y+x(1+2y) \\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-x-y+xy-2xy & x+y-xy+2xy \\ -2x-2y+2xy-4xy & -2xy+1+2x+2y+4xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-(x+y-xy) & x+y+xy \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix} \\ &= M(x+y+xy) \end{aligned}$$

D'où $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$

**0.5 pt** **b)** Déduirons que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ et que la loi " $\times$ " est commutative dans $E$.

On a $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$ ; $x+y+xy \in \mathbb{R}$

Donc $(\forall (M(x), M(y)) \in E^2)$ ; $M(x+y+xy) \in E$

$\Rightarrow$ $(\forall (M(x) \times M(y)) \in E^2)$ ; $M(x+y+xy) \in E$

Alors $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$, et on a

$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$ ; $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy) = M(y+x+yx) = M(y) \times M(x)$

D'où la loi $\times$ est commutative dans $E$.

**0.5 pt** **c)** Montrons que la loi " $\times$ " est distributive par rapport à la loi " $T$ " dans $E$.

On a $(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$ ;

$$\begin{aligned} M(x) \times (M(y)TM(z)) &= M(x) \times M(y+z+1) \\ &= M(x+y+z+1+x(y+z+1)) \\ &= M(2x+y+z+xy+xz+1) \end{aligned}$$

et on a aussi $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$ ;

$$\begin{aligned}(M(x)\times M(y))\,T(M(x)\times M(z)) &= M(x+y+xy)TM(x+z+xz)\\ &= M(x+y+xy+x+z+xz+1)\\ &= M(2x+y+z+xy+xz+1)\end{aligned}$$

Donc $M(x)\times(M(y)TM(z)) = (M(x)\times M(y))\,T(M(x)\times M(z))$

et comme les lois $\times$ et $T$ sont commutatives, alors

$$(M(y)TM(z))\times M(x) = (M(y)\times M(x))T(M(z)\times M(x))$$

D'où la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $T$ dans $E$.

0.5 pt **d)** Vérifions que $M(-1)$ est l'élément neutre dans $(E,T)$ et que I est l'élément neutre dans $(E,\times)$.

✓ Comme 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{R},+)$, alors $\varphi(0)$ sera l'élément neutre pour $(E,T)$, avec $\varphi(0) = M(0-1) = M(-1)$

(On a aussi $M(x)TM(-1) = M(-1)TM(x) = M(x-1+1) = M(x);\ \forall x\in\mathbb{R}$ )

Donc $M(-1)$ est l'élément neutre dans $(E,T)$.

✓ Puisque $M(0) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R})$ ; $M(x)\times I = M(x)\times M(0) = M(x+0+0) = M(x)$

Et $I\times M(x) = M(0)\times M(x) = M(0+x+0) = M(x)$

Donc $M(x)\times I = I\times M(x) = M(x)$

D'où $I$ est l'élément neutre dans $(E,\times)$.

0.25 pt **3 - a)** Vérifions que $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})\quad M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right) = I.$

On a $(\forall x\in\mathbb{R}\{1\})$

$$\begin{aligned}M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) &= M\left(x+-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}\right)\\ &= M\left(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right)\\ &= M(0)\\ &= I\end{aligned}$$

0.75 pt **b)** Montrons que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif.

On a $(E,T)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(-1)$.

La loi $\times$ est une loi de composition interne commutative dans l'ensemble $E$. Elle est distributive pour $T$ dans $E$ et d'élément neutre est $I = M(0)$.

Donc $(E, T, \times)$ est un anneau unitaire, et puisque pour tout $M(x)$ de $E\{M(-1)\}$ ; il existe une symétrique par rapport à la loi $\times$ qu'est $M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)$

D'où $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.

## Exercice 4 : (6.5 pts)

### Partie I

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x\left(1 + ln^2 x\right) \qquad \text{pour} \quad x > 0$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**0.5 pt** **1 -** Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interprétons graphiquement le résultat obtenu.

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 + ln^2 x) = +\infty$

  car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + ln^2 x = +\infty$

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + ln^2 x = +\infty$

  Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

  D'où la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique suivant l'axe $(oy)$.

**0.25 pt** **2 - a)** Montrons que la fonction $f$ est continue à droite en 0.

$$\begin{aligned}
\text{On a } \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} x(1 + ln^2 x) \\
&= \lim_{x \to 0^+} x + x ln^2 x \\
&= 0 + \lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} ln x)^2 \\
&= \lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} \times 2ln\sqrt{x})^2 \\
&= \lim_{x \to 0^+} 4(\sqrt{x} \times ln\sqrt{x})^2 \\
&= 4 \times 0^2 \qquad \text{Car} \quad \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \times ln\sqrt{x} = \lim_{t \to 0^+} t \times ln t = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

D'où la fonction $f$ est continue à droite en 0.

**0.5 pt** **b)** Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interprétons graphiquement le résultat obtenu.

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + ln^2 x = +\infty,$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} ln x = -\infty$

D'où $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente suivant l'axe $(oy)$ au point O.

**0.5 pt** **c)** Calculons $f'(x)$ pour $x > 0$, en déduirons que $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

On a $(\forall x > 0)$ ;

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x(1 + ln^2x))' \\ &= x'(1 + ln^2x) + x(1 + ln^2x)' \\ &= 1 + ln^2x + x \times (2(lnx)'lnx) \\ &= 1 + ln^2x + x \times (2\frac{1}{x}lnx) \\ &= 1 + ln^2x + 2lnx \qquad (x \neq 0) \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = (lnx + 1)^2$ ; $(\forall x > 0)$

D'où la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

**0.25 pt** **3 - a)** Montrons que la courbe $(C)$ admet un point d'inflexion I d'abscisse $e^{-1}$.

On a $f'(x) = (lnx + 1)^2$ ; $(\forall x > 0)$

Donc $f'$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant un carré d'une fonction aussi dérivable.

Alors

$$\begin{aligned} f''(x) &= ((lnx + 1)^2)' \\ &= 2(lnx + 1)'(lnx + 1) \\ &= 2\frac{1}{x}(lnx + 1) \\ &= \frac{2(lnx + 1)}{x} \end{aligned}$$

et on a $lnx + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ et $lnx + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

Donc la fonction $f''$ s'annule et change de signe en $e^{-1}$.

D'où la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion $I$ d'abscisse $e^{-1}$.

**0.25 pt** **b)** Étudions la position relative de la courbe $(C)$ par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

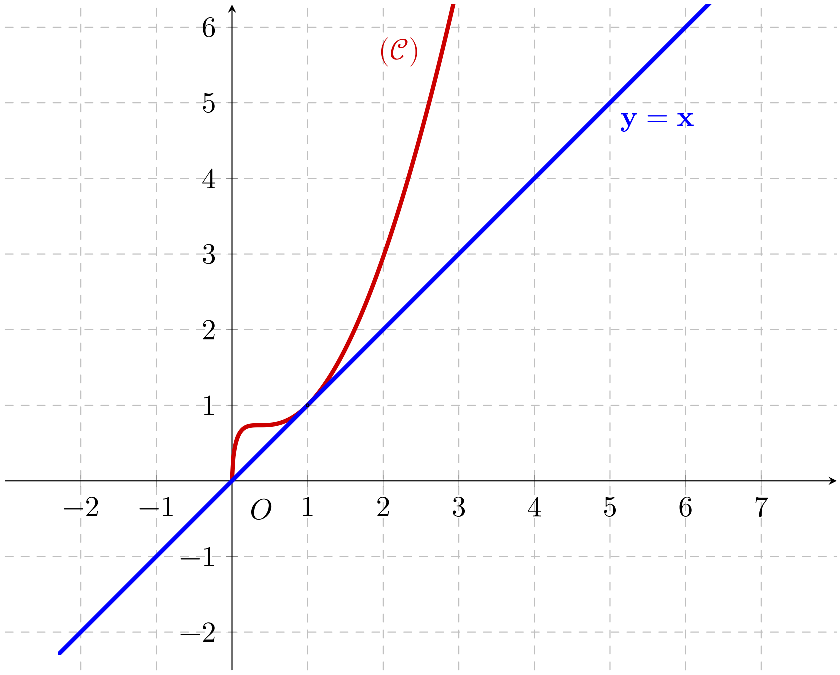
On a $(\forall x > 0)$; $f(x) - x = x(1 + ln^2x) - x = xln^2x$

Donc le signe de $f(x) - x$ est le signe de $x$. (car $ln^2x > 0$)

Alors $f(x) - x > 0$ ; $\forall x > 0$

D'où la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite d'équation $y = x$.

**0.5 pt** **c)** Traçons la courbe $(C)$. (On prendra $e^{-1} \approx 0,4$).




## Partie II

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = e^{-1} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\,;\ \ u_{n+1} = f(u_n)$$

0.5 pt **1 -** Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ ;\ \ e^{-1} \leqslant u_n < 1.$

✓ Pour $n = 0$, on a $e^{-1} \leq u_0 = e^{-1} < 1$

✓ Supposons que $e^{-1} \leq u_n < 1$, pour un $n \in \mathbb{N}$

✓ Montrons que $e^{-1} \leq u_{n+1} < 1$

$$\begin{array}{lccccl} \textit{On a} & e^{-1} & \leq & u_n & < 1 & \\ \Rightarrow & f(e^{-1}) & \leq & f(u_n) & < f(1) & (f\ \textit{est strictement croissante}) \\ \Rightarrow & e^{-1}\left(1 + ln^2(e^{-1})\right) & \leq & f(u_n) & < 1 & \\ \Rightarrow & e^{-1} < 2e^{-1} & \leq & f(u_n) & < 1 & \\ \Rightarrow & e^{-1} & \leq & f(u_n) & < 1 & \end{array}$$

Alors $e^{-1} \leq u_{n+1} < 1$

D'où $e^{-1} \leq u_n < 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **2 -** Montrons que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est strictement croissante, puis déduirons qu'elle est convergente.

On a d'après la question $3 - b)$ dans **la partie** $I$ : $f(x) \geq x; \quad \forall x > 0$

$$\Rightarrow \quad f(u_n) \geq u_n \quad \forall x > 0 \qquad (\text{car} \quad u_n \geq e^{-1} > 0)$$

Donc $u_{n+1} \geq u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, et on a $\quad u_n < 1; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

Donc $u_n$ est minorée par 1.

D'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est converge vers une limite réelle $l$.

**3 -** On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

**0.25 pt** **a)** Montrons que $e^{-1} \leq l < 1$

On a $\quad e^{-1} \leq u_n < 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ Donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-1} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où $\quad e^{-1} \leq l \leq 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**0.5 pt** **b)** Déterminons la valeur de $l$.

✓ $f$ est une fonction continue sur $[e^{-1}; 1]$

✓ $f([e^{-1}; 1]) = [2e^{-1}; 1] \subset [e^{-1}; 1]$

✓ la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente vers $l$.

Donc $l$ est solution d'équation $x = f(x)$

D'aprés **la partie I**, l'équation $x = f(x)$ admet exactement deux solution sont 0 et 1,

Or $l \in [e^{-1}; 1]$, Alors $\quad l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

## Partie III

Soit $F$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$

**0.25 pt** **1 - a)** Montrons que la fonction $H : x \mapsto -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 \ln x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

On a $\quad (\forall x \in ]0, +\infty[)$

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 lnx\right)' \\
&= -\frac{2}{4}x + \frac{1}{2}(x^2)' lnx + \frac{1}{2}x^2(lnx)' \\
&= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}2xlnx + \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x} \\
&= -\frac{1}{2}x + xlnx + \frac{1}{2}x \\
&= xlnx \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

D'où $H$ est la primitive de la fonction $h$.

**0.5 pt** **b)** Montrons que $(\forall x > 0) \quad \displaystyle\int_1^x t\ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)dt$

On pose $U(x) = ln^2(t)$ et $V'(x) = t$, donc $U'(x) = \frac{2}{t}\, lnt$ et $V(x) = \frac{1}{2}\, t^2$,
Alors

$$\int_1^x t\, ln^2(t)dt = \left[ln^2\, t \times \frac{1}{2}\, t^2\right]_1^x - \int_1^x \frac{2}{t}\, ln(t) \times \frac{1}{2}\, t^2 dt = \frac{1}{2}x^2\, ln^2 x - \int_1^x t\, ln(t)dt$$

**0.5 pt** **c)** En déduirons que : $(\forall x > 0) \quad F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$

On a $(\forall x > 0)$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x t(1 + ln^2 t)dt \\
&= \int_1^x t.dt + \int_1^x t.ln^2(t)dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x + \frac{1}{2}x^2 ln^2 x - \int_1^x h(t)dt \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 ln^2 x - [H(t)]_1^x \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 ln^2 x - \left[-\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2 lnt\right]_1^x \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 ln^2 x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{1}{4} \\
&= -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 lnx + \frac{1}{2}x^2 ln^2 x
\end{aligned}$$

D'où $\quad F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 lnx + \frac{1}{2}x^2 ln^2 x\,; \quad \forall x > 0$

**0.25 pt** **2 - a)** Montrons que la fonction $F$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On a $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ et la fonction $f$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc il admet une fonction primitive $G$ continue et dérivable sur $[0, +\infty[$

Donc $F(x) = G(x) - G(1) \quad ; \forall x \in [0, +\infty[$.

D'où la continuité de $F$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

**0.5 pt** **b)** Calculons $\lim_{x \to 0^+} F(x)$ puis déduirons la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} F(x) &= \lim_{x \to 0^+} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 lnx + \frac{1}{2}x^2 ln^2 x \\
&= \lim_{x \to 0^+} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 lnx + \frac{1}{2}(xlnx)^2 \\
&= -\frac{3}{4} + 0 - 0 + 0 = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

On a d'après la question précédente, $F$ est continue à droite de 0.

Donc $\quad F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) \quad \Rightarrow \quad \int_1^0 f(t)dt - = \frac{3}{4}$

D'où $\quad \int_0^1 f(t)dt = \frac{3}{4}$

## Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique $g$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$g(0) = ln2 \text{ et } g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{pour} \quad x > 0$$

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $(\forall x > 0) \quad (\forall t \in [x, 2x]) \quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$.

On a $\quad 0 < x \leq t \leq 2x, \quad$ donc $\quad -2x \leq -t \leq -x$

D'où $\quad (\forall x > 0), \ (\forall t \in [x, 2x])\,; \qquad e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$ (exp est strictement croissante)

0.5 pt **b)** Montrons que $(\forall x > 0) \quad e^{-2x} \ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x} \ln 2$.

On a d'après la question précédent $\quad e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x} \qquad (\forall x > 0)$

$$\begin{array}{llllll}
\Rightarrow & \dfrac{e^{-2x}}{t} & \leq & \dfrac{e^{-t}}{t} & \leq & \dfrac{e^{-x}}{t} & (\forall x > 0) \\
\Rightarrow & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt & \leq & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt & \leq & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt & (\forall x > 0) \\
\Rightarrow & e^{-2x}[ln(t)]_x^{2x} & \leq & g(x) & \leq & e^{-x}[ln(t)]_x^{2x} & (\forall x > 0) \\
\Rightarrow & e^{-2x}(ln(2x) - ln(x)) & \leq & g(x) & \leq & e^{-x}(ln(2x) - ln(x)) & (\forall x > 0) \\
\Rightarrow & e^{-2x} ln(\dfrac{2x}{x}) & \leq & g(x) & \leq & e^{-x} ln(\dfrac{2x}{x}) & (\forall x > 0)
\end{array}$$

D'où $\quad (\forall x > 0); \qquad e^{-2x} ln(2) \leq g(x) \leq e^{-x} ln(2)$

0.25 pt **c)** En déduirons que la fonction $g$ est continue à droite en 0.

On a d'après la question précédent $\quad e^{-2x} ln(2) \leq g(x) \leq e^{-x} ln(2) \quad (\forall x > 0)$

et puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{-2x} ln(2) = ln(2)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{-x} ln(2) = ln(2)$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = ln(2) = g(0)$

D'où $g$ est une fonction continue à droite en 0.

0.75 pt **2 -** Montrons que la fonction $g$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty\,[$, puis calculons $g'(x)$ pour $x > 0$.

On a la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Donc elle admet une fonction primitive $G$ continue et dérivable sur cet intervalle, et on a

$$(\forall x > 0)\,; \qquad g(x) = G(2x) - G(x)$$

et puisque $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Donc $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, $\quad$ et on a $\quad (\forall x > 0)\,;$

$$g'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2\frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$$

**0.5 pt**

**3 - a)** Montrons que $(\forall t > 0) \quad -1 \leqslant \dfrac{e^{-t} - 1}{t} \leqslant e^{-t}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis )

Rappel (Théorème des accroissements finis) : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in ]a, b[$ ; tel que : $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Soit $t > 0$, la fonction $h : x \longmapsto e^{-x}$ continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$.

(car $h$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$)

Alors d'après le théorème des accroissements finis

$$\exists\, c \in ]0, t[; \quad h'(c) = \frac{h(t) - h(0)}{t - 0} = \frac{e^{-t} - e^0}{t}$$

On a $h'(x) = -e^{-x}$ ; donc $\exists\, c \in ]0, t[; \quad -e^{-c} = \dfrac{e^{-t} - 1}{t}$

et puisque $0 < c < t$, donc $e^{-t} < e^{-c} < 1$, c'est à dire $-1 < -e^{-c} < -e^{-t}$

D'où $(\forall t > 0); \quad -1 < \dfrac{e^{-t} - 1}{t} < -e^{-t}$

**0.5 pt**

**b)** Montrons que $(\forall x > 0) \quad -1 \leqslant \dfrac{g(x) - \ln 2}{x} \leqslant \dfrac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$.

On a $(\forall t > 0); \quad -1 < \dfrac{e^{-t} - 1}{t} < -e^{-t}$

Donc $(\forall t > 0)$ ;

$$\int_x^{2x} -1dt < \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t}dt < \int_x^{2x} -e^{-t}dt$$

$$\Rightarrow \quad [-t]_x^{2x} < \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt < [e^{-t}]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad -2x + x < g(x) - ln2 < e^{-2x} - e^{-x}$$

D'où $\quad -1 < \dfrac{g(x) - ln2}{x} < \dfrac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} \qquad (\forall x > 0)$

**0.5 pt**

**c)** En déduirons que la fonction $g$ est dérivable à droite en 0.

On a
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-2x} - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{x}$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -2\frac{e^{-2x} - 1}{-2x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x}$$
$$= -2 \times 1 + 1 = -1$$

Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - ln2}{x} = -1$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1$

D'où $g$ est dérivable à droite en 0.

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat SCIENCES MATHÉMATIQUE**

**Session : Rattrapage** juillet 2015

# MATHÉMATIQUES

Série : **SCIENCES MATHÉMATIQUE**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :***

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .......... **4 points**
— Exercice 2 : **Arithmétique et Probabilités** .......... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .......... **3 points**
— Exercice 4 : **Analyse** .......... **6 points**
— Exercice 5 : **Analyse** .......... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$

♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : ( 4 pts )

**Partie I :** On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ par la loi de composition interne $*$ définie par :
$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right);\quad x*y = x+y-e^{xy}+1$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

0.5 pt **2 -** Sachant que l'équation : $(E)\ :\ 3+x-e^{2x}=0$ admet deux solutions distincts $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$, Montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

**Partie II :** On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $(\mathbf{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\\frac{y}{2}&x\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F=\left\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que **F** est un sous-espace vectoriel de l'espace $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

0.5 pt **2 -** Montrer que **F** est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

**3 -** Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers **F** définie par : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right);\quad \varphi(x+\mathrm{i}y)=M(x,y)$

0.5 pt **a)** Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathbf{F},\times)$

0.25 pt **b)** On pose $\mathbf{F}^*=\mathbf{F}-\{M(0,0)\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=F^*$

0.25 pt **c)** En déduire que $(\mathbf{F}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.75 pt **4 -** Montrer que $(\mathbf{F},+,\times)$ est un corps commutatif.

## Exercice 2 : (3 pts)

**Partie I :** Soit $a$ un élément de $\mathbf{Z}$.

0.5 pt **1 -** Montrer que si $a$ et $13$ sont premiers entre eux alors : $a^{2016}\equiv 1[13]$.

**2 -** On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ x^{2015}\equiv 2[13]$ et $x$ une solution de $(E)$.

0.5 pt **a)** Montrer que $x$ et $13$ sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** Montrer que : $x\equiv 7[13]$

0.5 pt **3 -** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ est : $S=\{7+13k/k\in\mathbb{Z}\}$

**Partie II :** Considérons une urne $U$ contenant cinquante boules numérotées de $1$ à $50$ indiscernables au toucher.

0.5 pt **1 -** On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un nombre solution de l'équation $(E)$.

0.5 pt **2 -** On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un nombre solution de l'équation$(\boldsymbol{E})$ ?

## Exercice 3 : (3 pts)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathbf{(E)} : \mathbf{z^2-(1+\mathit{i})z+2+2\mathit{i}=0}$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que $\boldsymbol{\Delta=(1-3i)^2}$ est le discriminant de l'équation $(\boldsymbol{E})$

0.5 pt **b)** Déterminer $\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}$ les solutions de l'équation $(\boldsymbol{E})$ dans $\mathbb{C}$ ( on prendra $\mathbf{z_1}$ l'imaginaire pur)

0.5 pt **c)** Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

**2 -** Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O},\vec{u},\vec{v})$

On considère les points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ d'affixes respectifs $\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}$.

0.25 pt **a)** Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{e}$ l'affixe du point $\mathbf{E}$, milieu du segment $[\mathbf{AB}]$.

**b)** Soit $\mathbf{R}$ la rotation de centre $\mathbf{A}$ d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et $\boldsymbol{c}$ l'affixe de point $\boldsymbol{C}$ tel que $\mathbf{R(E)=C}$.

0.5 pt Montrer que : $\mathbf{z_C}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

1 pt **c)** Soit $\mathbf{D}$ le point d'affixe $\mathbf{d}=1+\dfrac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\left(\dfrac{\mathbf{z_2-d}}{\mathbf{c-d}}\right)\times\left(\dfrac{\mathbf{c-z_1}}{\mathbf{z_2-z_1}}\right)$ est réel , puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

## Exercice 4 : (6 pts)

Soit $\boldsymbol{n}$ est un entier naturel non nul.

On considère la fonction $f_n$ définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$.

Et $(C_n)$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ puis interpréter graphiquement les deux résultats
0.75 pt obtenus.

0.75 pt **b)** Montrer que la fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'_n(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

0.25 pt **c)** Montrer que la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que le point $I_n\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathbb{C}_n)$.

0.5 pt **b)** Construire la courbe $(C_1)$ ,

**c)** Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C_1)$ et les droites d'équations
0.75 pt respectives : $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

**3 - a)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=x$ admet une solution unique
0.75 pt $u_n\in]0,n[$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ (\forall x\in\mathbb{R});\ f_{n+1}(x)<f_n(x)$

**c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est conver-
0.75 pt gente .

**0.5 pt** d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

## Exercice 5 : ( 4 pts )

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$.

**0.5 pt** **1 -** Montrer que la fonction $g$ est paire.

**0.75 pt** **2 -** Montrer que la fonction $g$est dérivable sur $]0,+\infty[$. puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$

**0.5 pt** **3 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $x>0$ :

$$\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$$

**0.75 pt** b) Montrer que pour tout $x$ de $]0,+\infty[$, On a : $|g(x)|\leq\frac{2}{x}$ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

**0.5 pt** **4 - a)** Montrer que : $(\forall x>0);0\leq\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{d}t\leq 2x$

(Remarquer que : $(\forall t>0)$ ; $1-\cos t\leq t$)

**0.5 pt** b) Vérifier que $(\forall x>0);g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt$

**0.5 pt** c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

FIN

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : RATTRAPAGE 2015**

## MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (4 pts)

### PARTIE I

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :
$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2) : x*y = x+y-\mathrm{e}^{xy}+1$

**0.25 pt** **1 -** • Montrons que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2) : x*y = x+y-\mathrm{e}^{xy}+1 = y+x-\mathrm{e}^{xy}+1 = y*x$

On a : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ x*y = y*x$

Donc : la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$

**0.5 pt** • Montrons que la loi $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera .

Soit y=$a$ dans $\mathbb{R}$ l'élément neutre de la loi $*$ dans $\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\text{Alors } x*a = x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}) &\Longrightarrow x+a-\mathrm{e}^{xa}+1 = x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R})\\
&\Longrightarrow \mathrm{e}^{xa} = a+1\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}\\
&\Longrightarrow \ln(\mathrm{e}^{xa}) = \ln(a+1)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}\\
&\Longrightarrow xa = \ln(a+1)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}\\
&\Longrightarrow xa+0 = 0x+\ln(a+1)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}\\
&\Longrightarrow \begin{cases}\text{Et bien } a=0\\ \text{Et bien } \ln(a+1)=0\end{cases}\\
&\Longrightarrow a = 0\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Et comme $*$ est commutative donc : $\forall x\in\mathbb{R};\ x*0 = 0*x = x$

D'où l'élément neutre de la loi $*$ est 0

***Remarque*** : **j'ai utilisé le fait que deux polynômes** $\sum_{0}^{n} a_i x^i$ **et** $\sum_{0}^{n} b_i x^i$ **sont égaux si et seulement si :** $\forall 1\leq i\leq n`\ ;\ a_i = b_i$

**0.5 pt** **2 -** Montrons que la loi $*$ n'est pas associative dans $\mathbb{R}$ .

On a : $\alpha$ et $\beta$ deux solutions différentes de l'équation $3+x-e^{2x}=0$

C'est-à-dire : $3+\alpha-e^{2\alpha}=3+\beta-e^{2\beta}=0$

C'est-à-dire : $2+\alpha-e^{2\alpha}+1=2+\beta-e^{2\beta}+1=0$

C'est-à-dire : $\alpha*2=2*\alpha=\beta*2=2*\beta=0$

Donc : $(\alpha*2)*\beta=0*\beta=\beta$ et $\alpha*(2*\beta)=\alpha*0=\alpha$

Et comme $\alpha\neq\beta$ Donc $\alpha*(2*\beta)\neq(\alpha*2)*\beta$

D'où la loi $*$ n'est pas associative dans $\mathbb{R}$

## Partie II

$F=\{M(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ tel que $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$

**0.5 pt** **1 -** Montrons que $F$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

$F\subset M_2(\mathbb{R})$ (d'après la définition ) et $F\neq\emptyset$ car $(I=M(1,0)\in F)$

$\forall(M(x,y),M(z,t))\in F^2$ et $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

On a :
$$\begin{aligned}\alpha M(x,y)+\beta M(z,t) &= \begin{pmatrix} \alpha x & -2\alpha y \\ \frac{\alpha y}{2} & \alpha x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta z & -2\beta t \\ \frac{\beta t}{2} & \beta z \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \alpha x+\beta z & -2(\alpha y+\beta t) \\ \frac{\alpha y+\beta t}{2} & \alpha x+\beta z \end{pmatrix}\\ &= M(\alpha x+\beta z,\alpha y+\beta t)\end{aligned}$$

Donc $\alpha M(x,y)+\beta M(z,t)\in F$

D'où $F$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

**0.5 pt** **2 -** Montrons que $F$ est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

D'abord $F$ est une partie non-vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisqu'elle contient des matrices carrées d'ordre 2 dont l'élément $\mathcal{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fait partie Soient $(M(x,y),M(z,t))\in F^2$

On a
$$M(x,y)\times M(z,t)=\begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} z & -2t \\ \frac{t}{2} & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xz-yt & -2(xt+yz) \\ \frac{yz+xt}{2} & -yt+xz \end{pmatrix}$$
$$=M(xz-yt,xt+yz)\in F$$

Donc $F$ est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

**3 - a)** $\varphi$ une application de $\mathbb{C}^*$ vers $F$.

**0.5 pt**

- Montrons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F,\times)$

Soient $(x+iy)$ et $(z+it)$ deux nombres complexes non-nuls

$$\begin{aligned}\varphi((x+iy)\times(z+it)) &= \varphi(xz-yt+i(xt+yz))\\ &= M(xz-yt,xt+yz)\\ &= M(x,y)\times M(z,t) \qquad \text{(d'après la question 2)}\\ &= \varphi(x+iy)+\varphi(z+it)\end{aligned}$$

Donc $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F,\times)$

**0.25 pt** **b)** On pose $F^* = F - \{M(0,0)\}$

- Montrons que $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$

Soit $M(a;b)$ un élément de $F^*$

Donc $M(a;b) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}$ ; $(a;b) \neq (0;0)$

L'équation $\varphi(x+iy) = M(a;b)$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{C}^*$ et c'est le nombre complexe $a+ib$ car $\varphi(x+iy) = M(a;b)$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = a \neq 0 \\ y = b \neq 0 \end{cases}$$

Ainsi on a montré : $(\forall M(a;b) \in F)(\exists!(x+iy) \in \mathbb{C}^*)$ : $\varphi(x+iy) = M(a;b)$

D'où $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $F^*$

$\boxed{\text{Donc } \varphi(\mathbb{C}^*) = F^*}$

**0.25 pt** **c)** Montrons que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif.

On a $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif et $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(F, \times)$ et $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$

$\boxed{\text{Donc } (F^*, \times) \text{ est un groupe commutatif}}$

**0.75 pt** **4 -** Montrons que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif.

- Comme $F$ est un sous-espace de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

alors $(F, +)$ est un groupe commutatif.

- $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif.
- Comme $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $M_2(\mathbb{R})$ et $F$ stable par $\times$

et par $+$ alors la loi $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $F$.

$\boxed{\text{Donc } (F, +, \times) \text{ est un corps commutatif}}$

## Exercice 2 : (3 pts)

### Partie I

**0.5 pt** **1 -** $a \in \mathbb{Z}$ ; Montrons que $a \wedge 13 \Rightarrow a^{2016} \equiv 1[13]$ .

Le nombre 13 est un nombre premier, alors d'après le théorème de Fermat on a : $a^{13} \equiv a[13]$

Et comme $a \wedge 13 = 1$, alors $a$ est non divisible par 13

Donc $a^{12} \equiv 1[13] \Rightarrow (a^{12})^{168} \equiv 1^{168}[13]$

En fin on a : $a \wedge 13 \Rightarrow a^{2016} \equiv 1[13]$

$\boxed{\text{Donc } a \wedge 13 \Rightarrow a^{2016} \equiv 1[13]}$

**2 -** On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)$ : $x^{2015} \equiv 2[13]$ soit $x$ une solution de l'équation $(E)$.

**0.5 pt** **a)** Montrons que 13 et $x$ sont premiers entre eux.

Par l'absurde on supposons que $x$ est divisible par 13

$$\begin{cases} 13/x \\ x^{2015} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13/x^{2015} \\ x^{2015} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 13/2$$

C'est l'absurde, alors $x$ n'est pas divisible par 13

$\boxed{\text{Donc 13 et } x \text{ sont premiers entre eux}}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que $x \equiv 7[13]$ .

- Comme $x$ et 13 sont premiers entre eux, alors d'après la question $a)$ on a $x^{2016} \equiv 1[13]$
- et puisque $x^{2015} \equiv 2[13]$ alors $x^{2016} \equiv 2x[13]$
- Nous concluons que $2x \equiv 1[13] \Rightarrow 14x \equiv 7[13]$ et de plus $14x \equiv x[13]$ alors $x \equiv 7[13]$

$\boxed{\text{Donc } x \equiv 7[13]}$

**0.5 pt** **3 -** Montrons que l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ est $S = \{7 + 13k \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

- On a $x^{2015} \equiv 2[13] \Rightarrow x \equiv 7[13]$
- Montrons que $x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13]$
- On a $x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 7^{2015}[13]$ $\qquad (*)$
- Déterminons le reste de $7^n$ par 13 .

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| le reste de $7^n$ par 13 | 10 | 5 | 9 | 11 | 12 | 6 | 3 | 8 | 4 | 2 | 1 |

- On a donc $\begin{cases} 7^{12} \equiv 1[13] \\ 7^{11} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 7^{12\times167+11} \equiv 2[13] \Rightarrow 7^{2015} \equiv 2[13]$
- d'après $(*)$ $\qquad x \equiv 7[13] \Rightarrow 7^{2015} \equiv 2[13]$
- Nous avons montré que l'équation $(E) \Leftrightarrow x \equiv 7[13]$ et $x \equiv 7[13] \Leftrightarrow (x - 7 = 13k\,;\, k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{\text{D'où } S \text{ est l'ensemble des solutions de l'équation } (E)}$

## Partie II

Une urne contient 50 boules portant les numéros de 1 à 50 (les boules sont indiscernables au toucher)

**0.5 pt** **1 -** On tire au hasard une boule de l'urne.

- Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro qui est solution de l'équation $(E)$ ?

Soit $n$ le numéro de la boule tirée

On a $\begin{cases} n \in S \\ n \in \{1, 2, ..., 50\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}\,;\, n = 7 + 13k \\ n \in \{1, 2, ..., 50\} \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{7, 20, 33, 46\}$

Donc la probabilité recherchée est $\dfrac{4}{50}$

$\boxed{\text{D'où la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro qui est solution de l'équation } (E) \text{ est } \dfrac{2}{25}}$

0.5 pt

**2 -** On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On répète l'expérience précédente 3 fois .

- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro qui est solution de l'équation $(E)$ ?

  - **Rappel** : soit $A$ un événement, de probabilité $p$ ,dans une expérience aléatoire.

Si $A$ est répété indépendamment $n$ fois, alors la probabilité correspondante à la vérification de $A$ exactement $k$ fois est donnée par $P(X=k)=C_n^p\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

A est un événement de probabilité $\dfrac{2}{25}$. Cet événement est répété trois fois.

C'est-à dire $n=3$ et $p=\dfrac{2}{25}$

Ainsi, la probabilité correspondante à l'obtention de $A$ exactement trois fois est donnée par :

$P(X=2)=C_2^3\times p^2\times(1-p)^{3-2}=3\times\dfrac{4}{625}\times\dfrac{23}{25}=\dfrac{276}{15625}$.

D'où la probabilité recherchée est $\dfrac{276}{15625}$

## Exercice 3 : (3 pts)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(E)$ : $z^2-(1+i)+2+2i=0$.

0.25 pt

**1 - a)** Vérifions que $(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation $(E)$ .

$\Delta=(1+i)^2-4(2+2i)=2i-8-8i=1-6i-9=(1-3i)^2$

D'où le discriminant de l'équation $(E)$ est $(1-3i)^2$

0.5 pt

**b)** Déterminons $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation $(E)$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ (on prendra $z_1$ imaginaire pur )

On a $z_1=\dfrac{1+i-1+3i}{2}=2i$ et $z_2=\dfrac{1+i+1-3i}{2}=1-i$

D'où $z_2=1-i$ et $z_1=2i$

0.5 pt

**c)** Montrons que : $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$

On a $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i-2}{2}=i-1$

$\Rightarrow\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=|i-1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Donc $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

Donc $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$

**2 -** Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère le point $A$ d'affixe $z_1$ et le point $B$ d'affixe $z_2$.

**0.25 pt**

**a)** Déterminons le nombre complexe $e$ l'affixe du point $E$ milieu du segment $[AB]$.

On a $e = \dfrac{z_1 + z_2}{2} = \dfrac{1+i}{2}$

Donc $e = \dfrac{1+i}{2}$

**b)** Soit $r$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Et soit $c$ l'affixe du point $C$ l'image du point $E$ par la rotation $r$

**0.5 pt**

- Montrons que $c = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$

$$r(E) = C \Leftrightarrow c - z_1 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(e - z_1)$$
$$\Leftrightarrow c = -i\left(\frac{1+i}{2} - 2i\right) + 2i$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{-1}{2}i + \frac{1}{2} - 2 + 2i$$
$$\Leftrightarrow c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

Donc $c = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$

**c)** On considère $D$ le point d'affixe $d = 1 + \dfrac{3}{2}i$ .

- Montrons que le nombre $\left(\dfrac{z_2 - d}{c - d}\right)\left(\dfrac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)$ est réel puis interpréter géométrique-

**1 pt**

ment le résultat obtenu.

- On a $\left(\dfrac{z_2 - d}{c - d}\right) = \dfrac{1 - i - 1 - \frac{3}{2}i}{-\frac{5}{2}} = i$

Et $\left(\dfrac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \dfrac{\frac{-3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i}{1 - 3i} = \dfrac{1}{2}\dfrac{-3 - i}{i(-i+3)} = \dfrac{-1}{2}i$

Donc $\left(\dfrac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\dfrac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = i \times \dfrac{-i}{2} = \dfrac{1}{2}$

Donc $\left(\dfrac{z_2 - d}{c - d}\right)\left(\dfrac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \dfrac{1}{2}$

- Interprétation géométrique :

On a $\left(\dfrac{z_2 - d}{c - d}\right)\left(\dfrac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$

Donc $\arg\left(\left(\dfrac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\dfrac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)\right) \equiv 0[\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z_2 - d}{c - d}\right) + \arg\left(\dfrac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) \equiv 0[\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z_2 - d}{c - d}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_2 - z_1}{c - z_1}\right)[\pi]$

Alors $\overline{(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB})} \equiv \overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}[\pi]$

Or $\dfrac{z_2 - z_1}{c - z_1} = 2i \in i\mathbb{R}$, donc les point $A$, $B$ et $C$ ne sont pas colinéaires

De même pour les points $A$, $B$ et $D$

Ainsi les quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ ne sont pas colinéaires

D'où les points $A$ , $B$ , $C$ et $D$ sont cocycliques.

## Exercice 4 : (3 pts)

Soit $n$ un entier naturel non nul .

On considère la fonction $f_n$ à variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

Soit $(C_n)$la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0.75 pt **1 - a)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-n)} = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-n)}} = 0$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-n)} = +\infty$

$\boxed{\text{D'où } \lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 1 \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0}$

- Interprétation géométrique :

$(C_n)$ `admet une asymptote au voisinage de` $+\infty$ `d'équation` $y=1$

`et` $(C_n)$ `admet une asymptote au voisinage de` $-\infty$ `d'équation` $y=0$

0.75 pt **b)** Montrons que la fonction$f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et Calculons $f_n'$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

- On a $\dfrac{-3}{2}(x-n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, car c'est une fonction affine.
- Donc $\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier car c'est une composition de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$.
- d'où $1+\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Ainsi $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (toujours positive).

Soit $x \in \mathbb{R}$ :

$$f_n'(x) = \frac{-\left(\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)'}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} = \frac{-\left(\frac{-3}{2}\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$\boxed{(\forall \in \mathbb{R})\,;\; f_n'(x) = \frac{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}}$$

0.25 pt **c)** Montrons que la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ .

On a $f_n'(x)$ est une quantité positive sur $\mathbb{R}$ comme étant une quotient de deux quantités strictement positives

Donc $(\forall \in \mathbb{R})\,;\; f_n'(x) > 0$

$\boxed{\text{D'où } f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

**0.5 pt** **2 - a)** Montrons que le point $I_n\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe $(C_n)$

On a $\forall x\in\mathbb{R}; 2n-x\in\mathbb{R}$

Et $f_n(2n-x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(2n-x-n)}}=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(n-x)}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-n)}+1}=1-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

Donc $f_n(2n-x)=1-f_n(x)$ c.à.d. $f_n(2n-x)+f_n(x)=2\times\dfrac{1}{2}$

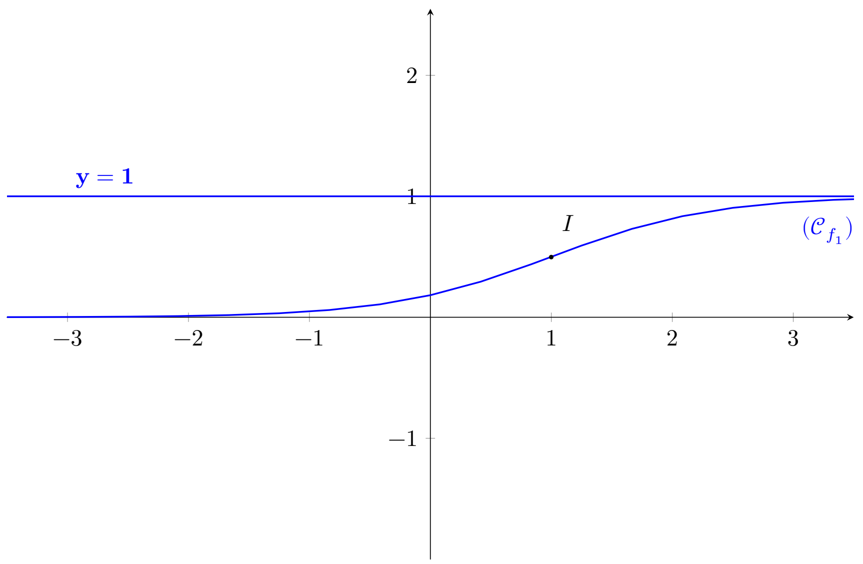
D'où $I_n\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe $(C_n)$

**0.5 pt** **b)** Construisons la courbe$(C_1)$.

- Le tableau de variations de la fonction $f_1$ :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f_1(x)$ | $0 \nearrow 1$ |

- La courbe de $f_1$




**c)** Calculons l'aire de la surface plane limitée par la courbe et les droites d'équations :

**0.75 pt** $x=0$ , $x=1$ et $y=0$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la surface plan définie par l'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et les droites d'équations $x=0, x=1$ et $y=0$

$\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^1|f_1(x)|\mathrm{d}x\ (u.a.)=\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x\ (u.a.)$ car $f_1$ est positive sur $[0,1]$.

On a $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-1)}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}}{1+\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2}{3}\frac{\left(1+\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}\right)'}{1+\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}}\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}\right)\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[\ln 2-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)\right]=\frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}\right)$

D'où $\mathcal{A}=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}\right)$

**0.75 pt** **3 - a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ Montrons que l'équation $f_n(x) = x$ admet une solution unique $u_n$ dans $]0;n[$

On pose $\varphi_n(x) = f_n(x) - x$

- $\varphi_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ \varphi_n'(x) = f_n'(x) - 1$

$$= \frac{3}{2}\frac{e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} - 1$$

$$= -\left(\frac{2+e^{-\frac{3}{2}(x_n)} + 2e^{-3(x_n)}}{2\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}\right) < 0$$

- $\varphi_n$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ Donc $\varphi_n$ bijectif de $\mathbb{R}$ vers $\varphi_n(\mathbb{R})$

et $\varphi_n(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_n(x); \lim\limits_{x\to-\infty}\varphi_n(x)\right[ = ]+\infty; -\infty[$

- On conclus que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une solution unique $u_n$

et puisque $\varphi_n(0) = f_n(0) > 0$ et $\varphi_n(n) = f_n - n = \frac{1}{2} - n < 0$,

alors d'après le $TVI$ $u_n \in ]0;n[$ .

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ \exists! u_n \in ]0;n[\ /\ f_n(u_n) = u_n$

**0.5 pt** **b)** Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall x \in \mathbb{R})\,;\ f_{n+1} - f_n < 0$

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\forall x \in \mathbb{R})$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}} - \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

$$= \frac{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)} - 1 - e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}\right)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\left(1-e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}\right)} < 0$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall x \in \mathbb{R}) f_{n+1}(x) < f_n(x)$

**0.75 pt** **c)** Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et déduisons qu'elle est convergente

- On a

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad f_{n+1}(x) < f_n(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) - x < f_n(x) - x$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(x) < \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(u_{n+1}) < \varphi_n(u_{n+1})$$

$$\Rightarrow \varphi_n(u_n) < \varphi_n(u_{n+1}) \qquad (\varphi_{n+1}(u_{n+1}) = \varphi_n(u_n))$$

et puisque la fonction $\varphi_n$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ u_{n+1} < u_n$

D'où la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante

- Puisque la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et minorée par 0 alors elle est convergente.

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente

**0.5 pt** **d)** Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et la fonction $f_n$ continue sur l'intervalle $]0;n[$

et vérifiant $f_n\left(]0;n[\right) = \left]f_n(0);\frac{1}{2}\right[ \subset ]0;n[$

- Alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ admet une limite $l$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(l) = l$ , Donc $l = 0$

$\boxed{\text{d'où } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

## Exercice 5 : (4 pts)

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$

**0.5 pt** **1 -** Montrons que la fonction $g$ est pair .

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ; $-x \in \mathbb{R}^*$

On pose $t = -u$, donc $g(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{u}\mathrm{d}u = \int_x^{3x} \frac{\cos(u)}{u}\mathrm{d}u = g(x)$

$\boxed{\text{D'où la fonction } g \text{ est pair}}$

**0.75 pt** **2 -** Montrons que la fonction $g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis Calculons $g'(x)$ pour $x > 0$.

- La fonction $t \longrightarrow \dfrac{cost}{t}$ est continue sur $]0;+\infty[$

alors admet une primitive sur cette intervalle

On a $g(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t = [\varphi(t)]_x^{3x} = \varphi(3x) - \varphi(x)$

Puisque la fonction $\varphi$ est dérivable (une primitive) sur $]0;+\infty[$,

$\boxed{\text{alors la fonction } g \text{ est dérivable sur } ]0;+\infty[}$

- $(\forall x > 0)\,;\, g'(x) = 3\varphi'(3x) - \varphi'(x) = 3\dfrac{cos3x}{3x} - \dfrac{cosx}{x} = \dfrac{cos3x - cosx}{x}$

$$\boxed{(\forall x > 0)\,;\, g'(x) = \frac{cos3x - cosx}{x}}$$

**0.5 pt** **3 - a)** Vérifions, en utilisant une intégration par parties, que :

$\forall x > 0$ ; $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\forall x > 0\,;\, \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t &= \int_x^{3x} \Bigg(\underbrace{\cos t}_{v'(t)}\Bigg)\Bigg(\underbrace{\frac{1}{t}}_{u(t)}\Bigg)\mathrm{d}t \\
&= [u(t)\times v(t)]_x^{3x} - \int_x^{3x} u'(t)\times v(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} - \int_x^{3x} -\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0; \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t}$$

**0.75 pt**

**b)** Montrons que $(\forall x>0); |g(x)|<\dfrac{2}{x}$

$$\begin{aligned}
\text{On a } (\forall x>0); |g(x)| &= \left|\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\frac{\sin 3x}{x}-\frac{\sin x}{x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\frac{\sin 3x}{3x}\right|+\left|\frac{\sin x}{x}\right|+\left|\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{3x}\right|+\left|\frac{1}{x}\right|+\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \ (\text{car } |\sin x|\leqslant 1 \text{ et } x>0\ ) \\
&\leq \frac{1}{3x}+\frac{1}{x}+\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{4}{3x}+\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Soit $t$ un élément de $]0;+\infty[$, on a $|\sin t|\leqslant 1$ et $t^2>0$

$$\begin{aligned}
\text{Donc : } \frac{|\sin t|}{t^2}\leqslant\frac{1}{t^2} \quad &\Rightarrow \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2} \\
&\Rightarrow \int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{3x}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \\
&\Rightarrow \int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t\leqslant\left[\frac{-1}{t}\right]_x^{3x} \\
&\Rightarrow \int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{-1}{3x}-\frac{-1}{x} \\
&\Rightarrow \int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}-\frac{1}{3x} \\
&\Rightarrow \int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{2}{3x}
\end{aligned}$$

D'où : $|g(x)|\leqslant\dfrac{4}{3x}+\dfrac{2}{3x}=\dfrac{6}{3x}=\dfrac{2}{x}$

$$\boxed{(\forall x>0)\,;\,|g(x)|<\frac{2}{x}}$$

**0.5 pt**

**4 - a)** Montrons que $(\forall x>0)\,;\,0\leq\displaystyle\int_x^{3x}\frac{cost-1}{t}\mathrm{d}t\leq 2x$

D'une part $\cos t\leqslant 1\Rightarrow 1-\cos t\geqslant 0\Rightarrow\dfrac{1-\cos t}{t}\geqslant 0$ car $x\leqslant t\leqslant 3x$ et $x>0$

$\Rightarrow\displaystyle\int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)\mathrm{d}t\geqslant 0$ car $0<x<3x$

D'autre part $1-\cos t\leq t\Rightarrow\dfrac{1-\cos t}{t}\leq 1$ car $t\geqslant x>0\Rightarrow\displaystyle\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{3x}1\mathrm{d}t$

Et on a $\displaystyle\int_x^{3x}1\mathrm{d}t=2x$ car $x<3x$ et la fonction $\left(\dfrac{1-\cos t}{t}\right)$ est continue sur $]0;+\infty[$

Finalement $\boxed{(\forall x>0)\,;\,0\leq\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{d}t\leq 2x}$

**0.5 pt** **b)** Vérifions que $(\forall x>0)\,;\, g(x)-\ln(3)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{1}\mathrm{d}t.$

On a : $(\forall x>0);\ \displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{d}t=\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t}{t}\right)\mathrm{d}t-\int_x^{3x}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

$$= g(x)-\int_x^{3x}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t)$$

$$= g(x)-[\ln(|t|)]_x^{3x}$$

$$= g(x)-(\ln(3x)-\ln(x))\ ;\ x\neq 0$$

$$= g(x)-\ln(\frac{3x}{x})\ ;\ x\neq 0$$

$$= g(x)-\ln(3)$$

$$\boxed{\text{Donc } (\forall x>0)\,;\, g(x)-\ln(3)=\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{1}\mathrm{d}t}$$

**0.5 pt** **c)** Déduisons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$.

On a $(\forall x>0)\,;\, 0\leq\displaystyle\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{d}t\leq 2x$

Et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 0=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x=0$ Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\displaystyle\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{d}t\right)=0$

Aussi $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{d}t\right)=0$

Et puisque $g(x)-\ln(3)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{d}t$

Alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(g(x)-\ln(3))=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{d}t\right)$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(g(x)-\ln(3))=0$

$$\boxed{\text{Ou encore } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\ln(3)}$$

FIN

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2016

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Arithmétiques** ............................................... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** ...................................... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** ........................................ **7 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** ........................................ **3 points**

## Exercice 1 : ( 3.5 pts )

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Pour tout $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ on pose : $M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ et $E = \left\{M(x,y)\,;\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

**0,5 pt** **1 -** Montrer que $E$ est un sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{R}),+)$

**0,5 pt** **2 -** Vérifier : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$ $\left(\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2\right)$ : $M(x,y) \times M(x',y') = M\left(xx'-yy', xy'+yx'\right)$

**3 -** On pose : $E^* = E - \left\{M(0,0)\right\}$ et on considère l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \mapsto E$ qui au nombre complexe $z = x+iy$ associe la matrice $M(x,y)$ de $E$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

**0,25 pt** **a)** Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(C^*,\times)$ vers $(E,\times)$

**0,75 pt** **b)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1,0)$

**0,5 pt** **4 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

**5 -** On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**0,5 pt** **a)** Calculer $A \times M(x,y)$ pour $M(x,y) \in E$

**0,5 pt** **b)** En déduire qu'aucun élément de $E$ n'admet pas de symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

## Exercice 2 : (3 pts)

### partie A :

Soit $(a,b)$ dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre **premier** 173 divise $a^3+b^3$

**0,25 pt** **1 -** Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171}\ [173]$ (remarquer que : $171 = 3 \times 57$)

**0,25 pt** **2 -** Montrer que : 173 **divise** $a$ si et seulement si 173 **divise** $b$

**0,25 pt** **3 -** On suppose que 173 **divise** $a$. Montrer que 173 **divise** $a+b$

**4 -** On suppose que 173 **ne divise pas** $a$

**0,5 pt** **a)** En utilisant le théorème de **FERMAT**, montrer que : $a^{172} \equiv b^{172}\ [173]$

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0\ [173]$

**0,5 pt** **c)** En déduire que 173 **divise** $a+b$

### partie B :

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante : $(E)\ x^3+y^3 = 173(xy+1)$

Soit $(x,y)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de $(E)$, on pose $x+y = 173k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

**0,25 pt** **1 -** Vérifier que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$

**0,5 pt** **2 -** Montrer que : $k=1$, puis résoudre l'équation $(E)$.

## Exercice 3 : (3.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans le plan complexe deux points $M_1$ et $M_2$ tels que les points $O$, $M_1$ et $M_2$ sont distincts deux à deux et non alignés.

Soient $z_1$ et $z_2$ les affixes respectives des points $M_1$ et $M_2$ et soit $M$ le point dont l'affixe $z$ vérifie la relation : $z = \dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1$

0,5 pt **b)** En déduire que le point $M$ appartient au cercle circonscrit au triangle $OM_1M_2$

0,5 pt **2 -** Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors $M$ appartient à l'axe des réels.

**3 -** On suppose que $M_2$ est l'image de $M_1$ par la rotation de centre $O$ et de mesure d'angle $\alpha$ où $\alpha$ est un réel de l'intervalle $]0;\pi[$

0,5 pt **a)** Calculer $z_2$ en fonction de $z_1$ et de $\alpha$

0,5 pt **b)** Montrer que le point $M$ appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

**4 -** Soit $\theta$ un réel donné de lintervalle $]0;\pi[$

On suppose que $z_1$ et $z_2$ sont les deux solutions de l'équation : $6t^2 - (e^{i\theta}+1)t + (e^{i\theta}-1) = 0$

0,5 pt **a)** Sans calculer $z_1$ et $z_2$ vérifier que : $z = 2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

0,5 pt **b)** Donner en fonction de $\theta$, la forme trigonométrique du nombre complexe $z$.

## Exercice 4 : (7 pts)

### partie A :

0,5 pt **1 -** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout réel strictement positif $x$, il existe un réel $\theta$ compris entre 0 et $x$ tel que : $e^{\theta} = \dfrac{x}{1-e^{-x}}$

**2 -** En déduire que :

0,25 pt **a)** $(\forall x > 0)$ ; $1 - x < e^{-x}$

0,25 pt **b)** $(\forall x > 0)$ ; $x + 1 < e^{x}$

0,25 pt **c)** $(\forall x > 0)$ ; $0 < \ln \left(\dfrac{xe^x}{e^x-1}\right) < x$

### partie B :

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x-1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$

Et soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $f$ est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \geq 0)$ ; $x - \dfrac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-a) de la première partie)

**0,5 pt** **b)** En déduire que : $\left(\forall x \geq 0\right)\ ;\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \dfrac{x^2}{2}$

**0,5 pt** **3 - a)** Vérifier que : $\left(\forall x > 0\right)\ ;\ \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} f(x)$

**0,75 pt** **b)** En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ puis interpréter le résultat obtenu.

**0,75 pt** **4 - a)** Montrer que $f$ est dérivable en tout point de $]0;+\infty[$ et que :

$$\left(\forall x > 0\right)\ ;\ f'(x) = \frac{e^x\left(e^x - 1 - x\right)}{\left(e^x - 1\right)^2}$$

**0,5 pt** **b)** En déduire que la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-b) de la première partie)

**partie C :**

On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln\left(f\left(u_n\right)\right)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

**0,5 pt** **1 -** Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $u_n > 0$

**0,5 pt** **2 -** Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-c) de la première partie)

**0,5 pt** **3 -** Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln\left(f(x)\right) = x$ puis déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$

## Exercice 5 : (3 pts)

On considère la fonction numérique $F$ définie sur l'intervalle $I = ]0;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\,dt$

**0,5 pt** **1 - a)** Etudier le signe de $F(x)$ pour tout $x$ de $I$

**0,5 pt** **b)** Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur l'intervalle $I$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x$ de $I$.

**0,25 pt** **c)** Montrer que la fonction $F$ est strictement croissante sur l'intervalle $I$

**0,5 pt** **2 - a)** En utilisant la technique de changement de variable en posant : $u = \sqrt{e^t - 1}$, montrer que pour tout $x$ de $I$ on a : $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\,dt = 2\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}$

**0,5 pt** **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

**0,25 pt** **3 - a)** Montrer que la fonction $F$ est une bijection de l'intervalle $I$ dans un intervalle $J$ que l'on déterminera.

**0,5 pt** **b)** Déterminer $F^{-1}$ la bijection réciproque de $F$.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : NORMAL 2016**

## MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3.5 pts)

**0.5 pt** **1 -** Montrer que $E$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

Tout d'abord E est une partie non-vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui s'écrivent sous la forme $\mathrm{M}(x, y)$ et $\mathrm{M}(0,0) = 0 \in E$.

Soient $(x, y)$ et $(a, b)$ deux éléments de E :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(x,y) - \mathrm{M}(a,b) &= \begin{pmatrix} x+y-a-b & 0 & -2y+2b \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & x-y-a+b \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{M}(x-a; y-b) \in E \text{ car : } \left| \begin{array}{l} (x-a) \in \mathbb{R} \\ \text{et } (y-b) \in \mathbb{R} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

D'où : $(E, +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

**0.5 pt** **2 -** Vérifier : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2) : \mathrm{M}(x,y) \times \mathrm{M}(x',y') = \mathrm{M}(xx'-yy'; xy'+yx')$ .

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(x,y) \times \mathrm{M}(x',y') &= \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (xx'-yy') + (xy'+yx') & 0 & -2(xy'+yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ (xy'+yx') & 0 & (xx'-yy') - (xy'+yx') \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{M}(xx'-yy'; xy'+yx') \in E \text{ car ; } \left| \begin{array}{l} (xx'-yy') \in \mathbb{R} \\ \text{et } (xy'+yx') \in \mathbb{R} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2) : \mathrm{M}(x,y) \times \mathrm{M}(x',y') = \mathrm{M}(xx'-yy'; xy'+yx')$ .

**3 -** On pose : $E^* = E - \{M(0;0)\}$ et on considère l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \longmapsto E$ qui au nombre complexe $z = x + iy$ associe la matrice $M(x;y)$ de $E$ , avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ .

**0.25 pt** **a)** Montrer $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(\mathbb{E};\times)$ .

Soient $z = x + iy$ et $z' = a + ib$ deux éléments de $\mathbb{C}^*$ et soit $\varphi$ l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbb{C}^*,\times) & \longrightarrow & (E,\times) \\ z = x + iy & \longrightarrow & \varphi(z) = \mathrm{M}(x,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi(z \times z') & = & \varphi((x+iy)\times(a+ib)) \\ & = & \varphi((xa-yb)+i(xb+ya)) \\ & = & \mathrm{M}(xa-yb;xb+ya) \\ & = & \mathrm{M}(x,y)\times\mathrm{M}(a,b) \text{ d'après 2-} \\ & = & \varphi(z)\times(z') \end{array}$$

Ainsi , $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ dans $(E;\times)$ .

**0.75 pt** **b)** En déduire que $(\mathbb{E}^*;\times)$ est un groupe commutatif d'élement neutre $M(1;0)$ .

Soit $\mathrm{M}(x,y)$ un élément de $E^*$.

l'équation $\varphi(x+iy) = \mathrm{M}(a,b)$ admet une seule solution $x + iy = a + ib$ Donc :

$(\forall \mathrm{M}(a,b) \in E^*), (\exists! (x+iy) \in \mathbb{C}^*) : \varphi(x+iy) = \mathrm{M}(a,b)$

c-à-d que $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans $E^*$.

Dès alors : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

comme $\varphi$ est un homomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans E et comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif, alors la structure algébrique de $(\mathbb{C}^*,\times)$ sera transmise vers $(E^*,\times)$ via l'application $\varphi$.

$(\mathbb{C}^*,\times)$ groupe commutatif $\Rightarrow (E^*,\times)$ Aussi.

$(1+i0)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*,\times) \Rightarrow \varphi(1+i0) = \mathrm{M}(1,0)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Donc : $(\mathbb{E}^*;\times)$ est un groupe commutatif d'élement neutre $M(1;0)$ .

**0.5 pt** **4 -** Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif .

$(E^*\,;+;\,\times)$ est un groupe commutatif car :

- $(E,+)$ est un groupe .
- $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif .
- $\times$ est distrubitive par rapport à $+$ .
- $\times$ est commutatif dans E .

La distributivité de $\times$ par rapport à $+$ :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{M}(a,b)\times(\mathrm{M}(x,y)+\mathrm{M}(x',y')) & = & \mathrm{M}(a,b)\times\mathrm{M}(x+x',y+y') \\ & = & \mathrm{M}(a(x+x')-b(y+y');a(y+y')+b(x+x')) \\ & = & \mathrm{M}(ax+ax'-by-by';ay+ay'+bx+bx') \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{M}(a,b)\times\mathrm{M}(x,y)+\mathrm{M}(a,b)\times\mathrm{M}(x',y') & = & \mathrm{M}(ax-by;ay+bx)+\mathrm{M}(ax'-by';ay'+bx') \\ & = & \mathrm{M}(ax-by+ax'-by';ay+bx+ay'+bx') \end{array}$$

Donc la distributivité à gauche est vérifiée .

Même procédé pour la distributivité à droite .

Pour la commutativité de $\times$ dans $E$ .

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x,y)\times\mathrm{M}(x',y') &= \mathrm{M}(xx'-yy';xy'+yx') \\ &= \mathrm{M}(x'x-y'y;y'x+x'y) \\ &= \mathrm{M}(x',y')\times\mathrm{M}(x,y) \end{aligned}$$

Donc : $(E;+;\times)$ est un corps commutatif .

**5 -** On pose : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ .

0.5 pt **a)** Calculons $A\times\mathrm{M}(x,y)$ pour tout $\mathrm{M}(x,y)$de $E$.

$$\begin{aligned} A\times\mathrm{M}(x,y) &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&y-x\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc : $A\times\mathrm{M}(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

0.5 pt **b)** En déduire qu'aucun élément de $E$ n'admet pas de symétrique dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

Soient $\mathrm{M}(x,y)$ une matrice de $E$ et $\mathrm{M}(x',y')$ son symétrique dans $E$.

$\iff \mathrm{M}(x,y)\times\mathrm{M}(x',y')=\mathrm{M}(x',y')\times\mathrm{M}(x,y)=I$

$\iff C\mathrm{M}(x,y)\times\mathrm{M}(x',y')=I$ car $\times$ est commutative

$\implies A\times\mathrm{M}(x,y)\times\mathrm{M}(x',y')=A\times I=A$

$\implies 0\times\mathrm{M}(x',y')=A$

$\implies 0=A$

$\implies 0=1$ c'est absurde .

Donc $\mathrm{M}(x,y)$ n'est pas inversible ; donc n'admet pas de symétrique $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$ .

## Exercice 2 : (3 pts)

### Partie I

Soit $(a;b)$ dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que le nombre **premier** 173 divise $a^3+b^3$ .

0.25 pt **1 -** Montrons que : $a^{171}\equiv -b^{171}\,[173]$ ( remarquez que : $171=3\times 57$ ) .

$$\begin{aligned} 173/\left(a^3+b^3\right) &\Rightarrow \left(a^3+b^3\right)\equiv 0\,[173] \\ &\Rightarrow a^3\equiv -b^3\,[173] \\ &\Rightarrow \left(a^3\right)^{57}\equiv\left(-b^3\right)^{57}[173] \\ &\Rightarrow a^{171}\equiv -b^{171}\,[173] \end{aligned}$$

Donc : $a^{171}\equiv -b^{171}\,[173]$

0.25 pt **2 -** Montrons que : 173 divise $a$ si et seulement si 173 divise $b$ .

$$\begin{aligned} 173/a &\Leftrightarrow 173/a^3 ; 173 \in \mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow a^3 \equiv 0\,[173] \\ &\Leftrightarrow (a^3+b^3) \equiv a^3\,[173] \text{ car : } b^3 \equiv a^3\,[173] \\ &\Leftrightarrow b^3 \equiv 0\,[173] \\ &\Leftrightarrow 173/b^3 \\ &\Leftrightarrow 173/b\,;\text{ car : } 173 \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc : } 173/a \Leftrightarrow 173/a}$

**0.25 pt**

**3 -** On suppose que 173 **divise** $a$ ; Montrons que : 173 divise $a+b$.

$$\begin{aligned} 173/a &\Rightarrow 173/b \text{ d'après 1- b-} \\ &\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} 173/a \\ 173/b \end{array} \right. \\ &\Rightarrow 173 \text{ divise toute combinaison linéaire de a et b} \\ &\Rightarrow 173/(a+b) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc 173 divise } a+b}$

**4 -** On suppose que 173 **ne divise pas** $a$ .

**0.5 pt**

**a)** En utilisant le théorème de **FERMAT** , montrer que : $a^{172} \equiv b^{172}\,[173]$ .

**Rappel :** du théorème de **FERMAT** : $\left\{ \begin{array}{l} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{array} \right. \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\,[p]$

Comme 173 ne divise pas le nombre $a$ , alors 173 ne divise pas $b$ à cause de l'équivalence de la question 2)$-$ : $173/a \Leftrightarrow 173/a$ .

On peut donc écrire : $\left\{ \begin{array}{l} 173 \wedge a = 1 \\ 173 \wedge b = 1 \end{array} \right.$

Ainsi d'après FERMAT : $\left\{ \begin{array}{l} a^{172} \equiv 1\,[173] \\ b^{172} \equiv 1\,[173] \end{array} \right.$

$\boxed{\text{d'où : } a^{172} \equiv b^{172}\,[173] \text{ .}}$

**0.5 pt**

**b)** Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0\,[173]$ .

On a : $a^{171} \equiv -b^{171}\,[173]$ et $a^{172} \equiv b^{172}\,[173]$ , Donc : $a^{172} \equiv -ba^{171}\,[173]$ .

$\boxed{\text{d'où : } a^{171}(a+b) \equiv 0\,[173] \text{ .}}$

**0.5 pt**

**c)** En déduire que 173 **divise** $a+b$ .

Puisque 173 ne divise pas $a$ donc 173 ne divise pas $a^{171}$ , et comme 173 est premier alors $173 \wedge a^{171} = 1$ , or $173/a^{171}(a+b)$

$\boxed{\text{Alors : d'après le théorème de Gauss on a : 173/a+b}}$

## Partie II

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante : $(E)$ ; $x^3 + y^3 = 173\,(xy+1)$ .

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de $(E)$ , on pose $x+y = 173k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ .

**0.25 pt** **1 -** Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$ .

Soient $x$ et $y$ et $k$ dans $\mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{cases} x+y=173k \\ x^3+y^3=173(xy+1) \end{cases} \Rightarrow (x^2-xy+y^2)\cdot 173k = 173\cdot(xy+1)$$

$$\Rightarrow k\cdot\left((x-y)^2+xy\right)=(xy+1)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2 = 1+xy(1-k)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

Donc : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

**0.5 pt** **2 -** Montrer que : $k=1$ , puis résoudre l'équation $(E)$ .

On suppose que : $k\neq 1$ ; d'après la dernière question on a : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

Donc : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1\ (\bullet)$

Et puisque $x$ et $y$ et $k$ dans $\mathbb{N}^*$ donc $k\geq 2$ et $xy\geq 1$ d'où $(k-1)xy\geq 1$ ; ce qui implique que : $k(x-y)^2\leq 0$ .

c-à-d : $x=y$ . l'équation $(\bullet)$ devienne $(k-1)xy=1$ ce qui implique que : $k-1=x=y=1$ ce qui est absurde avec $x+y=173k\geq 173$ , alors la première supposition est fausse et l'inverse qui est vraie ; c-à-d : $k=1$ .

$$(E) \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ x+y=173 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} (x-y)=1 \\ x+y=173 \end{cases} ou \begin{cases} (x-y)=-1 \\ x+y=173 \end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} 2x=174 \\ 2y=172 \end{cases} ou \begin{cases} 2x=172 \\ 2y=174 \end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} x=87 \\ y=86 \end{cases} ou \begin{cases} x=86 \\ y=87 \end{cases}\right)$$

Inversement on a : $87^3+86^3=(86+87)(87^2-87\times 86+86^2)=173(87+86^2)=173(1+86\times 87)$ .

l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ est : $S=\{(87;86);(86;87)\}$ .

## Exercice 3 : (3.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ .

On considère dans le plan complexe deux points $M_1$ et $M_2$ tels que les points $O$ ; $M_1$ et $M_2$ sont distincts deux à deux et non alignés .

Soient $z_1$ et $z_2$ les affixes respectives des points $M_1$ et $M_2$ et soit $M$ le point dont l'affixe $z$ verifie la relation : $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$ .

**0.5 pt** **1 - a)** Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$ .

On a : $\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_1 z_2 - z z_2}{z_1 z_2 - z z_1} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1 + z_2\right) - 2 z z_2\right)}{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1 + z_2\right) - 2 z z_1\right)} = \dfrac{z\left(z_1 - z_2\right)}{z\left(z_2 - z_1\right)} = -1$

Donc : $\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1$

**0.5 pt** **b)** En déduire que le point $M$ appartient au cercle circonscrit au triangle $OM_1M_2$ .

Puisque les points $O$ et $M$ et $M_1$ et $M_2$ ne sont pas alignés et $\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \dfrac{z_2 - 0}{z_1 - 0} = -1 \in \mathbb{R}$

donc les points $O$ et $M$ et $M_1$ et $M_2$ sont cocycliques .

Donc $M$ appartient au cercle circonscrit au triangle $OM_1M_2$ .

**0.5 pt** **2 -** Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors $M$ appartient à l'axe des réels .

On a : $\overline{z} = \dfrac{2\ \overline{z_1 z_2}}{\overline{z_1 + z_2}} = \dfrac{2\ \overline{z_1}\ \overline{z_2}}{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = \dfrac{2\ z_2\ \overline{z_2}}{z_2 + \overline{z_2}} = \dfrac{2\ z_2\ z_1}{z_2 + z_1} = z$ ; car : $\begin{cases} z_2 = \overline{z_1} \\ \text{et } z_1 = \overline{z_2} \end{cases}$

Donc : $z = \overline{z}$ ; c-à-d : $z \in \mathbb{R}$ .

Donc $M$ appartient à l'axe des réels .

**3 -** On suppose que $M_2$ est l'image de $M_1$ par la rotation de centre $O$ et de mesure d'angle $\alpha$ où $\alpha$ est un réel de l'intervalle $]0;\pi[$ .

**0.5 pt** **a)** Calculer $z_2$ en fonction de $z_1$ et de $\alpha$ .

L'écriture complexe de la rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$ est : $z^{'} = e^{i\alpha} \cdot z$ et puisque l'image de $M_1$ par cette rotation est $M_2$ alors :

$z_2 = e^{i\alpha} \cdot z_1$

**0.5 pt** **b)** Montrer que le point $M$ appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$ .

Puisque $z_1$ et $z_2$ sont conjugués, alors les points $M_1$ et $M_2$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels ; d'où le milieu de $[M_1M_2]$ appartient à l'axe des réels .

Et comme ; $OM_1 = OM_2$ , Alors la médiatrice du segment $[M_1M_2]$ est l'axe des réels ;

On déduit de la question $2-)$ que :

$M$ appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

**4 -** Soit $\theta$ un réel donné de l'intervalle $]0;\pi[$ . On suppose que $z_1$ et $z_2$ sont les deux solutions de l'équation : $6\ t^2 - \left(e^{i\theta} + 1\right) t + \left(e^{i\theta} - 1\right) = 0$ .

**0.5 pt** **a)** Sans calculer $z_1$ et $z_2$ vérifier que : $z = 2\ \dfrac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$ .

On a : $z_1$ et $z_2$ sont solutions de l'équation : $6\ t^2 - \left(e^{i\theta} + 1\right) t + \left(e^{i\theta} - 1\right) = 0$

Donc : $z_1 + z_2 = \dfrac{e^{i\theta} + 1}{6}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{e^{i\theta} - 1}{6}$ .

Or : $z = \dfrac{2\ z_1 z_2}{z_1 + z_2} = 2\ \dfrac{\frac{e^{i\theta} - 1}{6}}{\frac{e^{i\theta} + 1}{6}} = 2\ \dfrac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$

Conclusion ; $z = 2\,\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

0.5 pt **b)** Donner en fonction $\theta$ , la forme trigonométrique su nombre complexe $z$ .

On a : $z = 2\,\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = 2\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = 2\dfrac{2isin\frac{\theta}{2}}{2cos\frac{\theta}{2}} = 2itan\dfrac{\theta}{2} \in i\mathbb{R}$

Alors : $z$ est un imaginaire pure .

Et comme $\theta \in \left]0;\pi\right[$ , alors $\dfrac{\theta}{2} \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ d'où $tan\dfrac{\theta}{2} > 0$ . On déduit donc que la forme trigonométrique de $z$ est :

$z = \left[2tan\dfrac{\theta}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ .

## Exercice 4 : (7 pts)

### Partie I

0.5 pt **1 -** En appliquant le théorème des acroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{-t}$ , montrer que pour tout réel strictement positif $x$, il existe un réel $\theta$ compris entre 0 et $x$ tel que : $e^{\theta} = \dfrac{x}{1-e^{-x}}$ ;

La fonction $\varphi : t \longmapsto e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entieer comme étant la omposée de deux fonctions dérivables bien définies sur $\mathbb{R}\left(e^{-\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}\right)$ .

On peut ainsi appliquer le **TAF** sur n'importe quel intervalle $I$ inclus dans $\mathbb{R}$ . Soit $x$ un réel strictement positif :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0;x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur } ]0;x[ \end{cases} \Rightarrow \exists\, \theta \in ]0;x[ : \left(\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right) = \varphi^{'}(\theta)$$

$$\Rightarrow 0 < \theta < x \; ; \left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right) = -e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow 0 < \theta < x \; ; \left(\dfrac{x}{1-e^{-x}}\right) = e^{\theta}$$

Donc $\exists\, \theta \in ]0;x[ : e^{\theta} = \dfrac{x}{1-e^{-x}}$

0.25 pt **2 - a)** En déduire que : $(\forall x > 0)\,;1-x > e^{-x}$ .

Soit $x > 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \theta > 0 \; &\Rightarrow \; e^{\theta} > 1 \\ &\Rightarrow \; \dfrac{x}{1-e^{-x}} > 1 \\ &\Rightarrow \; x > 1-e^{-x} \; ; \text{ car } x > 0 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x > 0)\,;1-x > e^{-x}$ .

0.25 pt **b)** En déduire que : $(\forall x > 0)\,;x+1 > e^{x}$ ;

Soit $x > 0$

$$\text{On a : } \theta < x \Rightarrow e^{\theta} < e^{x}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{1-e^{-x}} > 1$$
$$\Rightarrow x < e^{x} - 1 \, ; \begin{cases} \text{avec : } 1 - e^{-x} > 0 \\ \text{car : } x > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x + 1 < e^{x}$$

$\boxed{\text{Donc : } (\forall x > 0) \, ; \, x + 1 > e^{x} \, .}$

**0.25 pt** **c)** En déduire que : $(\forall x > 0) \, ; \, 0 < \ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right) < x$ ; Soit $x > 0$

$$\text{On a : } 0 < \theta < x \Rightarrow e^{0} < e^{\theta} < e^{x} \, ; \text{ car l'Exp est continue et } \nearrow$$
$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{1-e^{-x}} < e^{x}$$
$$\Rightarrow \ln 1 < \ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) < \ln\left(e^{x}\right) \, ; \text{ car ln est continue et } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

$\boxed{\text{Donc : } (\forall x > 0) \, ; \, 0 < \ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right) < x \, .}$

## Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{xe^{x}}{e^{x}-1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$ .

Et soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

**0.5 pt** **1 - a)** Montrons que la fonction $f$ est continue à droite en 0 .

$$\text{on a : } \lim_{x\to 0^{+}} f(x) = \lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right) = \lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{e^{x}}{\frac{e^{x}-1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^{+}} \frac{e^{x}}{\left(\frac{e^{x}-e^{0}}{x-0}\right)} = \frac{\lim_{x\to 0^{+}} e^{x}}{\lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{e^{x}-e^{0}}{x-0}\right)}$$

$$= \frac{e^{0}}{\left(e^{x}\right)'_{x=0}} = \frac{e^{0}}{e^{0}} = 1 = f(0) \, .$$

$\boxed{\text{Donc : la fonction } f \text{ est continue à droite en } 0 \, .}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = 0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

$$\text{On a : } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}\right) = 0$$

Donc la droite $(\Delta)$ : $y = x$ est une asymptote pour $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ .

**0.25 pt** **2 - a)** Montrons que : $(\forall x \geq 0)\,; x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x}+1\,;$

( *On pourra utiliser le résultat de la question 2-a) de la première partie* ) .

Soient t>0 et x>0 .

$$\text{On a :} t>0 et x>0 \;\Rightarrow\; 1-t<e^{-t}; d'aprsI)-2)-a)-$$

$$\Rightarrow \int_0^x (1-t)\,dt < \int_0^x (e^{-t})\,dt$$

J'ai le droit d'introduire l'intégrale $\int_0^x dt$ car ces deux quantités sont intégrables ( la continuité est vérifiée ) . L'ordre n'a pas changé a cause de $0 < x$ .

$$\Rightarrow \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x < -\left[e^{-t}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{x^2}{2}\right) < -e^{-x}+1\,; \textbf{ (1)}$$

De même, soient $t > 0$ et $x > 0$ .

$$\Rightarrow 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) \text{ ; d'après I)2)c) .}$$

$$\Rightarrow e^0 < e^{\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{xe^x}{e^x-1}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x\cdot e^x}{e^x\cdot(1-e^{-x})}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{1-e^{-x}}$$

On multiplie les deux cotés de cette inégalité par le nombre positif $(1-e^{-x})$ , il est positif car $x > 0$ .

$$\Rightarrow (1-e^{-x}) < x$$

$$\Rightarrow \textbf{ (2) : } -e^{-x}+1 < x\,;\text{ joliment}$$

$$\textbf{de (1) et (2)} \;\Rightarrow\; \forall x>0\,; x-\frac{x^2}{2} < (-e^{-x}+1) < x\,.$$

pour x=0 , on a : $x-\dfrac{x^2}{2} = -e^{-x}+1 = x = 0$ $(\bullet)$

D'après $(\bullet)$ On écrit finalement : $\forall x > 0\,; x-\dfrac{x^2}{2} \leq (-e^{-x}+1) \leq x$ . ( $\blacksquare$ )

**0.5 pt** **b)** En déduire que : $(\forall x \geq 0)\,; \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6} \leq e^{-x}+x-1 \leq \dfrac{x^2}{2}\,;$

A-t-On le droit d'intégrer la formule ( ■ ) ?

Oui, effectivement , on a le droit de le faire car les trois quantités sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ . Et $x > 0$ gardera le sens de l'ordre incghangeable .

$$\begin{aligned}
(\blacksquare) \quad &\Rightarrow \quad x - \frac{x^2}{2} \leq (-e^{-x} + 1) \leq x \, . \\
&\Rightarrow \quad \int_0^t \left( x - \frac{x^2}{2} \right) < \int_0^t (-e^{-x} + 1) < \int_0^t x dx \, . \\
&\Rightarrow \quad \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^t < [e^{-x} + x - 1]_0^t < \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^t \, . \\
&\Rightarrow \quad \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) < e^{-t} + t - 1 < \left( \frac{t^2}{2} \right) \; ; \; t > 0 \, .
\end{aligned}$$

Cette inégalité reste vraie pour $t = 0$ .

Donc finalement on écrit : $(\forall t \geq 0) \, ; \, \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6} \leq e^{-t} + t - 1 \leq \dfrac{t^2}{2}$ ;

**0.25 pt**

**3 - a)** Vérifier que : $(\forall t > 0) \, ; \, \dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \cdot f(x)$ .

Soit $x > 0$ ;

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-1}{x} &= \frac{\left( \frac{xe^x}{e^x - 1} \right) - 1}{x} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x\,(e^x - 1)} \\
&= \frac{xe^x \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x} \right)}{x\,(e^x - 1)} \\
&= \left( \frac{xe^x}{e^x - 1} \right) \cdot \left( \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2 e^x} \right) \\
&= \left( \frac{xe^x}{e^x - 1} \right) \cdot \left( \frac{e^x}{e^x} \right) \cdot \left( \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right) \\
&= \left( \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right) \cdot f(x)
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall t > 0) \, ; \, \dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \cdot f(x)$ .

**0.75 pt**

**b)** En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$ puis interpréter le résultat obtenu .

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \left( \frac{f(x) - 1}{x} \right) &= \lim_{x \to 0^+} \left( \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right) \cdot f(x) \\
&= \lim_{x \to 0^+} \left( \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right) \times \lim_{x \to 0^+} f(x) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Mais pourquoi : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left( \dfrac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} \right) = \dfrac{1}{2}$ ?

$$\begin{aligned}
x \longrightarrow 0^+ \quad &\Rightarrow \quad x \geq 0 \\
&= \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \leq (e^{-x} + x - 1) \leq \left( \frac{x^2}{2} \right) \\
&= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} x \right) \leq \left( \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \right) \leq \frac{1}{2} \, ; \text{ car : } x^2 > 0
\end{aligned}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \left( \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} x \right) = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de gendarmes on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left( \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \right) = \dfrac{1}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)-1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathcal{C}_f) \text{ admet la demi-droite } (\Delta) \text{ de coefficient directeur } \dfrac{1}{2} \text{ comme} \\ \text{tangente à droite en } (0;1) \text{ avec : } (\Delta) : y=\dfrac{1}{2}x+f(0) \end{cases}$

**0.75 pt** **4 - a)** Montrer que : $f$ est dérivable en tout point de $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x>0)\,;\; f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-1-x\right)}{\left(e^x-1\right)^2}\,.$$

Comme $x\longmapsto xe^x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables. Aussi la fonction $x\longmapsto e^x-1$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme étant somme ( différence de deux fonctions dérivables ) et $\forall x>0\,;\, e^x-1\neq 0$ .

Alors f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ .

Soit $x\in\,]0;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)=\frac{\left(xe^x\right)'\left(e^x-1\right)-\left(e^x-1\right)'xe^x}{\left(e^x-1\right)^2} \\ &= \frac{\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x-1\right)-\left(e^x\right)xe^x}{\left(e^x-1\right)^2} \\ &= \frac{e^x\left(1+x\right)\left(e^x-1\right)-xe^{2x}}{\left(e^x-1\right)^2} \\ &= \frac{e^x\left(\left(1+x\right)\left(e^x-1\right)-xe^x\right)}{\left(e^x-1\right)^2} \\ &= \frac{e^x\left(xe^x-x+e^x-1-xe^x\right)}{\left(e^x-1\right)^2} \\ &= \frac{e^x\left(e^x-1-x\right)}{\left(e^x-1\right)^2} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x>0)\,;\; f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-1-x\right)}{\left(e^x-1\right)^2}$ .

**0.5 pt** **b)** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ .

(on pourra utiliser le résultat de la question 2-b) de la première partie)

.

On a : $\left|\begin{array}{l} \left(e^x-1\right)^2\geq 0\,;\text{ toujours} \\ e^x>0\,;\text{ toujours} \\ e^x>1+x\,;\text{ d'après II)2)b)} \end{array}\right.$

Donc : $\dfrac{e^x\left(e^x-1-x\right)}{\left(e^x-1\right)^2}>0\,;\,\forall x>0$ .

C-à-d : $f'(x)>0\,;\,\forall x>0$ .

C-à-d : $f$ est $\nearrow$ sur $]0;+\infty[$ ; ainsi sur $[0;+\infty[$ .

## Partie III

On considère la suite numérique $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ pour $n \in \mathbb{N}$ .

**0.5 pt** **1 -** Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $u_n > 0$ .

Soit la propostion $\mathrm{P}(n)$ : $u_n > 0$ .

Pour $n = 0$ , on a $u_0 > 0$ . Donc l'instance $\mathrm{P}(0)$ est vraie .

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que : $\mathrm{P}(n)$ est vraie .

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(n) \text{ est vraie} &\Rightarrow u_n > 0 \\
&\Rightarrow f(u_n) > f(0)\,;\ f \text{ est } \nearrow \text{ sur } ]0;+\infty[ \\
&\Rightarrow f(u_n) > 1 \\
&\Rightarrow \ln(f(u_n)) > \ln(1) \text{ car : ln est } \nearrow \text{ sur } ]0;+\infty[ \\
&\Rightarrow u_{n+1} > 0 \\
&\Rightarrow \mathrm{P}(n+1) \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

Ainsi on a touvé : $\begin{cases} \mathrm{P}(0) \text{ est vraie} \\ \mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n+1)\,;\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Alors : d'après le raisonnement par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n > 0$ .

**0.5 pt** **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est stricetement décroissante et en déduirequ'elle est convergente .

( On pourra utiliser le résultat de la question 2-c) de la première partie )

$$\begin{aligned}
I)2)c) &\Rightarrow 0 < \ln(f(x)) < x\,;\ \forall x > 0 \\
&\Rightarrow 0 < \ln(f(u_n)) < u_n\,;\ \text{car } u_n > 0 \\
&\Rightarrow 0 < u_{n+1} < u_n\,;\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement } \searrow\,; \\
&\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge car elle est minorée par } 0\,;
\end{aligned}$$

**0.5 pt** **3 -** Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln(f(u_n)) = x$ puis déterminere la limite de la suite : $(u_n)_{n\geq 0}$ . f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$ .

On a : d'après I)2)c) : $\forall x > 0\,;\ \ln(f(x)) < x$ .

Autrement-dit : $\forall x \in [0;+\infty[\,;\ \ln(f(x)) \neq x$ .

Mais $\ln(f(0)) = \ln 1 = 0$ . Donc la seule solution de l'équation $\ln(f(x)) = x$ est 0 dans l'ensemble $]0;+\infty[ \cup \{0\} = [0;+\infty[$ ; C-à-d dans $[0;+\infty[$ .

**Rappel** : Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$ .

Et soit $(u_n)_n$ une suite récurrente définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ , avec $u_0 \in I$ .

Si la suite $(u_n)_n$ converge vers la limite $l$ et $l \in I$ .

Alors : $f(l) = l$ .

On pose : $\forall x \in [0; +\infty[$ ; $\varphi(x) = \ln(f(x))$ .

$\varphi$ est continue sur $[0; +\infty[$ car c'est une composition de deux fonctions continues ($f$ et $\ln$) .

et $f([0; +\infty[) = [1; +\infty[$ .

On a aussi : $[0; +\infty[ = \ln([1; +\infty[) = [0; +\infty[$ .

Comme $(u_n)_n$ est convergente vers $l$ alors d'après le rappel , la limite $l$ vérifie $\varphi(l) = l$ .

C-à-d : $\ln(f(l)) = l$ ; donc : $l = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

## Exercice 5 : (3 pts)

On Considère la fonction numérique $F$ définie sur l'intervalle $I = ]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt \ .$$

**0.5 pt** **1 - a)** Etudier le signe de $F(x)$ pour tout $x$ de $I$ .

On a : $(\forall t \in ]0; +\infty[)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{e^t - 1}} > 0$ .

Donc : $(\forall t \in ]0; \ln 2[)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{e^t - 1}} < 0$ et $(\forall t \in ]\ln 2; +\infty[)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{e^t - 1}} > 0$ .

Alors Le signe de $F(x)$ est comme suit : $\begin{cases} F(x) \text{ est positive strictement sur : } ]\ln 2; +\infty[ \\ F(x) \text{ est négative strictement sur : } ]0; \ln 2[ \\ \text{et } F(\ln 2) = 0 \ . \end{cases}$

**0.5 pt** **b)** Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur l'intervalle $I$ et calculer $F^{'}(x)$ pour tout $x$ de $I$ .

La fonction $F$ est la primitive de la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ sur $]0; \ln 2[$ qui s'annule en $\ln 2$ .

Donc $F$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in ]0; +\infty[ \ ; F^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \ ;}$$

**0.5 pt** **c)** Montrer que la fonction $F$ est strictement croissante sur l'intervalle $I$ .

On a : $\forall x \in ]0; +\infty[$ ; $F^{'}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}} > 0$ ;

$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est strictement croissante sur } ]0; +\infty[ \ .}$

**0.25 pt** **2 - a)** En utilisant la technique de changement de variable en posant : $u = \sqrt{e^t - 1}$ , montrer que pour tout $x$ de $I$ on a : $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \frac{\pi}{2}$ .

En posant : $u=\sqrt{e^t-1}$ on aura : $\begin{cases} du=\dfrac{e^t}{2u}dt=\dfrac{u^2+1}{2u}dt \Leftrightarrow dt=\dfrac{2u}{u^2+1}du \\ t=x \Leftrightarrow u=\sqrt{e^x-1} \\ t=\ln 2 \Leftrightarrow u=1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = \int_{1}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{u^2+1}du &= \int_{1}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2}{u^2+1}du \\ &= 2\left[arctan\left(u\right)\right]_1^{\sqrt{e^x-1}} \\ &= 2\left(arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\ arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc : $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = 2\ arctan(\sqrt{e^x-1})-\frac{\pi}{2}$ .

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ .

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\ arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\dfrac{\pi}{2} = 2\ arctan(0)-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$ .

Et : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\dfrac{\pi}{2} = 2\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ .

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\dfrac{\pi}{2}$ .

0.25 pt **3 - a)** Montrer que la fonction $F$ est une bijection de l'intervalle $I$ dans l'intervalle $J$ que l'on déterminera .

$F$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ , donc $F$ est continue sur cet intervalle et puisque $F$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ .

Alors $F$ est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $F(]0;+\infty[)$ .

Et on a : $F(]0;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} F(x);\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[ = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ .

Conclusion : $F$ est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ .

**b)** Déterminer $F^{-1}$ la bijection réciproque de F .

$$\begin{aligned} (\forall y\in\,]0;+\infty[)\ ;\ \left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)\ :\ F(y)=x &\Leftrightarrow 2\ arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)-\frac{\pi}{2}=x \\ &\Leftrightarrow arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)-\frac{\pi}{2}=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{e^y-1}=tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow e^y=1+tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow y=ln\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

Donc $F$ est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

telle que : $\left(\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\right)\ :\ F^{-1}(x)=ln\left(1+tan^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage** juillet 2016

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

- Exercice 1 : **Calcul des probabilités** .................................... **3 points**
- Exercice 2 : **Structures algébriques** .................................... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .................................... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .................................... **6.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .................................... **3.5 points**

## Exercice 1 : (3 pts)

On a deux boites $U$ et $V$. La boite $U$ contient 4 boules rouges et 4 boules bleues. La boite $V$ contient deux boules rouges 4 boules bleues.

**On considère l'épreuve suivante :** On tire au hasard une boule de la boite $U$ : Si elle est rouge, on la remet dans la boite $V$ puis on tire au hasard une boule de la boite $V$, si elle est bleue on la pose de coté puis on tire une boule de la boite $V$.

Soient les événements suivants : $R_U$ « La boule tirée de la boite $U$ est rouge »
$B_U$ « La boule tirée de la boite $U$ est bleue »
$R_V$ « La boule tirée de la boite $V$ est rouge »
$B_V$ « La boule tirée de la boite $V$ est bleue »

**0,5 pt** **1 -** Calculer la probabilité de chacun des deux événements $R_U$ et $B_U$.

**0,5 pt** **2 - a)** Calculer la probabilité de l'événement $B_V$ sachant que l'événement $R_U$ est réalisé.

**0,5 pt** **b)** Calculer la probabilité de l'événement $B_V$ sachant que l'événement $B_U$ est réalisé.

**1 pt** **3 -** Montrer que la probabilité de l'événement $B_V$ est : $\dfrac{13}{21}$

**0.5 pt** **4 -** En déduire la probabilité de l'événement $R_V$.

## Exercice 2 : ( 3.5 pts )

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose : $M(z) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E = \{M(z) \,/\, z \in \mathbb{C}\}$

**1 -** On munit $E$ de la loi de composition interne $^*$ définie par :

$(\forall z \in \mathbb{C})\ (\forall z' \in \mathbb{C}) \quad : \quad M(z)^* M(z') = M(z) + M(z') - M(0)$

**1 pt** Montrer que $(E, {}^*)$ est un groupe commutatif.

**2 -** On considère l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \mapsto E$ qui associe au nombre complexe $z$ de $\mathbb{C}^*$ la matrice $M(z)$ de $E$

**1 pt** **a)** Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(C^*, \times)$ dans $(E, \times)$

**0,5 pt** **b)** En déduire que $(E - \{M(0)\}, \times)$ est un groupe commutatif.

**1 pt** **3 -** Montrer que $(E, {}^*, \times)$ est un corps commutatif.

## Exercice 3 : (3.5 pts)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ :\ z^2 - \left(1+\sqrt{3}\right)(1+i)\,z + 4i = 0$

**0,5 pt** **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation $(E)$ est : $\Delta = \left[\left(\sqrt{3}-1\right)(1-i)\right]^2$

**1 pt** **b)** Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de $(E)$

**2 -** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère les deux points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3} + \text{i}$

**0,75 pt** **a)** Montrer que l'ensemble $(D)$ des points du plan complexe dont l'affixe $z$ vérifie $z = \dfrac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite qui passe par le point $B$

**b)** Soient $M$ et $M'$ deux points d'affixes respectives $z$ et $z'$ tels que : $z' = a\bar{z} - b$ et $z \neq b$

**0,5 pt** Montrer que : $\dfrac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \dfrac{2}{|z-b|^2}$

**0,75 pt** **c)** En déduire que la droite $(D)$ est une bissectrice de l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right)}$

## Exercice 4 : (6.5 pts)

$n$ est un entier naturel non nul.

Soit $f_n$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{n}{x}$

et soit $(C_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$

**0,75 pt** **1 - a)** Etudier les deux branches infinies de la courbe $(C_n)$.

**0,75 pt** **b)** Etudier les variations de la fonction $f_n$ sur $]0;+\infty[$ puis donner son tableau de variation.

**0,5 pt** **c)** Construire $(C_2)$

**0,5 pt** **2 -** Montrer que la fonction $f_n$ est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

**0,5 pt** **3 - a)** Montrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, il existe un unique nombre réel $\alpha_n$ de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

**0,5 pt** **b)** Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$

**0,5 pt** **c)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

**0,5 pt** **4 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)$ ; $\ln(x) < x$

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

**5 -** Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 on pose : $I_n = \dfrac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\text{d}x$

**0,5 pt** **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $(\exists c_n \in [\alpha_n; \alpha_{n+1}])$ : $I_n = f_n(c_n)$

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$

**0,5 pt** **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

## Exercice 5 : (3.5 pts)

$n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique $g_n$ à variable réelle $x$ définie sur l'intervalle $[n;+\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln(t)}\text{d}t$$

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer que la fonction $g_n$ est dérivable sur l'intervalle $[n;+\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première $g_n^{'}$

**0,25 pt** **b)** Montrer que la fonction $g_n$ est strictement croissante sur l'intervalle $[n;+\infty[$.

**0,5 pt** **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \geq n) \quad ; \quad g_n(x) \geq \ln\left(\dfrac{x-1}{n-1}\right)$

(On pourra utiliser l'inégalité :$(\forall t \geq 0) \quad ; \quad \ln(1+t) \leq t$)

**0,25 pt** **b)** En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$

**0,25 pt** **3 - a)** Montrer que $g_n$ est une bijection de l'intervalle $[n;+\infty[$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

**0,5 pt** **b)** En déduire que : $(\forall n \geq 2) \quad (\exists!\ u_n \geq n) \quad : \quad \displaystyle\int_n^{u_n} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t = 1$

**4 -** On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 2}$ définie dans la question 3-b).

**0,5 pt** **a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad ; \quad \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t$

**0,5 pt** **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

**0,25 pt** **c)** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : RATTRAPAGE 2016

## MATHÉMATIQUES

### Exercice 1 : (3 pts)

0.5 pt **1 -** Calculer la probabilité de chacun des deux événements $R_U$ et $B_U$.

$$p(R_U) = \frac{card(R_U)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2}$$

$$p(B_U) = \frac{card(B_U)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2}$$

Donc : $p(R_U) = \dfrac{1}{2}$ et $p(B_U) = \dfrac{1}{2}$

0.5 pt **2 - a)** Calculer la probabilité de l'événement $B_V$ sachant que l'événement $R_U$ est réalisé.

$$p(B_V/R_U) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

Donc : $p(B_V/R_U) = \dfrac{4}{7}$

0.5 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement $B_V$ sachant que l'événement $B_U$ est réalisé.

$$p(B_V/B_U) = \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$$

Donc : $p(B_V/B_U) = \dfrac{2}{3}$

1 pt **3 -** Montrer que la probabilité de l'événement $B_V$ est $\dfrac{13}{21}$

$$\begin{aligned} p(\mathrm{B_V}) &= p(\mathrm{B_V} \cap (\mathrm{R_U} \cup \mathrm{B_U})) \\ &= p((\mathrm{B_V} \cap \mathrm{R_U}) \cup (\mathrm{B_V} \cap \mathrm{B_U})) \\ &= p(\mathrm{B_V} \cap \mathrm{R_U}) + p(\mathrm{B_V} \cap \mathrm{B_U}) \\ &= p(\mathrm{B_V}/\mathrm{R_U}) \times p(\mathrm{R_U}) + p(\mathrm{B_V}/\mathrm{B_U}) \times p(\mathrm{B_U}) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{13}{21} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } p(\mathrm{B_V}) = \frac{13}{21}}$$

**0.5 pt** **4 -** En déduire la probabilité de l'événement $\mathrm{R_V}$

$p(\mathrm{R_V}) = p(\overline{\mathrm{B_V}}) = 1 - p(\mathrm{B_V}) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21}$
avec $\overline{\mathrm{B_V}}$ est l'événement contraire de $\mathrm{B_V}$

$$\boxed{\text{Donc : } p(\mathrm{R_V}) = \frac{8}{21}}$$

## Exercice 2 : (3.5 pts)

**1 pt** **1 -** Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

Soit $(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$

$$\begin{aligned} [M(z) * M(z')] * M(z'') &= [M(z) + M(z') - M(0)] * M(z'') \\ &= M(z) + M(z') - M(0) + M(z'') - M(0) \\ &= M(z) + [M(z') + M(z'') - M(0)] - M(0) \\ &= M(z) + [M(z') * M(z'')] - M(0) \\ &= M(z) * [M(z') * M(z'')] \end{aligned}$$

Donc $*$ est associative dans $E$.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} M(z) * M(z') &= M(z) + M(z') - M(0) \\ &= M(z') + M(z) - M(0) \\ &= M(z') * M(z) \end{aligned}$$

Donc $*$ est commutatif dans $E$.

Soit $z \in E$

$$\begin{aligned} M(z) * M(0) &= M(z) + M(0) - M(0) \\ &= M(z) \end{aligned}$$

On a $*$ est commutatif dans $E$.

Donc $*$ admet element neutre dans $E$

Soit $z \in \mathbb{C}$ résoudre dans $E$ l'équation $M(z) * M(z') = M(0)$ avec $M(z')$ est l'inconnue

$$\begin{aligned} M(z) * M(z') = M(0) &\Leftrightarrow M(z) + M(z') - M(0) = M(0) \\ &\Leftrightarrow M(z') = 2.M(0) - M(z) \end{aligned}$$

$*$ est commutatif dans $E$

D'où pour tout $M(z)$ de $E$ admet symétrie par rapport à $*$

$\boxed{\text{Donc : } (E,*) \text{ est un groupe commutatif}}$

**2 -** On considère l'application : $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E \\ z & \longrightarrow & M(z) \end{array}$

**1 pt** **a)** Montrer que $\phi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, \times)$

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 ; \exists (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4 / z = x+iy \qquad z' = x'+iy'$

$$\begin{aligned} \phi(z \times z') &= M(zz') \\ &= M(xx'-yy'+i(xy'+x'y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(z)\times\phi(z') &= M(z)\times M(z') \\ &= \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+2y' & 0 & 5y' \\ 0 & 1 & 0 \\ -y' & 0 & x'-2y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx'+2xy'+2x'y+4yy'-5yy' & 0 & -5xy'+10yy'+5yx'-10yy' \\ 0 & 1 & 0 \\ -yx'-2yy'-xy'+2yy' & 0 & -5yy'+xx'-2yx'-2xy'+4yy' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx'-yy'+2(xy'+x'y) & 0 & -5(yx'+xy') \\ 0 & 1 & 0 \\ -(yx'+xy') & 0 & xx'-yy'-2(xy'+x'y) \end{pmatrix} \\ &= M(xx'-yy'+i(xy'+x'y)) \\ &= \phi(z\times z') \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } \phi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ dans } (E, \times)}$

**0.5 pt** **b)** En déduire que : $(E - M(0), \times)$ est un groupe commutatif.

On a $\phi$ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ groupe commutatif donc $(\phi(\mathbb{C}^*), \times)$ est un groupe commutatif.

Et puisque $\phi(\mathbb{C}^*) = \phi(\mathbb{C}) - \phi(0) = E - M(0)$

$\boxed{\text{Donc } (E - M(0), \times) \text{ est un groupe commutatif.}}$

**1 pt** **3 -** Montrer que $(E, *, \times)$ est un corps commutatif.

On a $(E, *)$ est un groupe commutatif et $(E - M(0), \times)$ est un groupe commutatif.

Montrons que $\times$ est distributive par rapport à $*$

Soit $(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$

$$\begin{aligned} M(z)\times(M(z')*M(z'')) &= M(z)\times(M(z')+M(z'')-M(0)) \\ &= M(z)\times M(z')+M(z)\times M(z'')-M(z)\times M(0) \\ &= M(zz')+M(zz'')-M(0) \\ &= M(zz')*M(zz'') \\ &= (M(z)\times M(z'))*(M(z)\times M(z'')) \end{aligned}$$

$\forall(z,z',z'')\in\mathbb{C}^3 M(z)\times(M(z')*M(z''))=(M(z)\times M(z'))*(M(z)\times M(z''))$ Donc $\times$ est distributive par rapport à $*$ dans $E$

$\boxed{\text{D'où : } (E,*,\times) \text{ est un corps commutatif}}$

## Exercice 3 : (3 pts)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(E)$ : $z^2-(1+\sqrt{3})(1+i)z+4i=0$

**0.5 pt** **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation $(E)$ est : $\Delta=\left[(\sqrt{3}-1)(1-i)\right]^2$

$$\begin{aligned} \Delta &= ((1+\sqrt{3})(1+i))^2 \\ &= (4+2\sqrt{3})2i-16i \\ &= (-4+2\sqrt{3})2i \\ &= -2i(4-2\sqrt{3}) \\ &= ((\sqrt{3}-1)(1-i))^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \Delta=\left[(\sqrt{3}-1)(1-i)\right]^2}$$

**1 pt** **b)** Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de $(E)$ $\Delta\neq0$ Donc l'equation $(E)$ admet deux solutions.

$$z_1=\frac{(1+\sqrt{3})(1+i)+(1-\sqrt{3})(1-i)}{2}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2=\frac{(1+\sqrt{3})(1+i)-(1-\sqrt{3})(1-i)}{2}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont : } \left[2,\frac{\pi}{3}\right] \text{ et } \left[2,\frac{\pi}{6}\right]}$$

**2 -** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les deux points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=\sqrt{3}+i$

**0.75 pt** **a)** Montrer que $(D)$ l'ensemble des points du plan complexe d'affixe $z$ vérifiant $z=\frac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite passant par $B$.

Soit $M(z)\in(D)$ avec $z=x+iy$ / $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 0n a :

$$
\begin{aligned}
M(z) \in (D) &\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}a\overline{z} \\
&\Leftrightarrow 2z = a\overline{z} \\
&\Leftrightarrow 2x + 2iy = (1 + i\sqrt{3})(x - iy) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + y\sqrt{3} \\ 2y = x\sqrt{3} - y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y\sqrt{3} = 0 \\ x\sqrt{3} - 3y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x - y\sqrt{3} = 0
\end{aligned}
$$

Le point $B \in (D)$

$\boxed{\text{Donc l'équation de la droite } (D) \text{ est : } x - y\sqrt{3} = 0}$

**0.5 pt**

**b)** Montrer que $\dfrac{b^2}{(z' - b)(z - b)} = \dfrac{2}{|z - b|^2}$

Remarquons d'abord que si $z \neq b$ alors $z' \neq b$ , car sinon on aura : $a\overline{z} = 2b$

$$
\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{2b}{a} \\
&= \frac{2(\sqrt{3} + i)}{(1 + i\sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 2i) \\
&= \sqrt{3} - i \\
&= \overline{b}
\end{aligned}
$$

Donc $z = \sqrt{3} + i = b$ ce qui est impossible donc $z' \neq b$

Et dans ces conditions on a :

$\dfrac{b^2}{2} = \dfrac{(\sqrt{3} + i)^2}{2} = 1 + i\sqrt{3} = a$ donc $b^2 = 2a$

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} &= \frac{2a}{(a\overline{z}-2b)(z-b)}\\
&= \frac{a}{a\overline{z}-2b} \times \frac{2}{z-b}\\
&= \frac{a}{a(\overline{z}-\frac{2b}{a})} \times \frac{2}{z-b}\\
&= \frac{1}{(\overline{z}-\overline{b})} \times \frac{2}{z-b}\\
&= \frac{2}{(\overline{z-b})(z-b)}\\
&= \frac{2}{|z-b|^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \frac{2}{|z-b|^2}}$$

0.75 pt **c)** En déduire que la droite $(D)$ est une bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}}\right)$

De l'égalité précédente on déduit que si $M \neq B$ et $M' \neq B$ , On a :

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \frac{2}{|z-b|^2} &\Rightarrow \frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} \in \mathbb{R}_+^*\\
&\Rightarrow \frac{-b}{z'-b} \times \frac{-b}{z-b} \in \mathbb{R}_+^*\\
&\Rightarrow arg(\frac{o-b}{z'-b}) + arg(\frac{o-b}{z-b}) \equiv 0[2\pi]\\
&\Rightarrow arg(\frac{o-b}{z'-b}) \equiv arg(\frac{z-b}{o-b})[2\pi]\\
&\Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{BO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BM}}\right) [2\pi]
\end{aligned}$$

$(BO)$ est la bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}}\right)$

Comme on a : $O \in (D)$ et $B \in (D)$

$$\boxed{\text{Alors : } (D) \text{ est la bissectice de l'angle } \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}}\right)}$$

## Problème : (6.5 pts)

On considère la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{n}{x}$ et soit $(C_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthonormé $(O\vec{i};\vec{j})$.

0.75 pt **1 - a)** Etudier les deux branches infinies de la courbe $(C_n)$ .

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) - \dfrac{n}{x} = -\infty$

Donc $(C_n)$ admet une asymptote verticale à droite de 0 d'équation $x = 0$

$$\text{On a : } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) - \frac{n}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{n}{x^2} = 0$$

Donc $(C_n)$ admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses au voisinage $+\infty$

**0.75 pt** **b)** Etudier les variations de la fonction $f_n$ sur $]0;+\infty[$ pui donner son tableau de vartiation.

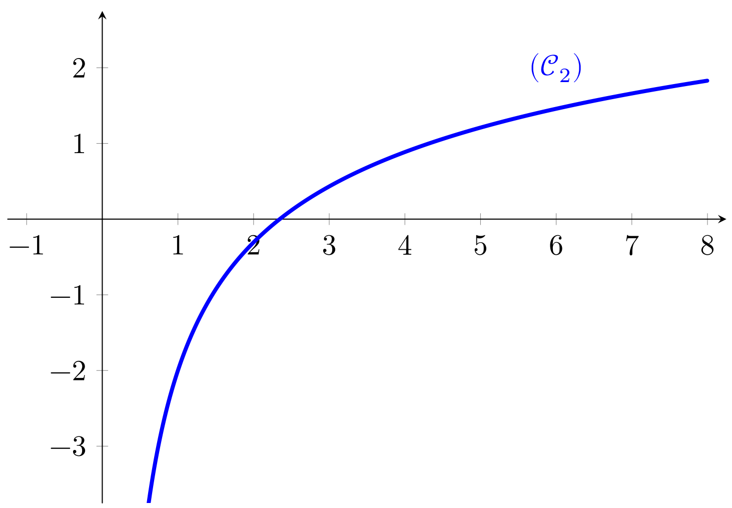
La fonction $f_n$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\forall x \in ]0,+\infty[)\,;\, f_n'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{n}{x^2} = \dfrac{x+n}{x^2}$

On a : $x$ et $n$ strictement positifs.

Donc $f_n$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ $\qquad$ $+$ |
| $f(x)$ | $\Vert$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

**0.5 pt** **c)** Construire $(C_2)$




**0.5 pt** **2 -** Montrer que la fonction $f_n$ est bijective de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

$f_n$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Donc $f_n$ est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $f_n\,(]0;+\infty[)$.

$f_n\,(]0;+\infty[) = ]\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[ = \mathbb{R}$.

D'où $f_n$ est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$

**0.5 pt** **3 - a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \exists! \alpha_n \in ]0;+\infty[; f_n(\alpha_n) = 0$.

$f_n$ est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc 0 admet unique antécédent $\alpha_n$ de $]0;+\infty[$ par $f_n$.

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \exists! \alpha_n \in ]0;+\infty[; f_n(\alpha_n) = 0$.

0.5 pt **b)** Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$.

$(\forall x \in ]0;+\infty[)\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{n+1}{x} - \ln(x) + \dfrac{n}{x} = -\dfrac{1}{x}.$

$\boxed{\text{Donc : } (\forall x \in ]0;+\infty[)\ ;\ f_{n+1}(x) < f_n(x)}$

0.5 pt **c)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ,\ \alpha_n \in ]0;+\infty[$

$f_n(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \qquad Q3-b)$

On a : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$ et $f_n$ strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$f_n(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \Rightarrow f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n) \Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$

$\boxed{\text{D'où : la suite } (\alpha_n)_{n\geq 1} \text{ est strictement croissante.}}$

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $(\forall x \in ]0;+\infty[); x > \ln x$.

On pose $\varphi(x) = x - \ln x$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$(\forall x \in ]0;+\infty[); \varphi(x) \geq \varphi(1)$ et $\varphi(1) = 1$

D'où : $(\forall x \in ]0;+\infty[); \varphi(x) \geq 1$

$\boxed{\text{Donc : } (\forall x \in ]0;+\infty[); x > \ln x}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$f_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha_n) = \dfrac{n}{\alpha_n}$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n > 0 \Rightarrow \ln(\alpha_n) < \alpha_n$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n > \dfrac{n}{\alpha_n}$

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n > \sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \boxed{\text{Donc : } \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty}$

**5 -** Soit $I_n = \dfrac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)dx\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

0.5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists c_n \in [\alpha_n; \alpha_{n+1}]) : I_n = f_n(c_n)$

Utilisation du théorème de la médiane :

On a : $\left|\begin{array}{l} f_n \text{ est continue sur } [\alpha_n,\alpha_{n+1}] \subset ]0;+\infty[ \\ (\forall n\in\mathbb{N}^*);\alpha_n<\alpha_{n+1}\end{array}\right.$

Alors : $\left|\begin{array}{l} \exists c_n \in [\alpha_n,\alpha_{n+1}] \\ \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)dx=(\alpha_{n+1}-\alpha_n)f_n(c_n)\end{array}\right.$

$\exists c_n \in [\alpha_n,\alpha_{n+1}];\ \dfrac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)dx=f_n(c_n)$

$\boxed{\text{Donc : } (\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists c_n\in[\alpha_n;\alpha_{n+1}]) : I_n=f_n(c_n)}$

**0.5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);0\leq I_n\leq\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

$$\begin{aligned}
\alpha_n\leq c_n\leq\alpha_{n+1} \quad &\Rightarrow\quad f_n(\alpha_n)\leq f_n(c_n)\leq f_n(\alpha_{n+1})\text{car :}f_n\text{croissante}\\
&\Rightarrow\quad 0\leq I_n\leq \ln(\alpha_{n+1})-\frac{n}{\alpha_{n+1}}\\
&\Rightarrow\quad 0\leq I_n\leq \ln(\alpha_{n+1})-\frac{n}{\alpha_{n+1}}-\frac{1}{\alpha_{n+1}}+\frac{1}{\alpha_{n+1}}\\
&\Rightarrow\quad 0\leq I_n\leq f_{n+1}(\alpha_{n+1})+\frac{1}{\alpha_{n+1}}f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0\\
&\Rightarrow\quad 0\leq I_n\leq\frac{1}{\alpha_{n+1}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc : } (\forall n\in\mathbb{N}^*);0\leq I_n\leq\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}}$

**0.5 pt** **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_{n+1}=+\infty$ et $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$

$\boxed{\text{Donc : } \lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0}$

## Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique $g_n$ définie sur $[n;+\infty[$ par : $g_n(x)=\int_n^x\dfrac{1}{\ln t}dt$

**0.5 pt** **1 - a)** Montrer que : $g_n$ est dérivable sur $[n;+\infty[$ puis déterminer sa dérivée première $g_n'$

$x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$ est continue sur $[n;+\infty[$

$x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$ admet des primitives sur $[n;+\infty[$. En particulier $g_n(x)$

$g_n'(x)=\dfrac{1}{\ln x}\qquad(\forall x\geq n)$

Donc : $g_n$ est dérivable sur $[n;+\infty[$ et $(\forall x \geq n) : g_n'(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

**0.25 pt** **b)** Montrer que : $g_n$ est strictement croissante sur $[n;+\infty[$

On a : $(\forall x \geq n) : g_n'(x) = \dfrac{1}{\ln x} > 0$

D'où : $g_n$ est strictement croissante sur $[n;+\infty[$

**0.5 pt** **2 - a)** Montrer que : $(\forall x > n)\,;g_n(x) \geq \ln(\dfrac{x-1}{n-1})$

On a : $(\forall x \in [0,+\infty[) : \ln(1+x) \leq x$

On pose $x+1 = t$ alors $(\forall t \in [1,+\infty[) : \ln(t) \leq t-1$

Soit $t$ de $[n,+\infty[$

$$
\begin{aligned}
t \geq n \quad &\Rightarrow \quad t > 1 \\
&\Rightarrow \quad \ln(t) \leq t-1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{t-1} \\
&\Rightarrow \quad \int_n^x \frac{1}{\ln t}dt \geq \int_n^x \frac{1}{t-1}dt \\
&\Rightarrow \quad g_n(x) \geq [ln(t-1)]_n^x \\
&\Rightarrow \quad g_n(x) \geq ln(\frac{x-1}{n-1})
\end{aligned}
$$

$(\forall x > n)\,;g_n(x) \geq \ln(\dfrac{x-1}{n-1})$

**0.25 pt** **b)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\dfrac{x-1}{n-1}) = +\infty$ et $(\forall x > n)\,;g_n(x) \geq \ln(\dfrac{x-1}{n-1})$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

**0.25 pt** **3 - a)** Montrer que $g_n$ est une bijection de $[n;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$

$g_n$ est dérivable sur $[n;+\infty[$ d'après $1-a)$ alors $g_n$ est continue sur $[n;+\infty[$

$g_n$ est strictement croissante sur $[n;+\infty[$

Donc $g_n$ est une bijection de $[n;+\infty[$ dans $g_n([n;+\infty[)$

$g_n([n;+\infty[) = [g_n(n); \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)[= [0;+\infty[$

D'où : $g_n$ est une bijection de $[n;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$

**0.5 pt** **b)** En déduire que : $(\forall n \geq 2)\,(\exists! u_n \geq n) : \int_n^{u_n} \dfrac{1}{\ln t}dt = 1$

$g_n : [n;+\infty[\mapsto [0;+\infty[$ est une bijection

$\Leftrightarrow (\forall y \in [0;+\infty[)(\exists! x \in [n;+\infty[); g_n(x) = y$

(pour $y=1$)$(\exists! u_n \in [n;+\infty[); g_n(x) = 1$

$$\boxed{\text{Donc : } (\forall n \geq 2)\,(\exists! u_n \geq n) : \int_n^{u_n} \frac{1}{\ln t}dt = 1}$$

**4 -** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans $Q3-b$

0.5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2) : \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t}dt$

$$\begin{aligned}
\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}dt &= \int_{u_n}^{n} \frac{1}{\ln t}dt + \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t}dt + \int_{n+1}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}dt \\
&= -1 + \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t}dt + 1 \\
&= \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t}dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } (\forall n \geq 2) : \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t}dt}$$

0.5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

$$\begin{aligned}
(\forall n \geq 2)\, g_n(u_{n+1}) - g_n(u_n) &= \int_n^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}dt - \int_n^{u_n} \frac{1}{\ln t}dt \\
&= \int_n^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}dt + \int_{u_n}^{n} \frac{1}{\ln t}dt \\
&= \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}dt \\
&= \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t}dt
\end{aligned}$$

$\forall t \geq n$ on a : $\frac{1}{lnt} > 0$

Donc : $\int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t}dt > 0$

D'où : $(\forall n \geq 2)\, g_n(u_{n+1}) - g_n(u_n) > 0$

$g_n$ est strictement croissante sur $[n; +\infty[$

$$\boxed{\text{Alors : La suite } (u_n)_{n\geq 2} \text{ est strictement croissante.}}$$

0.25 pt **c)** Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

On a : $(\forall n \geq 2)\,; u_n > n$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat SCIENCES MATHÉMATIQUE**

**Session : Rattrapage** juin 2017

# MATHÉMATIQUES

Série : **SCIENCES MATHÉMATIQUE A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .................................... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .................................... **3 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .................................... **10 points**

## Exercice 1 : ( 3.5 pts )

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle $\mathrm{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et dont l'unité est la matrice $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ et pour tout couple $(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$ , $\mathrm{M(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E=\left\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,5 pt **1 -** Montrer que $E$ est un sous groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$

**2 -** On définit sur $M_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $T$ par :

$$\left(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\right)\quad M(a,b)TM(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$$

0,5 pt Vérifier que $E$ est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),T)$.

**3 -** On considère l'application $\varphi$ de $\mathbb{C}^*$ vers $E$ qui à tout nombre complexe non nul $a+ib$ $(o\ (a,b)\in\mathbb{R}^2)$ faite correspondre la matrice $M(a,b)$ de $E$.

0,75 pt a) Vérifier que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,T)$ et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ où $E^*=E-M(0,0)$.

0,75 pt b) On déduire que $(E^*,T)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre $J$.

0,5 pt **4 -** a) Montrer que la loi $T$ est distributive par rapport a la loi $+$ dans $E$.

0,5 pt b) On déduire que $(E,+,T)$ est un corps commutatif .

## Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m$ un complexe **non nul**.

**Première partie :**

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, $(E)$ : $2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

0,5 pt **1 -** Vérifier que le discriminant l'équation de $(E)$ est : $\Delta=(2im)^2$.

0,5 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

**Deuxième partie :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

On suppose que $m\in\mathbb{C}-\{0,1,i\}$ et on pose : $z_1=\dfrac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2=\dfrac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points : $A$ , $B$ , $M$ , $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectives $1$, $i$, $m$, $z_1$ et $z_2$.

0,25 pt **1 -** a) Vérifier que : $z_1=iz_2+1$

0,5 pt b) Montrer que $M_1$ est l'image de $M_2$ par la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\omega=\dfrac{1+i}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0,5 pt **2 - a)** Vérifier que : $\dfrac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\dfrac{m-1}{m-i}$.

0,5 pt **b)** Montrer que si les points $M$ , $M_1$ et $M_2$ sont alignés , alors le point $M$ appartient au cercle $(\Gamma)$ dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

0,75 pt **c)** Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que les points $\Omega$ , $M$ , $M_1$ et $M_2$ sont cocycliques. ( remarquer que : $\dfrac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)

## Exercice 3 : (3 pts)

On admet que le nombre $2017$ est premier et que $2016 = 2^5 3^2 7$
Soit $p$ **un nombre premier supérieur ou égale à** $5$

**1 -** Soit le couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

0,25 pt **a)** Vérifier que : $p < 2017$ .

0,5 pt **b)** Montrer que $p$ ne divise pas $y$

0,75 pt **c)** Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1\ [P]$ puis en déduire que $p$ divise $2016$

0,5 pt **d)** Montrer que : $p = 7$

1 pt **2 -** Déterminer ,suivant les valeurs de $p$, les couples $(x, y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$.

## Exercice 4 : (10 pts)

**Première partie :**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad et \quad (\forall x \in ]0; +\infty[); \quad f(x) = (1 + \frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(on prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $f$ est continue à droite au point $0$

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction $f$ est dérivable à droite au point $0$

0,5 pt **c)** Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x$ dans l'intervalle $]0; +\infty[$

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ , puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

0,25 pt **b)** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$

0,75 pt **3 - a)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion $I$ qu'on déterminera .

0,5 pt **b)** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ (On prend $f(1) \simeq 0,7$ et $4e^{-3} \simeq 0,2$ ).

**Deuxième partie :**

Soit la fonction $F$ définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

0,25 pt **1 -** Montrer que la fonction $F$ est continue sur $[0; +\infty[$.

0,5 pt **2 - a)** En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$$

.

0,25 pt b) Déterminer : $\int_x^1 (1+\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$ pour tout $x$ de l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,5 pt c) Montrer que : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = e^{-1}$ .

0,5 pt **3 - a)** Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives , $x=0$ , $x=2$ et $y=0$

**4 -** Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définit par : $u_n = F(n) - F(n+2)$.

0,5 pt a) En utilisant le théorème des accroissements finis , montrer que pour tout entier naturel $n$ il existe un nombre réel $v_n$ appartenant à l'intervalle $]n;n+2[$ tel que :

$$u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$$

0,25 pt b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

0,25 pt c) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

**Troisième partie :**

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$ , il existe un nombre réel strictement positif unique $a_n$ tel que : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$ .

0,25 pt b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

0,25 pt c) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ -\frac{1}{a_n} + ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$ .

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall t \in [0;+\infty[)\,;\quad 1-t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1-t+t^2$.

0,5 pt b) Montrer que : $(\forall x \in [0;+\infty[)\,;\quad -\frac{x^2}{2} \leqslant -x + ln(1+x) \leqslant -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

**3 -** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égale à $4$.

0,5 pt a) Vérifier que : $a_4 \geqslant 1$ , en déduire que : $a_n \geqslant 1$ (On admet que $e^{\frac{3}{4}} \geqslant 2$ ).

0,5 pt b) Montrer que : $1 - \frac{2}{3a_n} \leqslant \frac{2a_n^2}{n} \leqslant 1$ (On pourra utiliser les questions $1-c$ et $2-b$ de la partie 3).

0,5 pt c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leqslant a_n$ (On pourra utiliser les questions $3-a$ et $3-b$ de la partie 3 ).

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

0,5 pt d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

FIN

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Expérimental**

**Session : NORMAL 2017**

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère le plan $(P)$ passant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}\,(2;0;2)$ est un vecteur normal et la sphère $(S)$ de centre $\Omega(0;1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan $(P)$

On $\vec{u}\,(2;0;2)$ est un vecteur normal sur le plan $(P)$ alors :

$2\times x+0\times y+2\times z+d=0 \Leftrightarrow 2x+2z+d=0$

et comme $A(0,1,1)\in(P)$, donc : $2\times 0+2\times 1+d=0$

alors : $d=-2$

donc $(P): 2x+2z-2=0$

D'où : $\boxed{(P): x+z-1=0}$

0.75 pt **b)** • Montrons que le plan $(P)$ est tangent à la sphère $(S)$

On a :

$$\begin{aligned} d\,(\Omega;(P)) &= \frac{|x_\Omega+z_\Omega-1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{|0-1-1|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|-2|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \\ &= R \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc le plan } (P) \text{ est tangent à la sphère } (S)}$.

- Vérifions que le point $B$ appartient à la sphère $(S)$ :

$$\begin{aligned}\Omega B &= \sqrt{(x_B - x_\Omega)^2 + (y_B - y_\Omega)^2 + (z_B - z_\Omega)^2} \\ &= \sqrt{(-1-0)^2 + (1-1)^2 + (0-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{1+1} \\ &= \sqrt{2} \\ &= R\end{aligned}$$

Donc $\Omega B = R$, alors $B \in (S)$

et on a : $-1+0+1=0$, donc $B(-1;1;0) \in (P)$

D'où B est le point de contact.

0.25 pt **2 - a)** Déterminons une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ passant par le point $A(0;1;-1)$ et orthogonal au plan $(P)$.

Comme $\vec{u}(2;0;2)$ est normal sur $(P)$, alors est un vecteur directeur de la droite $(\Delta)$.

Alors la représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 1 + 0 \times t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

D'où $(\Delta)$ : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ $/(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$

0.75 pt **b)** Montrons que la droite $\Delta$ est tangent à la sphère $(S)$.

On sait que : $d(\Omega;(\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$, et on a : $\overrightarrow{A\Omega}\,(0;0;-2)$ et $\overrightarrow{u}\,(2;0;-2)$

alors : $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{u} =$

$$\begin{aligned}\text{alors : } \overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \\ &= (0\times(-2) - (-2)\times 0)\overrightarrow{i} - (0\times(-2) - (-2)\times 2)\overrightarrow{j} + (0\times 0 - 0\times 2)\overrightarrow{k} \\ &= 0 \times \overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 0 \times \overrightarrow{k} \\ &= -4\vec{j}\end{aligned}$$

donc : $\|\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{u}\| = \|-4\vec{j}\| = \sqrt{(-4)^2 = 4}$ et que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

alors : $d(\Omega;(\Delta)) = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$

D'où la droite $(\Delta)$ est tangente à la sphère $(S)$.

0.75 pt **3 -** Montrons que : $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{k}$ :

On a : $\overrightarrow{OC}\,(1;1;0)$ et $\overrightarrow{OB}\,(-1;1-0)$

alors :

$$\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=(1\times 0-0\times 1)\vec{i}-(1\times 0-0\times 1)\vec{j}+(1\times 1-1\times(-1))\vec{k}$$
$$=0\times\vec{i}-0\times\vec{j}+2\vec{k}$$
$$=2\vec{k}$$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}}$.

Déduisons l'aire du triangle $OBC$ :

On sait que : $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|$

Donc : $\boxed{S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2}=1u.a}$

## Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient 8 boules portant les nombres 0 ;0 ;2 ;2 ;2 ;2 ;1 ;4( les boules sont indiscernables à toucher). On tire au hasard, simultanément trois boules de l'urne.

Donc on a : $card(\Omega)=\mathrm{C}_8^3=\frac{8!}{3!5!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$

**1.5 pt** **1 -** L'événement A : "Parmi les trois boules tirées, aucun ne porte le nombre 0"

L'événement B : "Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8"

Montrons que : $p(A)=\frac{5}{14}$ et $p(B)=\frac{1}{7}$

On sait que : $p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$

On a : $card(A)=\mathrm{C}_6^3=\frac{6!}{3!3!}=\frac{4\times5\times6}{3\times2}=20$

et : $card(B)=\mathrm{C}_4^3+\mathrm{C}_1^1\times\mathrm{C}_4^1\times\mathrm{C}_1^1=\frac{4!}{3!1!}+1\times+\frac{4!}{1!3!}\times 1=4+4=8$

donc : $\boxed{p(A)=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}}$ et $\boxed{p(B)=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}}$

**2 -** Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

**0,5 pt** **a)** Montrons que $p(X=16)=\frac{3}{28}$

On a : $p(X=16)=\frac{\mathrm{C}_4^2\times\mathrm{C}_1^1}{56}$

$\boxed{\text{Donc : } p(X=16)=\frac{3}{28}}$

**1 pt** **b)** • Calculons $P(X=0)$

On sait que : $Card(X=0)=C_2^1\times C_6^2+C_2^2\times C_6^1=2\times15+1\times6=36$

$$\boxed{\text{Donc : } P(X=0)=\frac{card(X=0)}{card(\Omega)}=\frac{36}{56}=\frac{18}{28}}$$

- Calculons $P(X=4)$

  On sait que :$Card(X=4) = C_4^2 \times C_1^1 = 1 \times 6 = 6$

  $\boxed{\text{Donc : } P(X=4) = \dfrac{card(X=4)}{card(\Omega)} = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}}$

- Calculons $P(X=0)$

  On sait que :$Card(X=8) = C_4^3 + C_4^2 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_4^1 + C_1^1 = 4 + 4 = 8$

  $\boxed{\text{Donc : } P(X=8) = \dfrac{card(X=8)}{card(\Omega)} = \dfrac{8}{56} = \dfrac{1}{7}}$

D'où :

| $X = x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{18}{28}$ | $\frac{3}{28}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{3}{28}$ |

## Exercice 3 : (3 pts)

On considère les nombres complexes $a$ et $b$ tels que : $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3} + 1\right) i$

**0,25 pt** **1 - a)** Vérifions que : $b = (1+i)\, a$.

On a :

$$\begin{aligned}(1+i)\, a &= (1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)\\ &= \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} + i^2\\ &= \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} - 1\\ &= \sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3}+1\right) i\\ &= b\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc : } b = (1+i)\, a}$

**0.5 pt** **b)** Déduisons que $|b| = 2\sqrt{2}$ et que : $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

On a :

$$\begin{aligned}|b| &= |(1+i)\, a|\\ &= |(1+i)|\, |a|\\ &= \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}\right)\\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{4}\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}\arg b &= \arg\left((1+i)\,a\right)\\ &= \arg(1+i)+\arg(a)\end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned}1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

donc : $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a :

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{3}+i\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\end{aligned}$$

donc : $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\boxed{\text{D'où : } \arg b\equiv\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]}$

**0.5 pt** **c)** On a :

$$\begin{aligned}b &= \sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}i\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\times 2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\times 2}i\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc : } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

**2 -** Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$,on considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a$ et $b$ et le point $C$ d'affixe $c$ tel que : $c=-1+i\sqrt{3}$

**0.75 pt** **a)** Vérifions que : $c = ia$ puis en déduire que $OA = OC$ et que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

On a :

$$\begin{aligned} c &= -1 + i\sqrt{3} \\ &= i^2 + i\sqrt{3} \\ &= i\left(i + \sqrt{3}\right) \\ &= ia \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} c = ia &\Rightarrow \frac{c}{a} = i = [1, \frac{\pi}{2}] \\ &\Rightarrow \frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = [1, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

Donc : $OA = OC$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

**0.5 pt** **b)** Montrons que le point $B$ est l'image du point $A$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ :

il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ c-à-d : $z_B - z_A = z_C - z_O = z_C$

On a :

$$\begin{aligned} z_B - z_A &= b - a \\ &= \sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3} + 1\right) i - \left(\sqrt{3} + i\right) \\ &= \sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i \\ &= -1 + i\sqrt{3} \\ &= c \end{aligned}$$

D'où : $B = t_{\overrightarrow{OC}}(A)$

**0.5 pt** **c)** En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré :

On a : $B = t_{\overrightarrow{OC}}(A) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ et on a : $OA = OC$ et que : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $OABC$ est un quadrilatère.

## Problème : (8 pts)

### Partie I

**0.25 pt** **1 -** Vérifions que : $g(1) = 0$.

On a : $g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2\ln(1) = 2 - 2 = 0$, $\boxed{\text{donc } g(1) = 0.}$

**1 pt**

**2 -** A partir du tableau de variations de la fonction $g$.

— Montrons que $g(x) \leq 0$ pour tout $x$ de $]0, 1]$.

D'après le tableau de variation $g$ est croissante sur $]0, +\infty]$, en particulier sur $]0, 1]$. Donc :

$$\begin{aligned} x \leq 1 &\implies g(x) \leq g(1) \quad (\text{Car } g \text{ est croissante sur } ]0,1]) \\ &\implies g(x) \leq 0 \quad (\text{Car } g(1) = 0) \end{aligned}$$

Donc : $g(x) \leq 0$ pour tout $x$ de $]0, 1]$.

— Montrons que $g(x) \geq 0$ pour tout $x$ de $[1, +\infty[$.

D'après le tableau de variation $g$ est croissante sur $]0, +\infty]$, en particulier sur $[1, +\infty[$.

Donc :

$$\begin{aligned} 1 \leq x &\implies g(1) \leq g(x) \quad (\text{Car } g \text{ est croissante sur } ]0,+\infty]) \\ &\implies 0 \leq g(x) \quad (\text{Car } g(1) = 0) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc : } g(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } [1, +\infty[.}$

## Partie II

**0.5 pt**

**1 -** Montrons que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interprétons géométriquement le résultat.

— Montrons que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right) = -\infty \left( \text{car } \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\dfrac{2}{x} = -\infty \right)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right) \ln x = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

— Interprétons géométriquement

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, donc la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\boxed{\text{D'où : la courbe } (\mathcal{C}) \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0.}$

**0.25 pt**

**2 - a)** Montrons que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right) = 1 \left( \text{car } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right) \ln x = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**b)** Montrons que la courbe $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de

**0.75 pt** direction asymptotique celle de la droite $(D)$ d'équation $y = x$.

— On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

— Calculons $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \left(1-\dfrac{2}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x} = \boxed{1}$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

— Calculons $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x = \boxed{0}$

Donc la courbe $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotiqu

**1 pt** **3 - a)** Montrons que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x$ de $]0,+\infty[$.

On a $f$ dérivable sur $]0,+\infty[$ car $f$ est une somme et produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, et on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x + \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\right)' \\
&= 1 + \left(1-\frac{2}{x}\right)'\ln x + \left(1-\frac{2}{x}\right)(\ln x)' \\
&= 1 + \frac{2}{x^2}\ln x + \left(1-\frac{2}{x}\right)\times\frac{1}{x} \\
&= 1 + \frac{2}{x^2}\ln x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \\
&= \frac{x^2 + 2\ln x + x - 2}{x^2} \\
&= \frac{x^2 + x - 2 + 2\ln x}{x^2} \\
&= \frac{g(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

Donc : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x$ de $]0,+\infty[$.

**0.75 pt** **b)** Montrons que $f$ est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

Étudions le signe de $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ c'est-à-dire étudions le signe de $g(x)$.

D'après ce qui précède :

— $g(x) \leq 0$ pour tout $x$ de $]0,1]$, donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x$ de $]0,1]$, d'où $f$ est décroissante sur $]0,1]$.

— $g(x) \geq 0$ pour tout $x$ de $[1,+\infty[$, donc $f'(x) gleq 0$ pour tout $x$ de $[1,+\infty[$.

D'où $f$ est croissante sur $[1, +\infty[$.

0.25 pt

**c)** Le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $f(1) = 1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

0.5 pt

**4 - a)** Résoudrons dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation : $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$.

On a :

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0 &\iff 1 - \frac{2}{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \ln x = 0 \\ &\iff \frac{2}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad x = 1 \\ &\iff x = 2 \in ]0, +\infty[ \quad \text{ou} \quad x = 1 \in ]0, +\infty[\end{aligned}$$

Donc l'équation : $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$ admet deux solutions dans $]0, +\infty[$ et sont : $x = 1$ et $x = 2$.

**b)** En déduirons que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe la droite $(D)$ en deux points dont on déterminera les coordonnées.

0.5 pt

Soit $x \in ]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}M(x, y) \in (\mathcal{C}) \cap (D) &\iff f(x) = y \quad \text{et} \quad y = x \\ &\iff f(x) = x \\ &\iff x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = x \\ &\iff \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0 \\ &\iff x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 1\end{aligned}$$

Donc pour $x = 1$, on a $y = x = 1$, et pour $x = 2$, on a $y = 2$ (car $f(x) = y = x$).

D'où la courbe $(\mathcal{C})$ coupe la droite $(D)$ en deux points des coordonnées $(1, 1)$ et $(2, 2)$.

**c)** Montrons que $f(x) \leq x$ pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[1, 2]$ et en déduire la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(D)$ sur l'intervalle $[1, 2]$.

0.75 pt

Soit $x \in ]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x - x \\ &= \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x \\ &= \left(\frac{x-2}{x}\right)\ln x \\ &= (x-2)\ln x \end{aligned}$$

On sait que $\ln x \geq 0$ et que $x - 2 \leq 0$ sur $[1,2]$ , donc $(x-2)\ln x \leq 0$

D'où $f(x) \leq x$ pour tout $x$ de $[1,2]$.

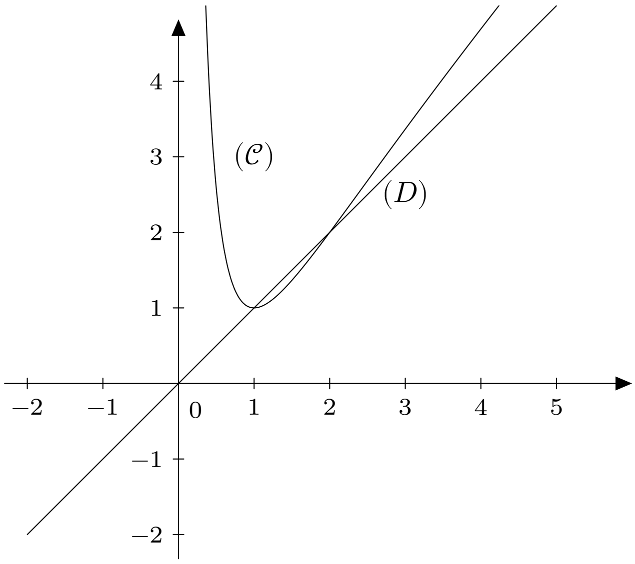
La position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(D)$ sur l'intervalle $[1,2]$ est :

— la courbe $(\mathcal{C})$ coupe la droite $(D)$ en deux points $(1,1)$ et $(2,2)$.

— la courbe $(\mathcal{C})$ est strictement en dessous la droite $(D)$ sur l'intervalle $[1,2]$.

**5 -** Construisons dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite $(D)$ et la courbe $(\mathcal{C})$ (on admettra que

**1 pt** la courbe $(\mathcal{C})$ possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre $2,4$ et $2,5$).




**0.5 pt** **6 - a)** Montrons que : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\ln x \mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^2}{x}\right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{1} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

**b)** Montrons que la fonction $H : x \mapsto 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction

**0.25 pt** $h : x \mapsto \dfrac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

— $H$ est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$

— Pour tout $x$ de $]0,+\infty[$ $H'(x) = (2\ln x - x)' = \dfrac{2}{x} - 1 = h(x)$

Donc $H$ est une fonction primitive de la fonction $h$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

**0.5 pt**

**c)** Montrons à l'aide d'une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x dx = (1-\ln 2)^2$.

On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{2}{x}-1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = 2\ln x - x \end{cases}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x dx &= [(2\ln x - x)\ln x]_1^2 - \int_1^2 (2\ln x - x)\times\frac{1}{x}dx \\
&= (2\ln(2)-2)\ln 2 - (2\ln(1)-1)\ln 1 - \int_1^2 (2\frac{\ln x}{x}-1)dx \\
&= (2\ln(2)-2)\ln 2 - \left(2\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx - \int_1^2 dx\right) \\
&= 2(\ln(2))^2 - 2\ln 2 - 2\times\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + [x]_1^2 \\
&= 2(\ln(2))^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 2 - 1 \\
&= (\ln(2))^2 - 2\ln 2 + 1 \\
&= (\ln x - 1)^2
\end{aligned}$$

Donc : $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x dx = (1-\ln 2)^2$.

**0.5 pt**

**d)** Calculons en cm$^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(D)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. On la note par $\mathcal{A}$, donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left(\int_1^2 |f(x)-x|\,\mathrm{d}x\right)||\vec{i}||\times||\vec{j}|| \\
&= \left(\int_1^2 x - f(x)\,\mathrm{d}x\right)||\vec{i}||\times||\vec{j}|| \quad (\text{car } f(x)\leq x \text{ sur } [1,2]) \\
&= \left(\int_1^2 \left(x - \left(x + \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\right)\right)\,\mathrm{d}x\right) 1\times 1\,cm^2 \\
&= \left(\int_1^2 \left(-\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\right)\,\mathrm{d}x\right)\,cm^2 \\
&= \left(\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,\mathrm{d}x\right)\,cm^2 \\
&= (\ln x - 1)^2\,cm^2.
\end{aligned}$$

## Partie III

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$.

**0.5 pt**

**1 -** Montrons par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel $n$.

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $1 \leq u_0 = \sqrt{3} \leq 2$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leq u_n \leq 2$, et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. On a :

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq 2 &\implies f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \quad (\text{car } f \text{ est croissante sur } [1,2]) \\ &\implies 1 \leq u_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$

— Conclusion : D'où $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel $n$.

**0.5 pt**

**2 -** Montrons que la suite $(u_n)$ est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question ).

On a d'après le question II.4.c on a : $(\forall x \in [1,2])\ f(x) \leq x$

et on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n \leq 2$ c'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in [1,2]$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ f(u_n) \leq u_n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \leq u_n$

D'où la suite $(u_n)$ est décroissante.

**0.75 pt**

**3 -** En déduirons que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminons sa limite.

On a $(u_n)$ décroissante et minorée par 1, donc $(u_n)$ est convergente.

Déterminons sa limite $\ell$. On a :

— $f$ est continue sur $[1,2]$

— $f([1,2]) \subset [1,2]$

— $u_0 \in [1,2]$

— $(u_n)$ est convergente

Donc la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$ vérifions $f(\ell) = \ell$

Donc $\ell = 1$ ou $\ell = 2$, puisque $(u_n)$ décroissante donc $\lim u_n \leq u_0 = \sqrt{3}$

D'où $\ell = 1$.

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : de Rattrappage** juillet 2017

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ........................................ **4.5 points**
- Exercice 2 : **Calcul des probabilités** ........................................ **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ........................................ **2.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ........................................ **10 points**

## Exercice 1 : (4.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif, que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre .

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $E = \{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

**0.75 pt** **1 -** Montrer que $E$ est un sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ de dimension 2.

**0.5 pt** **2 - a)** Montrer que $E$ est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

**0.75 pt** **b)** Montrer que : $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

**3 -** On pose $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$ et on considère l'application $\varphi$ de $\mathbb{C}^*$ vers $E^*$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x+iy) = M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$

**0.75 pt** **a)** Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

**0.5 pt** **b)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

**0.75 pt** **c)** Montrer que $J^{2017} = \varphi\left(3^{1008}\ \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ , puis déterminer l'inverse de la matrice $J^{2017}$ dans $(E^*,\times)$.

**0.5 pt** **4 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

## Exercice 2 : (3 pts)

Un sac contient $2n$ boules $(n \in \mathbb{N}^*)$, dont $n$ sont blanches et $n$ sont noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boulle et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points.
- Si les deux boules tirées sont noires,on perd 20 points.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul.

**0.75 pt** **1 -** Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

**2 -** On répète 5 fois le jeu précédent.

**0.5 pt** **a)** Calculer la probabilité de gagner 100 points.

**1 pt** **b)** Calculer la probabilité de gagner 40 points.

**3 -** Au cours d'un jeu , on considère la variable $X$ qui prend uniquement les valeurs $-20$ si on perd, 0 si le gain est nul et $+20$ si on gagne.

**0.5 pt** **a)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire$X$.

**0.25 pt** **b)** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.

## Exercice 3 : ( 2.5 pts )

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Soient $M$ le point d'affixe le nombre complexe non nul $z$ et $M'$ le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

**0.5 pt** **1 -** Déterminer le nombre complexe $z$ pour que les deux points $M$ et $M'$ soient confondus.

**2 -** On suppose que $M$ est distinct des points $A$ et $B$ d'affixes respectifs 1 et $-1$.

**0.5 pt** Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

**3 -** Soit $(\Delta)$ la médiatrice du segment $[AB]$.

**0.75 pt** Montrer que : si $M$ appartient à $(\Delta)$ alors $M'$ appartient à $(\Delta)$.

**4 -** Soit $(\Gamma)$ le cercle dont un diamètre est $[AB]$.

**0.75 pt** Montrer que si $M$ appartient à $(\Gamma)$ alors $M'$ appartient à la droite $(AB)$

## Exercice 4 : (10 pts)

### Partie A :

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} & ; x \in ]0; +\infty[ \\ f(0) = 1 \end{cases}$

**0.5 pt** **1 -** Montrer que $f$ est continue sur l'intervalle $I$.

**0.5 pt** **2 - a)** Soit $x$ dans $I$. Montrer que $\forall t \in [0; x]$ ; $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

**0.5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall x \in I)$ ; $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

**0.75 pt** **c)** Montrer que $f$ est dérivable à droite en 0.

**0.5 pt** **3 - a)** Sachant que $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, Calculer $f^{'}(x)$ pour tout $x$ de $]0; +\infty[$ .

**0.25 pt** **b)** Étudier les variations de $f$ sur $I$.

### Partie B :

Soit $g$ la fonction numérique définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t; & x \in ]0; +\infty[ \\ g(0) = 1 \end{cases}$

**0.5 pt** **1 - a)** Montrer que : $(\forall x \in ]0; +\infty[)$ ; $f(x) \leq g(x) \leq 1$.

**0.75 pt** **b)** Montrer que $g$ est dérivable à droite en 0.

**2 -** Montrer que $g$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[ ; \quad g^{'}(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - g(x)\right)$$

**0.75 pt**

**0.25 pt** **3 -** Montrer que $g$ est décroissante sur l'intervalle $I$.

**4 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$

**0.75 pt** (Remarque que : $\forall x \in ]0; +\infty[$ ; $0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$)

**0.5 pt** **b)** Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

### Partie C :

**0.75 pt** **1 -** Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0;1[$.

**0.5 pt** **2 - a)** Vérifier que : $\forall x \in ]0;+\infty[\,;\quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$

(on pourra utiliser la question 2-b) partie A)

**0.75 pt** **b)** Montrer que : $\forall x \in ]0;+\infty[\,;\quad \left|g'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$

**3 -** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ ; pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$

**0.75 pt** **a)** Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})\,;\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

**0.75 pt** **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : RATTRAPAGE 2017

# Mathématiques

## Exercice 1 : (4.5 pts)

0,75 pt **1 - Montrons que $E$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ de dimension $2$.**

On a $E$ est une partie non vide de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à valeurs réelles, elle est non vide car : $I = M(1,0) \in E$.

Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de $E$ et $\lambda$ un nombre réel, on a :

$$\begin{aligned}\lambda M(a,b) + M(c,d) &= \lambda \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + c & -3(\lambda b + d) \\ \lambda b + d & \lambda a + c \end{pmatrix} \\ &= M(\lambda a + c, \lambda b + d) \in E\end{aligned}$$

Puisque que $\lambda a + c$ et $\lambda b + d$ sont deux nombres réels. Ainsi $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Soit $M(x,y)$ une matrice de $E$, on a :

$$\begin{aligned}M(x,y) &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= xI + yJ\end{aligned}$$

Donc $(I, J)$ est une famille génératrice de $E$.

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels, on a :

$$\alpha I + \beta J = 0 \implies \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $(I, J)$ est libre. Alors c'est une base de $E$ et on ait $\dim E$ est le nombre d'éléments de $(I, J)$ et c'est 2 . d'où $\dim E = 2$.

0,50 pt **2 - a) Montrons que $E$ est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.**

On a $E$ est une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de $E$, on a :

$$\begin{aligned} M(a,b)\times M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad-3bd & -3(ad+bc)) \\ bc+ad & -3bd+ac \end{pmatrix} \\ &= M(ac-3bd, ad+bc) \in E \end{aligned}$$

Comme $ac-3bd$ et $ad+bc$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

Donc : $\boxed{E \text{ est une partie stable dans } (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times).}$

0,75 pt **b) Montrons que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.**

On a :

— $(E,+)$ est un groupe abélien (car $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel).

— Puisque $E$ est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ et $\times$ est une loi associative et distributive par rapport à $+$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, donc elle est aussi associative et distributive par rapport à $+$ dans $E$ .

— $I = M(0,1)$ est un élément neutre pour la loi $\times$.

Donc $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire.

— Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux éléments de $E$, on a :

$$\begin{aligned} M(a,b)\times M(c,d) &= M(ac-3bd, ad+bc) \\ &= M(ca-3db, cb+da) \\ &= M(c,d)\times M(a,b) \end{aligned}$$

Donc pour tous $M(a,b)$ et $M(c,d)$ dans $E$ : $M(a,b)\times M(c,d) = M(c,d)\times M(a,b)$.

Par suite $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

0,75 pt **3 - a) Montrons que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.**

— Soient $(a,b)$ et $(c,d)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\varphi((a+\imath b)\times(c+\imath d) = \varphi((ac-bd)+\imath(bc+ad)) = \left(ac-bd, \frac{bc+ad}{\sqrt{3}}\right)$$

et on a : $$\begin{aligned} \varphi(a+\imath b)\times\varphi(c+\imath d) &= M\left(a,\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\times M\left(c,\frac{d}{\sqrt{3}}\right) \\ &= M\left(ac-3\times\frac{b}{\sqrt{3}}\times\frac{d}{\sqrt{3}}, a\times\frac{d}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\times c\right) \\ &= M\left(ac-bd, \frac{bc+ad}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\varphi \text{ est un morphisme de } (\mathbb{C}^*,\times) \text{ vers } (E^*,\times).}$

— Soit $M(a,b)\in E^*$. Résoudrons l'équation : $\varphi(x+\imath y) = M(a,b)$.

On a : $$\varphi(x+\imath y) = M(a,b) \iff M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = M(a,b)$$

$$\iff \begin{cases} x = a \\ \frac{y}{\sqrt{3}} = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = b\sqrt{3} \end{cases}$$

Donc pour tout $M(a,b)\in E^*$ il existe un unique couple $(x,y) = (a, b\sqrt{3})$ de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\varphi(x+\imath y) = M(a,b)$$

D'où : $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } (\mathbb{C}^*,\times) \text{ vers } (E^*,\times).}$

**0,50 pt** **b)** **Déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.**

Comme $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$ et $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif, alors $\boxed{(E^*,\times) \text{ est un groupe commutatif}}$.

**0,75 pt** **c)** **Montrons que $J^{2017} = \varphi\left(3^{1008}\ \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$, puis déterminons l'inverse de la matrice $J^{2017}$ dans $(E^*,\times)$.**

On a : 
$$\begin{aligned} j^{2017} &= (M(0,1))^{2017} \\ &= \left(M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017} \\ &= (\varphi(0+\imath\sqrt{3}))^{2017} \\ &= (\varphi(\imath\sqrt{3}))^{2017} \\ &= \varphi(\imath\sqrt{3})\times\varphi(\imath\sqrt{3})\times\cdots\times\varphi(\imath\sqrt{3})\,;\ 2017\text{fois} \\ &= \varphi(\imath^{2017}\times(\sqrt{3})^{2017}) \\ &= \varphi(\imath\times\sqrt{3}\times(\sqrt{3}^2)^{1008}) \\ &= \varphi(\imath\times\sqrt{3}\times 3^{1008}) \end{aligned}$$

$$\boxed{j^{2017} = \varphi(\imath\times\sqrt{3}\times 3^{1008})}$$

On a : 
$$\begin{aligned} \left(j^{2017}\right)^{-1} &= \left(\varphi(\imath\times\sqrt{3}\times 3^{1008})\right)^{-1} \\ &= \varphi\left(\left(3^{1008}\sqrt{3}\imath\right)^{-1}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{3^{1008}\sqrt{3}\imath}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{-\imath}{3^{1008}\sqrt{3}}\right) \\ &= \varphi\left(0+\imath\frac{-1}{3^{1008}\sqrt{3}}\right) \\ &= M\left(0,\frac{-1}{3^{1008}\sqrt{3}\sqrt{3}}\right) \\ &= M\left(0,\frac{-1}{3^{1009}}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(j^{2017}\right)^{-1} = M\left(0,\frac{-1}{3^{1009}}\right)}$$

**0,75 pt** **4 -** **Montrons que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.**

On a $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif, donc il suffit de montrer que tout $M(x,y)$ de $E^*$ admet un inverse dans $E^*$.

Soit $M(x,y)\in E^*$. On a : $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$, par suite $\det(M(x,y)) = x^2+3y^2 \neq 0$ car $(x,y)\neq(0,0)$.

$$\left(M(x,y)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+3y^2} & \frac{-3y}{x^2+3y^2} \\ \frac{-y}{x^2+3y^2} & \frac{x}{x^2+3y^2} \end{pmatrix} = M\left(\frac{x}{x^2+3y^2},\frac{-x}{x^2+3y^2}\right)\in E^*$$

D'où : $\boxed{(E,+,\times) \text{ est corps commutatif}}$.

## Exercice 2 : (3 pts)

0,75 pt **1 - Calculons la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.**

Posons les évènements :

— $A$ : "gagner 20 points" c'est-à-dire les deux boules tirer sont de couleur blanches.

— $B$ : "perdre 20 points" c'est-à-dire les deux boules tirer sont de couleur noires.

— $C$ : "le gain est nul"

Alors on a : $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

**2 -** On répète 5 fois le jeu précédent.

0,50 pt **a) Calculons la probabilité de gagner $100$ points.**

On pose : $D$ : "gagner 100 points".

Pour gagner 100 points, il faut gagner dans chaque cas 20 points, ainsi on obtient :

$$P(D) = C_5^5 \times P(A)^5 \times (1 - P(A))^0 = 1 \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

1,00 pt **b) Calculons la probabilité de gagner $40$ points.**

On pose : $E$ : "gagner 20 points".

Pour gagner 20 points, il faut gagner deux cas 20 points, ainsi on obtient :

$$P(E) = C_5^2 \times P(A)^2 \times (1 - P(A))^3 = 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{512}$$

0,50 pt **3 - a) Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.**

| $x_i$ | $-20$ | $0$ | $20$ |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

0,25 pt **b) Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.**

On a : $E(X) = \left(-20 \times \frac{1}{4}\right) + \left(0 \times \frac{1}{2}\right) + \left(20 \times \frac{1}{4}\right) = 0$

D'où : $\boxed{E(X) = 0}$

## Exercice 3 : (2.5 pts)

**0,50 pt** **1 - Déterminons le nombre complexe $z$ pour que les deux points $M$ et $M'$ soient confondus.**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a :
$$\begin{aligned} M = M' &\iff z' = z \\ &\iff \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z \\ &\iff \frac{1}{z} = z \\ &\iff z^2 = 1 \\ &\iff z = -1 \text{ ou } z = 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{z = 1 \text{ ou } z = -1}$

**0,50 pt** **2 - Montrons que : $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.**

Soit $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$, on a :
$$\begin{aligned} \frac{z'+1}{z'-1} &= \frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+1}{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})-1} \\ &= \frac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2} \\ &= \frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1} \\ &= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} \\ &= \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 \text{ pour tout } z \text{ dans } \mathbb{C}^* \setminus \{-1,1\}.}$

**0,75 pt** **3 - Montrons que si $M$ appartient à $(\Delta)$ alors $M'$ appartient à $(\Delta)$.**

Soit $(\Delta)$ la médiatrice de $[AB]$. On suppose que $M \in (\Delta)$. On a : $M \in (\Delta) \iff AM = BM$, ainsi $\dfrac{BM}{AM} = 1$ $(A \neq B)$.

Montrons que $M' \in (\Delta)$. On a :
$$\frac{BM'}{AM'} = \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right| = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Donc $AM' = BM'$, d'où $\boxed{M' \in (\Delta)}$

**0,75 pt** **4 - Montrons que si $M$ appartient à $(\Gamma)$ alors $M'$ appartient à la droite $(AB)$.**

On a : $M \in (\Gamma) \Longrightarrow$ Le triangle $AMB$ est rectangle en $M$

$$\Longrightarrow (AM) \perp (BM)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) \in \imath\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in \imath\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{z - z_B}{z' - z_A}\right)^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow (AM') \parallel (BM')$$

$$\Longrightarrow M' \in (AB)$$

## Problème : (8 pts)

**Partie A :**

0,50 pt **1 - Montrons que $f$ est continue sur l'intervalle $I$.**

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, $f$ est continue comme étant le quotient de deux fonctions continues sur l'intervalle $]0,+\infty[$ avec le dénominateur ne s'annulant pas sur $]0,+\infty[$.

Étudions maintenant la continuité de $f$ à droite en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x-0} = 1$$

Comme $f(0) = 1$, donc $f$ continue à droite en 0. D'où $f$ est continue sur $I$.

0,50 pt **2 - a) Montrons que :** $\forall t \in [0;x]$ **;** $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$.

On a : $t \in [0,x] \Longrightarrow 0 \leq t \leq x$

$$\Longrightarrow 0 \leq t^2 \leq x^2$$

$$\Longrightarrow 1 \leq 1+t^2 \leq 1+x^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1.$$

Donc $\boxed{\forall t \in [0;x] \;;\; \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1}$

0,50 pt **b) Montrons que :** $(\forall x \in I)$ $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

On a : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \implies \displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}t \leq \int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\mathrm{d}t$

$$\implies \left[\frac{t}{1+x^2}\right]_0^x \leq [\arctan(t)]_0^x \leq [t]_0^x$$

$$\implies \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x.$$

Donc $\boxed{(\forall x \in I)\ ;\ \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x}$

0,75 pt **c) Montrons que $f$ est dérivable à droite en $0$.**

On a : $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x \implies \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{\arctan(x)}{x} \leq 1\ ;\ x > 0$

$$\implies \frac{1}{1+x^2} - 1 \leq \frac{\arctan(x)}{x} - 1 \leq 0\ ;\ x > 0$$

$$\implies \frac{-x}{1+x^2} \leq \frac{\frac{\arctan(x)}{x} - 1}{x} \leq 0\ ;\ x > 0$$

$$\implies \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 0$$

$$\implies \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } 0 \\ \text{et} f'_d(0) = 0 \end{cases}$$

0,75 pt **3 - a) Calculons $f'(x)$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$.**

On a $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ car :

- $x \mapsto \arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0;+\infty[$.
- $x \mapsto x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.

Soit $x \in ]0;+\infty[$,on a : $f'(x) = \left(\dfrac{\arctan(x)}{x}\right)'$

$$= \frac{x(\frac{1}{1+x^2}) - \arctan(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2}$$

0,25 pt **b) Étudions les variations de $f$ sur $I$.**

On a : $\forall x \in ]0;+\infty[\ ;\ f'(x) = \dfrac{x(\frac{1}{1+x^2}) - \arctan(x)}{x^2}$

Comme $x^2 > 0\, \forall x \in ]0;+\infty[$, donc le signe $f'(x)$ est le signe de $x \mapsto x(\frac{1}{1+x^2}) - \arctan(x)$.

D'après la question **A.2.b**, on a : $x(\frac{1}{1+x^2}) - \arctan(x) \leq 0$

Donc : $\boxed{f'(x) \leq 0, \text{ d'où } f \text{ est décroissante sur } I}$

**Partie B :**

0,50 pt **1 - a) Montrons que : $(\forall x \in ]0;+\infty[)\ ;\ f(x) \leq g(x) \leq 1$.**

Soient $x$ et $t$ deux éléments de $]0,+\infty[$, on a :

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \arctan(t) \leq t \implies \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{\arctan(t)}{t} \leq 1 \; ; \; t>0$$
$$\implies \int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \leq \int_0^x \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)\mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\mathrm{d}t$$
$$\implies [\arctan(t)]_0^x \leq \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leq [t]_0^x$$
$$\implies \arctan(x) \leq \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leq x$$
$$\implies \frac{\arctan(x)}{x} \leq \int_0^x \frac{1}{x} f(t)\mathrm{d}t \leq 1 \; ; \; x>0$$
$$\implies f(x) \leq g(x) \leq 1 \; ; \; x>0$$

Pour $x=0$ on remarque que : $1 \leq 1 \leq 1$, c'est à dire que $f(0) \leq g(0) \leq 1$ est valable aussi.

D'où : $\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[) \; ; \; f(x) \leq g(x) \leq 1}$

**0,75 pt** **b)** **Montrons que $g$ est dérivable à droite en $0$.**

On a pour tout $x$ de $]0,+\infty[$ : $f(x) \leq g(x) \leq 1 \implies f(x)-1 \leq g(x)-1 \leq 0$

$$\implies \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq 0 \; ; \; x>0$$
$$\implies \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \leq 0$$
$$\implies 0 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \leq 0$$
$$\implies \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$$
$$\implies \begin{cases} g \text{ est dérivable à droite en } 0 \\ \text{et} g'_d(0) = 0 \end{cases}$$

Donc : $\boxed{g \text{ est dérivable à droite en } 0}$.

**0,75 pt** **2 - Montrons que $g$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que :**

$$\forall x \in ]0;+\infty[; \quad g'(x) = (f(x) - g(x))$$

On a $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $0 \in [0,+\infty[$ Donc il existe une unique primitive $\varphi$ sur $[0,+\infty[$ telle que :

$$\begin{cases} (\forall x \in [0,+\infty[) \; : \; \varphi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \varphi(0) = 0 \\ (\forall x \in [0,+\infty[) \; : \; \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

Donc on obtient : $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

Les fonctions $x \mapsto \varphi(x)$ x et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $[0;+\infty[$.

Donc $g$ est dérivable aussi sur $]0;+\infty[$.

On a pour tout $x$ de $]0,+\infty[$ : $g'(x) = \left(\dfrac{\varphi(x)}{x}\right)'$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)' \\ &= \frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2} \\ &= \frac{xf(x)-\varphi(x)}{x^2} \\ &= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) \\ &= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}(g(x)) \\ &= \frac{1}{x}(f(x)-g(x)) \end{aligned}$$

**0,25 pt**

**3 - Montrons que $g$ est décroissante sur l'intervalle $I$.**

On a : $x > 0 \implies f(x) \leq g(x)$

$$\begin{aligned} &\implies (f(x)-g(x)) \leq 0 \\ &\implies \frac{1}{x}(f(x)-g(x)) \leq 0 \\ &\implies g'(x) \leq 0 \end{aligned}$$

$g$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

D'où : $\boxed{g \text{ est décroissante sur l'intervalle } I.}$

**0,75 pt**

**4 - a) Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.**

Soient $x \in ]1;+\infty[$ et $1 \leq t \leq x$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \arctan(t) \leq \frac{\pi}{2} &\implies 0 \leq \frac{\arctan(t)}{t} \leq \frac{\pi}{2t} \\ &\implies 0 \leq \int_1^x \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\big[\ln|t|\big]_1^x \\ &\implies 0 \leq \int_1^x f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{\pi\ln(x)}{2} \\ &\implies 0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &\implies 0 \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &\implies 0 \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \leq 0 \\ &\implies \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

**0,50 pt**

**b) Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.**

On a : $0 \leq t \leq 1 \implies f(1) \leq f(t) \leq f(0)$ ; Car la fonction est décroissante

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{\pi}{4} \leq f(t) \leq 1 \\
&\implies \frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leq 1 \\
&\implies \frac{\pi}{4x} \leq \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x} \\
&\implies \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{4x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \\
&\implies 0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leq 0 \\
&\implies \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0 + 0 = 0.$

**Partie C :**

0,75 pt **1 - Montrons que l'équation : $g(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0;1[$.**

La fonction $\varphi : x \mapsto g(x) - x$ est continue sur $[0,1]$

et $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = -1$, donc $\varphi(0) \times \varphi(1) \leq 1$.

Donc d'après le thèorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, ou encore $g(\alpha) = \alpha$.

On a $\varphi$ est dérivable sur $[0,1]$ avec pour tout $x \in [0,1]$ ; $\varphi'(x) = g'(x) - 1$

et comme $g'(x) < 0$, alors $\varphi'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$

D'où $\varphi$ est strictement décroissante sur $[0,1]$, donc $\alpha$ est unique.

0,75 pt **2 - a) Vérifions que : $\forall x \in ]0;+\infty[$ ; $0 \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x^2}$.**

On a : $x \in [0,+\infty[ \implies \dfrac{x}{x^2+1} \leq \arctan(x) \leq x$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\arctan(x)}{x} \leq 1 \\
&\implies -1 \leq \frac{-\arctan(x)}{x} \leq \frac{-1}{x^2+1} \\
&\implies 0 \leq 1 - \frac{\arctan(x)}{x} \leq 1 - \frac{1}{x^2+1} \\
&\implies 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall x \in ]0;+\infty[ \,;\, 0 \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x^2}}$

0,75 pt **b) Montrons que : $\forall x \in ]0;+\infty[$ ; $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.**

Soit $x \in ]0;+\infty[$, on a : $0 \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$$\begin{aligned}
&\implies -1 \leq -f(x) \leq \frac{-1}{x^2+1} \\
&\implies \frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq 1 \\
&\implies \int_0^x \left(\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \leq \int_0^x f(x)\mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\mathrm{d}t \\
&\implies \arctan(x) \leq \int_0^x f(x)\mathrm{d}t \leq x \\
&\implies f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}t \leq 1 \\
&\implies f(x) \leq g(x) \leq 1 \\
&\implies 0 \leq g(x) - f(x) \leq \frac{x^2}{x^2+1} \\
&\implies 0 \leq \frac{g(x)-f(x)}{x} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \\
&\implies |g'(x)| \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall x \in ]0;+\infty[\,;\ |g'(x)| \leq \frac{1}{2}}$

0,75 pt

**3 - a) Montrons que :** $(\forall \in \mathbb{N})$ **;** $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $g$ est une fonction continue et dérivable sur $[\alpha, u_n]$, donc d'après le théorème des accroissements finis on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha} &= g'(c) \\
&= \left|\frac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha}|\right| = |g'(x)| \leq \frac{1}{2} \\
&= |u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})|u_n - \alpha|.
\end{aligned}$$

0,75 pt

**b) Montrons que la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente**.

On considère la proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ (P_n) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

On procède par un raisonnement par récurrence :

**Initialisation :**

Pour $n = 0$ on a : $(P_0) : |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$ est vraie.

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

**Hérédité :**

On suppose que la proposition $(P_n)$ est vraie de 0 jusqu'à un certain $n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $(P_{n+1})$ est vraie.

On a : $(P_n)$ est vraie $\Longrightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

$$\Longrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\Longrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\Longrightarrow (P_{n+1}) \text{ est vraie}$$

**Conclusion :**

D'après le principe de récurrence, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}$

Par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2018

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................... **3,5 points**
— Exercice 2 : **Arithmétiques** ............................................... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** ....................................... **3,5 points**
— Exercice 4 : **étude de fonctions et suites numériques** ................ **7,5 points**
— Exercice 5 : **fonction définie par intégrale** ........................... **2,5 points**

## Exercice 1 : ( 3.5 pts )

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble : $E = \{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

**0,25 pt** **1 -** Montrer que $E$ est un sous groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

**0,25 pt** **2 - a)** Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.

**0,5 pt** **b)** On pose $\mathrm{J} = M(0,1)$. Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel $(E,+,.)$.

**0,5 pt**

**0,5 pt** **3 - a)** Montrer que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

**0,5 pt** **b)** Montrer que $(E,+,\times)$ est une anneau commutatif.

**4 -** soit $\varphi$ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ par :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\ );\ \varphi(x+\mathrm{i}y) = M(x+y,-y) = \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$$

**0,5 pt** **a)** Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

**0,5 pt** **b)** On pose $E^* = E - \{\mathrm{O}\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

**0,25 pt** **c)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

**0,25 pt** **5 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

## Exercice 2 : (3 pts )

Soit $p$ un nombre premier tel que : $p = 3+4k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

**0.5pt** **1 -** Montrer que pour tout entier relatif $x$ , si $x^2 \equiv 1[p]$ alors $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

**2 -** Soit $x$ un entier relatif vérifiant $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

**0,5 pt** **a)** Montrer que $x$ et $p$ sont premiers entre eux.

**0.5 pt** **b)** Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$

**0.5 pt** **c)** Vérifier que $2+(k-1)(p-1) = k(p-5)$.

**0,5 pt** **d)** En déduire que : $x^2 \equiv 1\ [p]$

**0.5 pt** **3 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^{62} \equiv [67]$.

## Exercice 3 : (3.5 pts)

Soit $m$ un nombre complexe .

**I -** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation , $(E_m) : z^2 + (\mathrm{i}m+2)z + \mathrm{i}m + 2 - m = 0$

**0,25 pt** **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation $(E_m)$ est $\Delta = (\mathrm{i}m - 2\mathrm{i})^2$.

**0,5 pt** **b)** Donner suivant les valeurs de $m$ l'ensemble des solutions de $(E_m)$.

**0,5 pt** **2 -** Pour $m = \mathrm{i}\sqrt{2}$, écrire les deux solutions de $(E_m)$ sous la forme exponentielle .

**II -** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

On considère les points : $A$ , $\Omega$, $M$, et $M'$ d'affixes respectifs $a = -1 - i$ , $\omega = i$, $m$ et $m' = -im - 1 + i$.

**1 -** Soit $R$ la rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et qui transforme $M$ en $M'$.

**0.25 pt** **a)** Vérifier que $\Omega$ est le centre de la rotation $R$.

**0,5 pt** **b)** Déterminer l'affixe $b$ du point $B$ tel que $A = R(B)$

**0,5 pt** **2 - a)** Vérifier que $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$.

**0,5 pt** **b)** En déduire que les points $A$, $M$ et $M'$ sont alignés si et seulement si les points $A$, $B$ ,$\Omega$ et $M$ sont cocycliques.

**0,5 pt** **c)** Montrer que l'ensemble des points $M$ tel que les points $A$, $M$ et $M'$ soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

## Exercice 4 : (7.5 pts)

**Partie I :**

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer que $(\forall x \in ]0; +\infty[)$ ; $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$

**0,5 pt** **b)** En utilisant le changement de variable $u = t^2$ ; montrer que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) \ ; \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$$

**0,5 pt** **c)** En déduire que $(\forall x \in ]0; +\infty[)$ ; $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$.

**0,25 pt** **d)** Déterminer $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$

**Partie II :**

On considère la fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1) \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$

**0,25 pt** **1 - a)** montrer que $f$ est continue à droite en 0.

**0,5 pt** **b)** montrer que $f$ est dérivable à droite en 0. (on pourra utiliser le résulta de la question I.2).

**0,75 pt** **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**0,5 pt** **2 - a)** Monter que $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ , puis vérifier que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) \ : \ f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

.

**0,25 pt** **b)** En déduire que $f$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

**0,25 pt** **c)** Vérifier que $f\left([0; +\infty[\right) = [1; +\infty[$.

**0,5 pt** **3 -** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$. (on construira le demi tangente à droite au point d'abscisse 0)

**Partie III :**

**1 -** On considère la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

0,5 pt **a)** Monter que $(\forall x \in ]0;+\infty[)\ :\ 0 < f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

0,5 pt **b)** En déduire que $g$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et que $g(]0;+\infty[) = ]-\infty;1[$.

0,25 pt **c)** Monter que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in ]0;+\infty[$.

**2 -** soit $a$ un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ : $u_{n+1} = f(u_n)$

0,25 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

0,5 pt **c)** Montrer par récurrence que :$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$.

0,25 pt **d)** En déduire que le suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

## Exercice 5 : (2.5 pts)

On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :$F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 -** Montrer que $F$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ : $F(x) \geq x$. puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5 pt **b)** Montrer que $F$ est impaire, puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

0,5 pt **c)** Montrer que $F$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

0,5 pt **d)** Montrer que la bijection réciproque $G$ de la fonction $F$ est dérivable en 0, puis calculer $G'(0)$.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : NORMAL 2018**

## MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ , on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

0.25 pt **1 -** Montrons que $E$ est un sous groupe du groupe $(M_2(R),+)$.

On a $E$ est une partie non vide de $M_2(R)$ car $E$ contient au moins un élément de cet ensemble qui est $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ . Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux matrices de $E$ on a

$$\begin{aligned}M(x,y)-M'(x',y')&=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x'&-2y'\\y'&x'+2y'\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x-x'&-2(y-y')\\y-y'&(x-x')+2(y-y')\end{pmatrix}\\&=M(x-x',y-y')\in E\end{aligned}$$

Car $x-x'$ et $y-y'$ sont deux nombre réels

Donc : $\boxed{E \text{ est un sous groupe du groupe } (M_2(R),+)}$

0,25 pt **2 - a)** Montrons que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(R),+,.)$

On a $E\subset M_2(R)$ et $(M_2(R),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Soit $\alpha$ un réel et $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux matrices de $E$ on a

$$\begin{aligned}\alpha M(x,y)+M'(x',y') &= \alpha\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x'+2y'\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \alpha x+x' & -2(\alpha y-y') \\ \alpha y-y' & (\alpha x-x')+2(\alpha y-y')\end{pmatrix}\\ &= M(\alpha x+x',\alpha y+y')\in E\end{aligned}$$

Car $\alpha x+x'$ et $\alpha y+y'$ sont deux nombre réels

Donc : $\boxed{(E,+,.) \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } (M_2(R),+,.)}$

**0,5 pt** **b)** Soit $J=M(0,1)$. Montrons que $(I,J)$ est une base de l'espace vectoriel $(E,+,.)$

Soit $M(x,y)$ un élément de $E$ On a

$$\begin{aligned}M(x,y) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y\end{pmatrix}\\ &= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2\end{pmatrix}\\ &= xM(1,0)+yM(1,0)\\ &= x.I+y.J\end{aligned}$$

Donc la famille $(I,J)$ engendre l'espace $(E,+,.)$

Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels on a

$$\begin{aligned}\alpha I+\beta .J=0 &\Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -2\beta \\ \beta & \alpha+2\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}\end{aligned}$$

Donc la famille $(I,J)$ est libre D'où : $\boxed{(I,J) \text{ est une base de l'espace vectoriel } (E,+,.)}$

**0,5 pt** **3 - a)** Montrons que $E$ est une partie stable de $(M_2(R),\times)$.

il suffit de montrer que $\forall M,N\in E$ on a $M\times N\in E$

$$\begin{aligned} M\times N &= M(x,y)\times M(x',y') \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -2y\beta \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -2y'\beta \\ y' & x'+2y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx'-2yy' & -2\left(x'y+y'x+2yy'\right)\beta \\ x'y+y'x+2yy' & xx'-2yy'+2(x'y+y'x+2yy') \end{pmatrix} \\ &= M(xx'-2yy';x'y+yx'+2yy')\in E \end{aligned}$$

Car $xx'-2yy'$ et $x'y+yx'+2yy'$ sont des réels

D'où : $E$ est une partie stable de $(M_2(R),\times)$

0.5 pt **b)** Montrons que $(E,+,\times)$ est une anneau commutatif.

On a :

■$(E,+)$ est un groupe commutatif ($(E,+,.)$ est un espace vectoriel )

■" $\times$ " est associative

■" $\times$ " est distributive par rapport à " $+$ "

■ Soit $(M(x,y),M(x',y'))\in E^2$ On a

$$\begin{aligned} M(x,y)\times M(x',y') &= M(xx'-2yy';x'y+yx'+2yy') \\ &= M(x'x-2y'y;yx'+x'y+2y'y) \\ &= M(x',y')\times M(x,y) \end{aligned}$$

Donc :$(E,+,\times)$ est une anneau commutatif.

**4 -** Soit $\varphi$ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(R)$ par :

$(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}):\varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$

0,5 pt **a)** Montrons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times) vers (M_2(R),\times)$.

Soit $(z;z')\in(\mathbb{C}^*)^2$ tels que $z=x+iy$ et $z'=a+ib$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi(z\times z') &= \varphi\left((x+iy)(a+ib)\right) \\ &= \varphi\left((xa-yb)+i(xb+ya)\right) \\ &= M\left((xa-yb+xb+ya);-(xb+ya)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(z)\times\varphi(z') &= \varphi(x+iy)\times\varphi(a+ib)\\ &= M\left((x+y)(a+b)-2(-y)(-b);(x+y)(-b)-y(a+b)+2(-y)(-b)\right)\\ &= M\left(xa+xb+ya+yb-2yb;-xb-yb-ya-yb+2yb\right)\\ &= M\left(xa+xb+ya-yb;-(xb+ya)\right)\end{aligned}$$

Donc $\forall(z;z')\in(\mathbb{C}^*)^2:\quad \varphi(z\times z')=\varphi(z)\times\varphi(z')$

D'où $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times) vers (M_2(R),\times)$

0,5 pt **b)** Soit $E^*=E-\{0\}$ Montrons que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

Soit $M(x;y)\in E^*$ Résolvons dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $\varphi(z)=M(x;y)$ On a

$$\begin{aligned}\varphi(z)=M(x;y) &\Longleftrightarrow \varphi(a+ib)=M(x;y)\\ &\Longleftrightarrow M(a+b;-b)=M(x;y)\\ &\Longleftrightarrow a+b=x\text{et } -b=y\\ &\Longleftrightarrow a=x-b\text{et } b=-y\\ &\Longleftrightarrow a=x+y\text{et } b=-y\\ &\Longleftrightarrow z=(x+y)-ib\end{aligned}$$

Donc $\forall M(x;y)\in E^*:\exists(a;b)=(x+y;-y)\in(\mathbb{R}^*)^2:\varphi(a+ib)=M(x;y)$

Donc $\varphi$ est surjective . Et par suite $:\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

0,25 pt **c)** Déduisons que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On a $\varphi$ est un homomorphisme surjective Et puisque $(\mathbb{C}^*,\times)$ , est un groupe commutatif alors $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times)$ est aussi un groupe commutatif Et comme $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ alors :

$(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0,25 pt **5 -** Montrons que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

On a • $(E^*,+)$ est un groupe commutatif

• $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif

• " $\times$ " est distributive par rapport à $+$

Donc : $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

## Exercice 2 : (3 pts)

Soit $p$ un nombre premier tel que : $p=3+4k\ \ (k\in\mathbb{N}^*)$.

0.5 pt **1 -** Montrons que que pour tout entier relatif $x$, si $x^2\equiv 1\,[p]$ alors $x^{p-1}\equiv 1\,[p]$

On a $p-5=4k-2=2(2k-1)$ et $2k-1>1$. Alors :

$$\begin{aligned} x^2 \equiv 1\,[p] &\Rightarrow \left(x^2\right)^{2k-1} \equiv 1^{2k-1}\,[p] \\ &\Rightarrow x^{2(2k-1)} \equiv 1\,[p] \\ &\Rightarrow x^{p-5} \equiv 1\,[p] \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\text{si } x^2 \equiv 1\,[p] \text{ alors } x^{p-1} \equiv 1\,[p].}$

**2 -** Soit $x$ un entier relatif vérifiant $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

**0,5 pt** **a)** Montrons que $x$ et $p$ sont premiers entre eux.

On a, $p$ est un nombre premier, alors soit $p$ divise $x$ ou bien $p \wedge x = 1$.

Supposons que , $x$ est divisible par $p$, on a alors $x^{p-5} \equiv 0[p]$. ce qui contredit le fait que $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

$\boxed{\text{D'où : } x \text{ et } p \text{ sont premiers entre eux.}}$

**0,5 pt** **b)** Montrons que : $x^{p-1} \equiv 1\,[p]$

Comme $p$ est premier et $x \wedge p = 1$ on a alors selon le petit théorème de Fermat :

$\boxed{x^{p-1} \equiv 1\,[p]}$

**0,5 pt** **c)** Vérifions que : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$.

On a :

$$\begin{aligned} 2 + (k-1)(p-1) = k(p-5) &= 2 + kp - k - p + 1 \\ &= kp - 5k + 4k + 3 - p \\ &= k(p-5) + p - p \\ &= k(p-5) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } 2 + (k-1)(p-1) = k(p-5).}$

**0,5 pt** **d)** Déduisons que : $x^2 \equiv 1\,[p]$

on a $x^{p-5} \equiv 1[p] \Rightarrow x^{k(p-5)} \equiv 1^k[p] \equiv 1[p]$. Donc $x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv 1\,[p]$

et on a $x^{p-1} \equiv 1\,[p] \Rightarrow x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1^{(k-1)}\,[p] \Rightarrow x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1\,[p]$

Donc $x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv x^2\,[p]$

D'où $\boxed{x^2 \equiv 1\,[p]}$

**0,5 pt** **3 -** Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1\,[67]$

On a montrer d'après les questions précédentes que $x^{p-5} \equiv 1[p] \Leftrightarrow x^2 \equiv 1\,[p]$

Et comme 67 est une nombre premier qui vérifie $67 = 3 + 4 \times 4$ alors on a $x^{62} \equiv 1\,[67] \Leftrightarrow x^{67-5} \equiv 1\,[67] \Leftrightarrow x^2 \equiv 1\,[67] \Leftrightarrow x^2 - 1 \equiv 0\,[67] \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0\,[67]$

D'où, 67 divise $(x-1)(x+1)$.

Par primalité de 67 , on a 67 divise $x-1$ ou 67 divise $x+1$.

Ainsi, $x \equiv 1\,[67]$ ou $x \equiv -1\,[67]$ D'où :

$\boxed{\text{l'ensemble de solution de l'équation } x^{62} \equiv 1\,[67] \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ est } \{1+67k, -1+67k'/k; k' \in \mathbb{Z}\}.}$

## Exercice 3 : (3.5 pts)

Soit $m$ un nombre complexe.

**I.** On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m)$ d'inconnu $z$

$$(E_m) : z^2 + (im+2)z + im + 2 - m = 0$$

**0,25 pt**

**1 - a)** Vérifions que le discriminant de l'équation $(E_m)$ est $\Delta = (im-2i)^2$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta &= (im+2)^2 - 4(im+2-m) \\
&= -m^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m \\
&= -m^2 + 4m + 4 \\
&= -(m-2)^2 \\
&= (i(m-2))^2 \\
&= (im-2i)^2
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\Delta = (im-2i)^2}$

**0,5 pt**

**b)** Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation $(E_m)$.

Si $m = 2$ alors l'équation $(E_2)$ admet une solution unique

$z = \dfrac{-(2i+2)}{2} = -1-i$

Donc : $\boxed{S = \{-1-i\}}$

Si $m \in \mathbb{C} - \{2\}$ alors l'équation $(E_m)$ admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{-(im+2)+(im-2i)}{2\times 1} = \frac{-2-2i}{2} = -1-i \qquad z_2 = \frac{-(im+2)-(im-2i)}{2\times 1} = \frac{-2im-2+2i}{2} = -1-im+i$$

Donc : $\boxed{S = \{-1-i, -1-im+i\}}$

0,5 pt **2 -** Soit $m = i\sqrt{2}$ écrivons les deux racines de l'équation $(E_m)$ sous la forme exponentielle.

On a

$z_1 = -1-i$ et $z_2 = -1-i\times i\sqrt{2}+i = -1+\sqrt{2}+i$ sont les deux racine de $(E_m)$ pour $m = i\sqrt{2}$

alors

$$\begin{aligned} z_1 &= -1-i \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -1+\sqrt{2}+i \\ &= -1+i+\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} + 1\right) \\ &= \sqrt{2}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{i0}\right) \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}\left(e^{i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)e^{i\frac{3\pi}{8}} \qquad \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0\right) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{z_1 == \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } z_2 = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)e^{i\frac{3\pi}{8}}}$

**II.** Le plan complexe associé a un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points $A, \Omega, M$ et $M'$ d'affixes respectifs $a = -1-i, \omega = i, m$ et $m' = -im-1+i$.

**1 -** Soit $R$ la rotation de d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et qui transforme $M$ en $M'$

**0,25 pt** **a)** Vérifions que $\Omega$ est le centre de $R$

On a l'affixe $z$ du centre de la rotation R est solution de l'équation $z = -iz - 1 + i$

On a

$$\begin{aligned} z = -iz - 1 + i &\Leftrightarrow z + iz = -1 + i \\ &\Leftrightarrow z(1+i) = -1 + i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-1+i}{1+i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{i(1+i)}{1+i} \\ &\Leftrightarrow z = i \end{aligned}$$

Donc $z = \omega$ d'où $\boxed{\Omega \text{ est le centre de } R}$

**0,5 pt** **b)** Déterminons l'affixe $b$ de $B$, où $B$ est le point tel que : $A = R(B)$.

On a : $A = R(B)$ alors

$$\begin{aligned} a = -ib - 1 + i &\Rightarrow ib = -1 + i - a \\ &\Rightarrow -b = -i - 1 - ia \\ &\Rightarrow b = i + 1 + ia \\ &\Rightarrow b = i + 1 + i(-1 - i) \\ &\Rightarrow b = i + 1 - i + 1 \\ &\Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{b = 2}$ est l'affixe de $B$, tel que : $A = R(B)$.

**0,5 pt** **2 - a)** Vérifions que : $m' - a = \dfrac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$

On a

$$\begin{aligned} m' - a &= -im - 1 + i + 1 + i \\ &= -im + 2i \\ &= -i(m-2) \\ &= -i(m-b) \end{aligned}$$

et on a $R(B) = A$ alors $a - \omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-\omega)$ donc $\dfrac{\omega - a}{\omega - b} = -i$

D'où $\boxed{m' - a = \dfrac{\omega - a}{\omega - b}(m-b)}$

**0,5 pt** **b)** Déduisons que les points $A, M$ et $M'$ sont alignés si et seulement si les points $A, B, \Omega$ et $M$ sont cocycliques.

Si $m = a$ :le résultat demandé est évident

Si $m \neq a$ On a $\dfrac{m'-a}{m-a} = \dfrac{\omega - a}{\omega - b} \times \dfrac{m-b}{m-a}$ alors on a :

$$\begin{aligned} A, B\text{et}M'\text{sont alignés} &\Leftrightarrow \frac{m'-a}{m-a} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{\omega - a}{\omega - b} \times \frac{m-b}{m-a} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow A, B, \Omega\text{et}M\text{sont cocycliques} \end{aligned}$$

D'où

$\boxed{\text{les points } A, M \text{ et } M' \text{ sont alignés si et seulement si les points } A, B, \Omega \text{ et } M \text{ sont cocycliques.}}$

**0,5 pt** **c)** Montrons que l'ensemble des points $M$ tel que les points $A, M$ et $M'$ soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

On a les points $A, M$ et $M'$ sont alignés si et seulement si les points $A, B, \Omega$ et $M$ sont cocycliques.

Et par suite $M$ appartient au cercle circonscrit au triangle $AB\Omega$ rectangle et isocèle en $\Omega$ (car $R(B) = A$)

Donc $M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$

De rayon $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{|b-a|}{2} = \dfrac{|3+i|}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Et de centre le point $I$ d'affixe $z_I = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

D'où l'ensemble des points $M$ tel que les points $A, M$ et $M'$ soient alignés est :

$\boxed{\text{le cercle de centre } I \text{ d'affixe } z_I = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i \text{ et de rayon } r = \dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

## Exercice 4 : (7 pts)

### Partie I

0.5 pt

**1 - a)** Montrons que $(\forall x\in]0;+\infty[) : \int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = x-\ln(x+1)$

Soit $x\in]0;+\infty[$ On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^x \left(1-\frac{(1+t)'}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \left[t-\ln(1+t)\right]_0^x\\
&= x-\ln(1+x)
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[) : \int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = x-\ln(x+1)}$

0.5 pt

**b)** En utilisant le changement de variable $u=t^2$ , montrons que :

$(\forall x\in]0;+\infty[) : \int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

On pose : $u=t^2$ donc $t=\sqrt{u}$ et $dt=\frac{1}{2\sqrt{u}}du$

et on a $t=0\to u=0$ et $t=x\to u=x^2$

Donc $\int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

Donc : $\boxed{(\forall x\in]0;+\infty[) : \int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\mathrm{d}u}$

**c)** Déduisons que : $(\forall x\in]0;+\infty[) : \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

Soit $x \in ]0;+\infty[$ et $u \in [0;x^2]$ On a

$$\begin{aligned}
0 \leq u \leq x^2 &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{u} \leq x \\
&\Rightarrow 1 \leq 1+\sqrt{u} \leq 1+x \\
&\Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+\sqrt{u}} \leq 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{1}{2(1+\sqrt{u})} \leq \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \int_0^{x^2} \frac{1}{2(1+x)}\mathrm{d}u \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{2}\mathrm{d}u \\
&\Rightarrow \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(x+1}{x^2}) \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[) : \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}}$

0.25 pt **2 -** Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

On a $(\forall x \in ]0;+\infty[) : \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2(1+x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}}$

## Partie II

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x); x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $f$ est continue à droite en 0.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x+1)\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x+1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

donc $\boxed{: \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = 1}$

D'où $\boxed{f \text{ est continue à droite en } 0.}$

0.5 pt **b)** Montrons que $f$ est dérivable à droite en 0

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)-1}{x}\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2}\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x\ln(1+x)}{x^2}+\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\
&= 1-\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et on a } f'_d(0)=\frac{1}{2}}$

**c)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1)=+\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2}\ln(1+x)\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^2\frac{\ln(1+x)}{x+1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^2=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ donc

$(C)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

**0.5 pt** **2 - a)** Montrons que : $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculons sa dérivée

On a :

- La fonction $f_1 : x \to \dfrac{x+1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ ( fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^*$)
- La fonction $f_2 : x \to \ln(1+x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Donc $\boxed{f = f_1 \times f_2 \text{ est dérivable sur } ]0,+\infty[}$

on a $(\forall x \in ]0,+\infty[)$

Et on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)\right)' \\
&= \left(\frac{x+1}{x}\right)' \times \ln(1+x) + \left(\frac{x+1}{x}\right) \times (\ln(1+x))' \\
&= \frac{-1}{x^2} \times \ln(1+x) + \left(\frac{x+1}{x}\right) \times \frac{1}{1+x} \\
&= \frac{-\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x} \\
&= \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } (\forall x \in ]0,+\infty[) \quad f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$$

**0.25 pt** **b)** Déduisons que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

On a $(\forall x \in ]0,+\infty[) \quad , f'(x) = \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

Comme $x^2 > 0$ pour tout $x \in ]0,+\infty[$

Alors le le signe de $f'(x)$ est le même que le celui de $x - \ln(1+x)$

On a $(\forall x \in ]0;+\infty[) : \dfrac{1}{2(1+x)} \leq \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Donc $(\forall x \in ]0;+\infty[) : \dfrac{x^2}{2(1+x)} \leq x - \ln(1+x) \leq \dfrac{x^2}{2}$

Donc $(\forall x \in ]0,+\infty[) \quad f'(x) > 0$ car $x^2 > 0$

D'où $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } ]0,+\infty[.}$

**0.25 pt** **c)** Vérifions que $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$

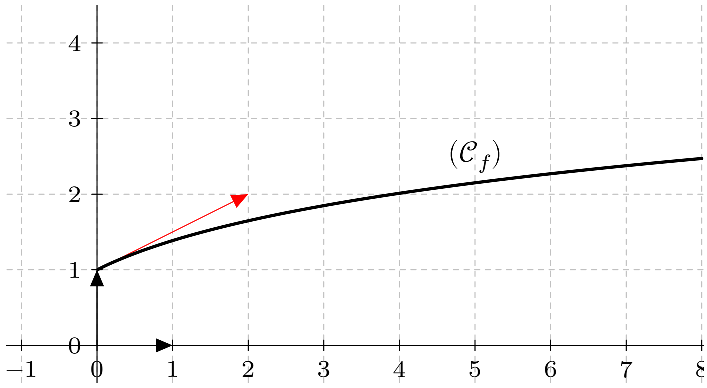
on a $f$ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc

$f([0,+\infty[) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [1,+\infty[$

D'où : $\boxed{f([0,+\infty[) = [1,+\infty[}$

0.5 pt

**3 -** Représentation graphique de $(C)$




## Partie III

**1 -** On considère la fonction numérique $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$

0.5 pt

**a)** Montrons que $(\forall x \in ]0;+\infty[) : \quad 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$

On a $(\forall x \in ]0;+\infty[) : \dfrac{1}{2(1+x)} \leq \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Donc $(\forall x \in ]0;+\infty[) : \dfrac{1}{2(1+x)} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$ et comme $\dfrac{1}{2(1+x)} > 0$ alors

$$\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[) : 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}}$$

0.5 pt

**b)** Déduisons que $g$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ , puis montrons

que $g(]0;+\infty[) = ]-\infty;1[$

On a $g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

soit $x \in ]0;+\infty[$ on a : $g'(x) = f'(x) - 1$ et comme $f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$

alors $(\forall x \in ]0;+\infty[) : g'(x) < 0$ et par suite $g$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

on a $g$ est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Donc $g(]0;+\infty[) = \left] \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) ; \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) \right[$

et on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) - x = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{f(x)}{x} - 1\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Donc $\boxed{g(]0;+\infty[) = ]-\infty;1[}$

**c)** Montrons que l''équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

On a :

- $g$ est continue sur $]0;+\infty[$

• $g$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

• $0 \in g\left(]0;+\infty[\right)$

D'où $\boxed{\text{l'équation } g(x)=0 \text{ admet une solution unique } \alpha \text{ sur } ]0;+\infty[}$

**2 -** Soit $a$ un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$.

**0.25 pt** **a)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$

• Pour $n = 0$ on a $u_0 = a$ et $a > 0$ donc $u_0 > 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$ on Suppose que $u_n > 0$ Montrons que $u_{n+1} > 0$

On a $u_n > 0$ et Et comme $f$ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors $f(u_n) > f(0)$ donc $u_{n+1} > 0$

D'où selon le principe de récurrence $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

•$f$ est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités $u_n$ et $\alpha$

•$f$ est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités $u_n$ et $\alpha$

• $(\forall x \in ]0;+\infty[) : 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$ cad $(\forall x \in ]0;+\infty[) : |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis :$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

et comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$

alors $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$

**0.5 pt** **c)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

• Pour $n = 0$ on a $|u_0 - \alpha| = |a - \alpha|$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = |a - \alpha|$

Donc $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha|$

• Soit $n \in \mathbb{N}$ on Suppose que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$ Montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$

On a d'après la question précédente $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \quad (1)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

alors : $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha| \quad (2)$

de (1) et (2) on a $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a-\alpha|$

Donc selon le principe de récurrence : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} |a-\alpha|}$

Donc $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} |a-\alpha|}$

0.25 pt **d)** Déduisons que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\alpha$.

On a $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} |a-\alpha|$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} |a-\alpha| = 0 \left(\text{car } : -1 < \frac{1}{2} < 1\right)$

Donc : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$

## Exercice 5 : (3 pts)

On considère la fonction F définie sur$\mathbb{R}$ par : $\int_0^x e^{t^2} dt$

**1 -** On a la fonction $t \longmapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ( composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$)

Donc $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (primitive d'une fonction qui s'annule en 0) Et par suite $F$ est continue sur $\mathbb{R}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $F'(x) = e^{x^2}$ et puisque $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $e^{x^2} > 0$ Alors :$(\forall x \in \mathbb{R})$ : $F'(x) > 0$ D'où $F$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **2 - a)** Montrons que $(\forall x \in ]0;+\infty[) : F(x) \geq x$ et déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in ]0;+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} t^2 \geq 0 &\Rightarrow e^{t^2} \geq 1 \\ &\Rightarrow \int_0^x e^{t^2} dt \geq \int_0^x 1 dt \\ &\Rightarrow F(x) \geq x \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[) : F(x) \geq x}$

On a $(\forall x \in ]0;+\infty[) : F(x) \geq x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

0.5 pt **b)** Montrons que $F$ est impaire, et déduisons $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$ et

$F(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} e^{t^2} dt$

on pose $u=-t$ on a alors $t=-u$ et $dt=-du$

et on a $t=0 \Rightarrow u=0$ et $t=-x \Rightarrow u=x$

Donc $F(-x)=\int_0^{-x} e^{t^2}dt=\int_0^{x} e^{(-u)^2}(-du)=-\int_0^{x} e^{u^2}du=F(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on $-x \in \mathbb{R}$ et $F(-x)=-F(x)$ d'où : $\boxed{F \text{ est impaire}}$

On posant $u=-x$ on a $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)=\lim\limits_{u \to +\infty} F(-u)=\lim\limits_{u \to +\infty} -F(u)=-\infty$ car $\lim\limits_{u \to +\infty} F(u)=+\infty$

Alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)=-\infty}$

**0.5 pt** **c)** Montrons que $F$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a $F$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $F$ est une bijection de $\mathbb{R}$. vers $F(\mathbb{R})$

Et on a $F(\mathbb{R})=F(]-\infty;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x \to -\infty} F(x);\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)\right[=]-\infty;+\infty[$

D'où : $\boxed{F \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

**0.5 pt** **d)** Montrons que $G$ la bijection réciproque de $F$ est dérivable en 0, et calculons $G'(0)$.

On a $F(0)=0$ et $F'(0)=1$ donc $F'(0)\neq 0$

Comme $F$ est dérivable en 0 et $F'(0)\neq 0$ alors $G$ est dérivable en 0 Et on a : $G'(0)=\frac{1}{F'(0)}=\frac{1}{1}=1$

D'où : $\boxed{G \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } G'(0)=1}$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage** juillet 2018

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................. $3,5$ **points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ........................................ $3,5$ **points**
- Exercice 3 : **Calcul des probabilités** ................................. 3 **points**
- Exercice 4 : **Analyse** ........................................................ 11 **points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4 .

Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{M(x,y)} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ 0 & \mathrm{x} \end{pmatrix}$ On considère l'ensemble $E = \{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que $E$ est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $E$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\ .)$

0.25 pt **b)** Montrer que l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$ est de dimension 2

0.25 pt **3 - a)** Montrer que $E$ est une partie stable pour la loi $\times$

0.5 pt **b)** Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

**4 -** On définit dans $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $T$ par :

$$(\forall M(x,y) \in M_2(\mathbb{R}))\ (\forall M\ (x',y') \in M_2(\mathbb{R}))$$
$$M(x,y)TM\ (x',y') = M(x,y) \times M\ (x',y') - M(y,0) \times M\ (y',0)$$

Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $E$ définie par : $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{C}^* & \mapsto & E \\ & x+iy & \mapsto & M(x,y) \end{array}$

0.25 pt **a)** Montrer que $E$ est une partie stable pour la loi $T$

0.25 pt **b)** Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathrm{E},\mathrm{T})$

0.25 pt **c)** On pose : $\mathrm{E}^* = E - \{\theta\}$. Montrer que $(\mathrm{E}^*,T)$ est un groupe commutatif.

0.5 pt **5 - a)** Montrer que la loi $T$ est distributive par rapport à la loi $+$ dans $E$

0.25 pt **b)** Montrer que $(E,+,T)$ est un corps commutatif.

## Exercice 2 : (3,5 pts)

**1 -** Pour tout nombre complexe $Z \in \mathbb{C} - \{i\}$ on pose : $h(z) = i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$.

0.5 pt **a)** Vérifier que : $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2\mathrm{iz} - 2 = 0$

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$

**2 -** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$

On note $a$ et $b$ les deux solutions de l'équation $(E)$ tel que : $\mathrm{Re}(a) = 1$

Et pour tout $Z \in \mathbb{C} - \{i,a,b\}$ On considère les points $M(z), M'(h(z)), A(a)$ et $B(b)$

0.75 pt **a)** Montrer que : $\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) = -\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

0.75 pt **b)** En déduire que : $\left(\overline{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right) \equiv \pi + (\overline{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})[2\pi]$.

**0.5 pt** **3 - a)** Montrer que si $M$ et $A$ et $B$ sont alignés alors $M$, $A$, $B$ et $M'$ sont alignés.

**0.5 pt** **b)** Montrer que si $M, A$ et $B$ ne sont pas alignés alors $M, A, B$ et $M'$ sont cocycliques.

## Exercice 3 : (3 pts)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On désigne par $X$ la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face "pile". (c'est-à-dire le nombre de fois d'apparition de la face "pile" divisé par 10)

**1 pt** **1 - a)** Déterminer les valeurs prise par $X$

**1 pt** **b)** Déterminer la probabilité de l'événement $\left[X = \frac{1}{2}\right]$.

**1 pt** **2 -** Quelle est la probabilité de l'évènement : $X$ supérieur ou égale à $\frac{9}{10}$

## Exercice 4 : Problème (11 pts)

Soit $f$ la fonction numérique de finie sur l'intervalle $[0, +\infty\,|$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; J)$

**1 - a)** Montrer que $f$ est continue à droite en 0.

**0.5 pt** (On pourra remarquer que : $f(x) = \left(4x^{\frac{1}{4}} \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$

**0.75 pt** **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**2 - a)** Étudier la dérivabilité de $f$ a droite en 0 , puis interpréter graphiquement le résultat

**0.75 pt** obtenus.

**0.75 pt** **b)** Montrer que $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

**c)** Étudier les variations de $f$ sur $[0, +\infty[$ , en déduire que :

**1 pt** $(\forall x \in [0, 1]); 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

**0.5 pt** **d)** Tracer la courbe $(C)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(On prendra pour unité $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm )

**3 -** Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

**0.5 pt** **a)** Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

**1 pt** **b)** Calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$, en déduire le sens de variation de $F$ sur l' intervalle $[0, +\infty[$.

**4 - a)** En utilisant la méthode d' intégration par parties, calculer $\int_a^1 \sqrt{t}(\ln t)dt$ pour tout $x > 0$.

**0.75 pt**

**0.75 pt** **b)** Montrer que pour tout $x > 0$

$$F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

**c)** En déduire en $m^2$, l'aire du domaine limite par la courbe $(C)$ et les droites d'équations

**1 pt** respectives $x = 0$ et $x = 1$ et $y = 0$.

**5 -** Pour out entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.

1 pt **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée et strictement monotone.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques

## Session : RATTRAPAGE 2018

## MATHÉMATIQUES

### Exercice 1 : (3,50 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4 .

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{M(x,y)} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ 0 & \mathrm{x} \end{pmatrix}$ On considère l'ensemble $E = \{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

0.5 pt **1 - Montrons que $E$ est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}), +)$.**

On a $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$, alors $E \neq \emptyset$

Soit $M(x,y) \in E$ et $M(x',y') \in E$

On a $M(x,y) - M(x',y') = \begin{pmatrix} x - x' & y - y' \\ 0 & x - x' \end{pmatrix}$ ; ( car $x - x' \in \mathbb{R}$ et $y - y' \in \mathbb{R}$)

D'où $\boxed{E \text{ est un sous-groupe du groupe } (M_2(\mathbb{R}), +).}$

0.5 pt **2 - a) Montrons que $E$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$**

On a $E \neq \emptyset$

Soit $M(x,y) \in E$ et $M(x',y') \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha M(x,y) + \beta M(x',y') &= \alpha \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' & \alpha y + \beta y' \\ 0 & \alpha x + \beta y' \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \in E \end{aligned}$$

Car $(\alpha x+\beta x') \in \mathbb{R}$ et $(\alpha y+\beta y') \in \mathbb{R}$.

D'où $\boxed{E \text{ est un sous-espace de l'espace vectoriel } (M_2(\mathbb{R}),+,.)}$

**0.25 pt**

**b) Montrons que l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$ est de dimension 2**

Soit $M(x,y) \in E$

On a

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.M(1,0)+y.M(0,1) \end{aligned}$$

Alors $(M(1,0);M(0,1))$ est une famille génératrice de $E$

— **Montrons que $(M(1,0);M(0,1))$ est une famille libre**

Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$

On a : $\quad \alpha M(1,0)+\beta M(0,1)=\theta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\alpha=\beta=0$

Alors $(M(1,0);M(0,1))$ est une famille libre

D'où : $(M(1,0);M(0,1))$ est une base de l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$

Ainsi $\boxed{dimE=2}$

**0.25 pt**

**3 - a) Montrons que $E$ est une partie stable pour la loi $\times$**

Soit $M(x,y) \in E$ et $M(x',y') \in E$

On a

$$\begin{aligned} M(x,y)\times M(x',y') &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx' & xy'+x'y \\ 0 & xx' \end{pmatrix} \\ &= M(xx',xy'+x'y) \in E \qquad \text{car} \quad (xx' \in \mathbb{R} \quad \text{et } xy'+x'y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{E \text{ est une partie stable pour la loi } \times}$

**0.5 pt**

**b) Montrons que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.**

• On a $(E,+)$ est un groupe commutatif car $(E,+,.)$ est un espace vectoriel.

• Et on a $(M_2(\mathbb{R}),+)$ est un anneau et $E$ est une partie stable par la loi "$\times$" , alors la loi "$\times$" est associative et distributive par rapport à "$+$" dans $E$

• Soit $M(x,y)$ et $M(x',y')$ deux éléments de $E$

On a

$$\begin{aligned} M(x,y)\times M(x',y') &= M(xx',xy'+yx') \\ &= M(x'x,x'y+y'x) \\ &= M(x',y')\times M(x,y) \end{aligned}$$

Alors la loi "$\times$" est commutative dans $E$

D'où $\boxed{(E,+,\times) \text{ est un anneau commutatif.}}$

**4 -** On définit dans $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $\top$ par :

$$(\forall M(x,y)\in M_2(\mathbb{R}))\,(\forall M(x',y')\in M_2(\mathbb{R}))$$
$$M(x,y)\top M(x',y') = M(x,y)\times M(x',y') - M(y,0)\times M(y',0)$$

Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $E$ définie par : $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{C}^* & \mapsto & E \\ & x+iy & \mapsto & M(x,y) \end{array}$

0.25 pt **a) Montrons que $E$ est une partie stable pour la loi $\top$**

Soit $M(x,y)$ et $M(x',y')$ deux éléments de $E$

On a $\quad M(x,y)\top M(x',y') = M(x,y)\times M(x',y') - M(y,0)\times M(y',0)$

et $M(x,y)\times M(x',y')\in E$ et $M(y,0)\times M(y',0)\in E$

car d'après la question $3-a)$ $E$ est une partie stable pour la loi $\times$

et $(M(x,y)\times M(x',y') - M(y,0)\times M(y',0))\in E$ car $(E,+)$ est un groupe

D'où $\boxed{E \text{ est une partie stable pour la loi } \top}$

0.25 pt **b) Montrons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathrm{E},\top)$**

Soient $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ deux nombres complexes non nuls

On a $\varphi\left((x+iy)\times(x'+iy')\right) = \varphi\left(xx'-yy'+i(xy'+x'y)\right) = M(xx'-yy';xy'+x'y)$

On a

$$\begin{aligned} \varphi\left((z)\top(z')\right) &= M\left((x+iy)\top M(x'+iy')\right) \\ &= M(x,y)\times M(x',y') - M(y,0)\times M(y',0) \\ &= M(xx',xy'+yx') - M(yy',0) \\ &= M(xx'-yy',xy'+yx') \\ &= \varphi(z\times z') \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{C}^*,\times) \text{ vers } (E,\top)}$

0.25 pt **c) On pose : $\mathrm{E}^* = E-\{\theta\}$. Montrons que $(\mathrm{E}^*,\top)$ est un groupe commutatif.**

On a

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\varphi(\mathbb{C}^*) &\Leftrightarrow \exists(a+ib)\in\mathbb{C}^*;\varphi(a+ib)=M(x,y)\\ &\Leftrightarrow \exists(a+ib)\in\mathbb{C}^*;M(a,b)=M(x,y)\\ &\Leftrightarrow \exists(a+ib)\in\mathbb{C}^*;a=xetb=y\\ &\Leftrightarrow M(x,y)\in E^* \end{aligned}$$

Alors $\varphi(C^*)=E^*$

et puisque $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\top)$ et $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif

D'où $\boxed{(E^*,\top)\text{ est un groupe commutatif.}}$

0.5 pt **5 - a) Montrons que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $+$ dans $E$**

On considère trois matrices $M(x,y)$ et $M(x',y')$ et $M(x",y")$ de $E$

On a

$$\begin{aligned} M(x,y)\top(M(x',y')+M(x",y")) &= M(x,y)\top M(x'+x",y'+y")\\ &= M(x(x'+x")-y(y'+y");x(y'+y")+y'(x'+x"))\\ &= M(xx'+xx"-yy'-yy";xy'+xy"+yx'+yx") \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} M(x,y)\top M(x',y')+M(x,y)\top M(x",y") &= M(xx'-yy';xy'+x'y)+M(xx"-yy";xy"+x"y)\\ &= M(xx'+xx"-yy'-yy";xy'+xy"+yx'+yx") \end{aligned}$$

donc $M(x,y)\top(M(x',y')+M(x",y"))=M(x,y)\top M(x',y')+M(x,y)\top M(x",y")$

D'où $\boxed{\text{la loi }\top\text{ est distributive par rapport à la loi }+\text{ dans }E}$

0.25 pt **b) Montrons que $(E,+,\top)$ est un corps commutatif.**

- On a (E,+) est un groupe abélien
- et d'après la question 4)c) on a $(E^*,\top)$ est groupe
- et d'après la question 5)a, la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $+$ dans $E$

D'où $\boxed{(E,+,\top)\text{ est un corps commutatif.}}$

## Exercice 2 : (3 pts)

**1 - Pour tout nombre complexe $Z\in\mathbb{C}-\{i\}$ on pose : $h(z)=i\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)$.**

0.5 pt **a) Vérifions que : $h(z)=z\Leftrightarrow z^2-2\text{iz}-2=0$**

$$\begin{aligned} \text{On a } h(z) = z &\Leftrightarrow i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) = z \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z-2i}{z-i}\right) = \frac{z}{i} \\ &\Leftrightarrow i(z-2i) = z(z-i) \\ &\Leftrightarrow iz + 2 = z^2 - iz \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0 \end{aligned}$$

d'où $\boxed{h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2\text{iz} - 2 = 0}$

**0.5 pt**

b) **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :** $(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$

On a $\Delta = (-2i)^2 - 4 \times (1) \times (-2) = 4$

alors $\boxed{\text{les solutions de l'équation } (E) \text{ sont : } z_1 = \dfrac{-(-2i) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = i - 1 \text{ et } z_2 = i + 1}$

**2 -** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ On note $a$ et $b$ les deux solutions de l'équation $(E)$ tel que : $\text{Re}(a) = 1$ Et pour tout $Z \in \mathbb{C} - \{i, a, b\}$ On considère les points $M(z), M'(h(z)), A(a)$ et $B(b)$

**0.75 pt**

a) **Montrons que :** $\left(\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) = -\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$

$$\begin{aligned} \text{On a} \qquad \left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) &= \frac{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) - a}{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) - b} \\ &= \frac{\frac{z-2i+i(1+i)(z-i)}{z-i}}{\frac{z-2i+i(-1+i)(z-i)}{z-i}} \\ &= \frac{z-2i+(i-1)(z-i)}{z-2i-(i+1)(z-i)} \\ &= \frac{iz-i+1}{-iz-i-1} \\ &= -\left(\frac{z+\frac{1}{i}-\frac{i}{i}}{z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}}\right) \\ &= -\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \end{aligned}$$

**0.75 pt**

b) **En déduire que :** $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) [2\pi]$.

$$\text{On a} \quad \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv arg\left(\frac{z_A - z_{M'}}{z_B - z_{M'}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{a - h(z)}{b - h(z)}\right)[2\pi]$$
$$\equiv arg\left(-\frac{z-a}{z-b}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \pi + arg\left(\frac{a-z}{b-z}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \pi + \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$$

0.5 pt

**3 - a) Montrons que si $M$ et $A$ et $B$ sont alignés alors $M$, $A$, $B$ et $M'$ sont alignés.**

Si $A$, $B$ et $M$ sont colinéaires alors $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv 0[\pi]$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv 0[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \pi[2\pi]$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv 2\pi[2\pi]$ car $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv 0[2\pi]$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv 0[\pi]$

donc $A$, $B$ et $M'$ sont colinéaires.

d'où $\boxed{\text{si } M \text{ et } A \text{ et } B \text{ sont alignés alors } M,\ A,\ B \text{ et } M' \text{ sont alignés.}}$

0.5 pt

**b) Montrons que si $M, A$ et $B$ ne sont pas alignés alors $M, A, B$ et $M'$ sont cocycliques.**

On a $\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) = -\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) \times \left(\frac{z-b}{z-a}\right) = -1$

$\Rightarrow \left(\frac{a-h(z)}{b-h(z)}\right) \times \left(\frac{b-z}{a-z}\right) = -1$

$\Rightarrow \left(\frac{z_A - z_{M'}}{z_B - z_{M'}}\right) \times \left(\frac{z_B - z_M}{z_A - z_M}\right) \in \mathbb{R}$

Alors les points $A$, $B$ , $M$ et $M'$ sont alignés ou cocycliques.

et puisqu'on a supposé que $M, A$ et $B$ ne sont pas alignés

Alors $\boxed{A,\ B\ ,\ M \text{ et } M' \text{ sont cocycliques.}}$

## Exercice 3 : (3 pts)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On désigne par $X$ la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face "pile". (c'est-à-dire le nombre de fois d'apparition de la face "pile" divisé par 10)

1 pt

**1 - a)** Déterminons les valeurs prise par $X$ :

Pour le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée et non truquée, l'univers des possibilités est $\Omega = \{$ P, F $\}$

L'expérience en question consiste à répéter le lancer 10 fois. Le résultat (d'obtenir Pile)

est représenté par une variable aléatoire de la loi de Bernoulli de paramètre p(Pile)=p(Face)=1/2
La variable aléatoire X en question associe à chaque événement la fréquence d'apparition de Pile dans une série de 10 lancers.
Ainsi les valeurs possibles de X sont $\frac{0}{10};\frac{1}{10};...;\frac{10}{10}$
Autrement dit : $X(\Omega)=\{\ \frac{i}{10}0\leq i\leq 10\ \}$

**b)** Déterminons la probabilité de l'événement $[X=\frac{1}{2}]$ :

**1 pt** L'événement, $[X=\frac{1}{2}]$ ou plutôt $[X=\frac{5}{10}]$ , donne une information sur l'obtention de (Pile) exactement 5 fois dans une épreuve de 10 lancers indépendants. Alors la probabilité de vérification de l'événement $[X=\frac{5}{10}]$ se calcule ainsi :
$P[X=\frac{5}{10}]=C_{10}^{5}\cdot(\frac{1}{2})^{5}\cdot(1-\frac{1}{2})^{5}=\frac{63}{256}$

**2 -** La probabilité de l'évènement : $[X\geq\frac{9}{10}]$ :

$$\begin{aligned}Ona:P\left[X\geq\frac{9}{10}\right]&=P\left[X=\frac{9}{10}ouX=\frac{10}{10}\right]\\&=P\left[X=\frac{9}{10}\right]ouP\left[X=\frac{10}{10}\right]\\&=C_{10}^{1}\cdot(\frac{1}{2})^{9}\cdot(1-\frac{1}{2})^{1}+C_{10}^{10}\cdot(\frac{1}{2})^{1}0\cdot(1-\frac{1}{2})^{0}\\&=\frac{11}{1024}\end{aligned}$$

**1 pt** $\boxed{\text{Donc } P[X\geq\frac{9}{10}]=\frac{11}{1024}}$

## Exercice 4 : Problème (11 pts)

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty\,[$ par : $\begin{cases}f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^{2}; & x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

On note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};J)$

**1 - a)** Montrons que $f$ est continue à droite en 0.

On a :

$$\begin{aligned}&=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}(\ln x)^{2}\\&=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(4x^{\frac{1}{4}}\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^{2}\\&=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}16(t\ln(t))^{2}(enposant:t=x^{\frac{1}{4}})\\&=16\times0^{2}=0=f(0)\end{aligned}$$

**0.5 pt** $\boxed{\text{Donc } f \text{ est continue à droite en } 0}$

**0.75 pt**

**b)** Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ interprétons graphiquement le résultat obtenu.

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(lnx)^2 = +\infty$

Car ( $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}(lnx)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(4\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(4\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2}{(x^{\frac{1}{4}})^2} = 16 \lim_{t\to+\infty} (\frac{lnt}{t})^2 = 16\times 0^2 = 0$

Donc admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses $(OX)$ au voisinage de $+\infty$.

**2 - a)** Étudions la dérivabilité de $f$ à droite en 0 , puis interprétons graphiquement le résultat obtenus.

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\left(4\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2}{x}\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\left(4\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2}{(x^{\frac{1}{4}})^2}\\
&= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} 16(t\ln(t))^2 (enposant : t = x^{\frac{1}{4}})\\
&= 16\times(-\infty)^2 = +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $f$ n'est pas dérivable à droite en 0

Alors la courbe admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse 0.

**0.75 pt**

**b)** Montrons que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculons $f'(x)$ pour $x>0$.

$f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant le produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$

Soit $x>0$ :

On a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\sqrt{x}(lnx)^2)'\\
&= (\sqrt{x})'(lnx)^2 + ((lnx)^2)'\sqrt{x}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}(lnx)^2 + 2\cdot\frac{1}{x}\cdot lnx\cdot\sqrt{x}\\
&= \frac{(4+lnx)lnx}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

**0.75 pt**

**c)** Étudions les variations de $f$ sur $[0,+\infty[$

Soit $x>0$

On a :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(4+lnx)lnx}{2\sqrt{x}}=0$$
$$\Leftrightarrow (4+lnx)lnx=0$$
$$\Leftrightarrow 4+lnx=0 ou lnx=0$$
$$\Leftrightarrow x=e^{-4} ou x=1$$

| $x$ | $0$ | | $e^{-4}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $lnx$ | \|\| | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $4+lnx$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | \|\| $0$ | $\nearrow$ | $(\frac{4}{e})^2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**1 pt**

En déduisons que : $(\forall x \in [0,1]); 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

D'aprés le tableau de variations de $f$ on a :

$f$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, e^{-4}]$ donc $f$ réalise une bijection de $[0, e^{-4}]$ vers $[0, (\frac{4}{e})^2]$

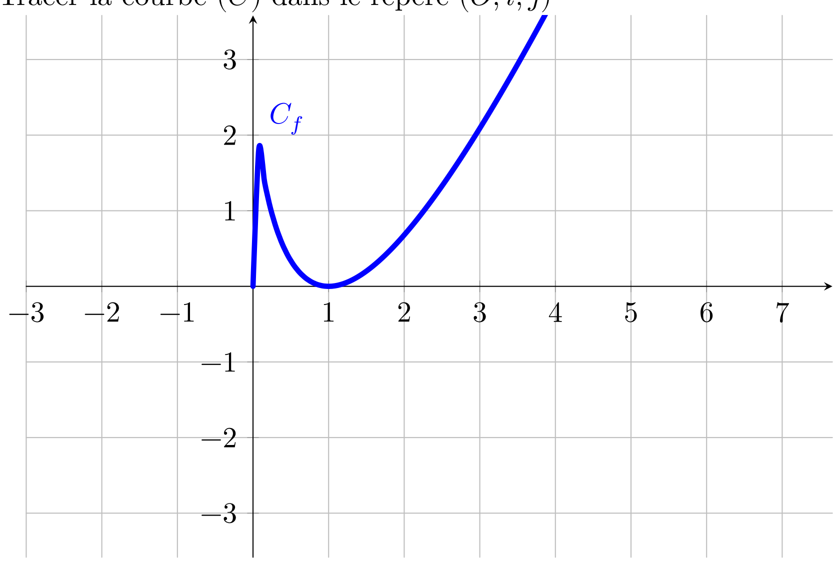
donc pour tout $x \in [0, e^{-4}]$ ;$f(x) \in [0, (\frac{4}{e})^2]$

De mème sur l'inervalle $[e^{-4}, 1]$ on a :

pour tout $x \in [e^{-4}, 1]$ ;$f(x) \in [0, (\frac{4}{e})^2]$

D'où :$(\forall x \in [0,1]); 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

**d)** Tracer la courbe $(C)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$




**0.5 pt**

(On prendra pour unité $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm )

**3 -** Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

**a)** Montrons que la fonction $F$ est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On sait que $f$ est continue sur $[0, +\infty[$ et puisque $1 \in [0, +\infty[$ alors elle admet une seule primitive $G$ sur $[0, +\infty[$ tels que : $\begin{cases} \forall x \in [0, +\infty[ : G(x) = \int_1^x f(t)dt ; G(0) = 0 \\ \forall x \in [0, +\infty[ : G'(x) = f(x) \end{cases}$

Donc :$F(x) = \int_x^1 f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt = -G(x)$

et comme $G$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ alors $F$ est aussi dérivable sur $[0, +\infty[$ ,et on a :

**0.5 pt** $F'(x) = -G'(x) = -f(x) = -\sqrt{x}(lnx)^2$

**b)** Calculons $F'(x)$ pour $x \geq 0$ :

Et déduisons le sens de variation de $F$ sur l' intervalle $[0, +\infty[$.

On a :$\forall x \in [0, +\infty[$ : $F'(x) = -\sqrt{x}(lnx)^2 < 0$

Donc :$F$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

**1 pt**

**4 - a)** En utilisant la méthode d' intégration par parties, calculons $\int_a^1 \sqrt{t}(\ln t)dt$ pour tout $x > 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \sqrt{t}(\ln t)dt &= \int_x^1 t^{\frac{1}{2}}(\ln t)dt \\
&= \left[ \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\right) t^{\frac{1}{2}+1} \cdot lnt \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{t} dt \\
&= \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot lnt \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{1}{2}} dt \\
&= -\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot lnx - \frac{2}{3} \left[ \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_x^1 \\
&= -\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot lnx - \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right) \\
&= -\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot lnx - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot x^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

**0.75 pt**

**0.75 pt** **b)** Montrons que pour tout $x > 0$

$$F(x) = -\frac{2}{3} x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9} x\sqrt{x} \ln x - \frac{16}{27} x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

On a :

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_x^1 f(t)dt &= \int_x^1 \sqrt{t}(\ln t)^2 dt \\
&= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \cdot (lnt)^2\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2lnt}{t}dt \\
&= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \cdot (lnt)^2\right]_x^1 - \frac{4}{3}\int_x^1 t^{\frac{1}{2}} \cdot lntdt \\
&= -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot (lnx)^2 - \frac{4}{3}\int_x^1 t^{\frac{1}{2}} \cdot lntdt \\
&= -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot (lnx)^2 - \frac{4}{3}(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot lnx - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot x^{\frac{3}{2}}) \\
&= -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}
\end{aligned}$$

**c)** Déduisons en $m^2$, l'aire du domaine limite par la courbe $(C)$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ et $y = 0$.

On a :$\forall x \geq 0; f(x) \geq 0$

Donc :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 f(t)dt(u.a) \\
&= F(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} F(x) \\
&= \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}}(-\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}) \\
&= \frac{16}{27}(u.a) \\
&= \frac{16}{27} \times 2 \times 2m^2 \\
&= \frac{64}{27}m^2
\end{aligned}$$

**1 pt**

**5 -** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$.

**a)** Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée et strictement monotone.

On a : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx = F(\frac{1}{n})$

et on a :

$$\begin{aligned}
n \geq 1 &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \\
&\Rightarrow F(0) \leq F(\frac{1}{n}) \leq F(0) \\
&\Rightarrow 0 \leq F(\frac{1}{n}) \leq \frac{16}{27}
\end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

D'autre part,on a :

$$\begin{aligned} & n \geq 0 \Rightarrow n+1 > 1 \\ & \Rightarrow \frac{1}{n+1 < \frac{1}{n}} \\ & \Rightarrow F(\frac{1}{n+1}) < F(\frac{1}{n}) \\ & \Rightarrow u_{n+1} > u_n \end{aligned}$$

D'où la suite$(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

**1 pt**

**b)** Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ :

On a $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante et majorée par $\frac{16}{27}$ donc elle est convergente vers une limite réelle $l$ telle que :

**0.75 pt** $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} F(\frac{1}{n}) = F(0) = \frac{16}{27}$

$\boxed{\text{FIN}}$

R O Y A U M E D U M A R O C

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2019

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .................................... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .................................... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .................................... **3 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .................................... **10 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\ (x+yi)(a+bi)=xa+(x^2b+a^2y)i$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

0,25 pt **c)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre $e$ que l'on déterminera .

0,25 pt **d)** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe $\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$.

**2 -** On considère le sous-ensemble $E$ de $\mathbb{C}$ défini par : $E=\{x+yi/x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\in\mathbb{R}\}$

0,25 pt **a)** Montrer que $E$ est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

0,5 pt **b)** Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **3 -** On considère le sous-ensemble $G$ de $E$ défini par : $G=\{1+yi/y\in\mathbb{R}\}$

Montrer que $G$ est un sous-groupe de $(E,*)$ .

**4 -** On considère l'ensemble $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\right\}$

0,25 pt **a)** Montrer que $F$ est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

0,5 pt **b)** On considère l'application $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&F\\x+yi&\longmapsto&M(x^2,y)\end{array}$

Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$

0,25 pt **c)** En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif.

## Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m$ un nombre complexe non réel $(m\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$

**I -** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue $z$ définie par :

$$(E) : z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation $(E)$ est non nul.

0,5 pt **b)** Déterminer $z_1$ et $z_2$, les deux solutions de l'équation $(E)$

**2 -** On suppose dans cette question que $m=\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$

0,5 pt **a)** Déterminer le module est un argument de $z_1+z_2$.

0,25 pt **b)** Montrer que si $z_1z_2\in\mathbb{R}$ alors $z_1+z_2=2i$

**II -** Le plan complexe rapporté un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$,

On considère les points suivants :

$A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a = 1 + i$, $b = (1 + i)m$ et $c = 1 - i$

$D$ l'image de $B$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $\Omega$ le milieu du segment $[CD]$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que l'affixe de $\Omega$ est $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$.

0,25 pt **b)** Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$.

0,5 pt **c)** En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$.

**2 -** La droite $(O\Omega)$ coupe la droite $(AB)$ au point $H$ d'affixe $h$

0,5 pt **a)** Montrer que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est imaginaire pur.

0,25 pt **b)** En déduire $h$ en fonction de $m$.

## Exercice 3 : (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle ) est un nombre premier.

Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969]$

**1 -** On suppose dans cette question que 2969 que ne divise pas $n$.

0,5 pt **a)** En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z})\ : u \times n \equiv\ 1\ [2969]$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1\ [2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1\ [2969]$

( On remarque que : $2968 = 8 \times 371$ )

0,5 pt **c)** Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

0,5 pt **d)** En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1\ [2969]$.

0,5 pt **2 - a)** En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise $n$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969] \iff n \equiv 0\ [2969]$ et $m \equiv 0\ [2969]$.

## Exercice 4 : ( 10 points )

**PARTIE I -** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right)$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})$ : $f'(x) = 4\left(e^{-x} - 1\right)(1 - x)$

0,75 pt **b)** Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\exists! \alpha \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$ ( On prendra $e^{\frac{3}{2}} = 4.5$)

0,25 pt **d)** Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

0,5 pt **3 - a)** En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction $f'$, montrer qu'il existe $x_0$ de l'intervalle $]0; 1[$ tel que : $f''(x_0) = 0$

**0,5 pt** **b)** En appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction $f''$ , montrer que pour tout $x$ différent de $x_0$ de l'intervalle $[0;1]$, on a : $\dfrac{f''(x)}{x-x_0} > 0$

**0,25 pt** **c)** En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

**0,5 pt** **4 - a)** Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

**0,5 pt** **b)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On prendra : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$ , $f(1) = -0,5$ et il n'est pas demandé de représenter le point $I$ )

**0,25 pt** **5 - a)** Vérifier que : $(\forall x \in ]-\infty;\alpha])$ ; $f(x) \leq 0$

**0,75 pt** **b)** Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2\alpha(\alpha^2-3)}{3}$ , puis en déduire que : $\dfrac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$

**0,5 pt** **c)** Calculer en fonction de $\alpha$, en $cm^2$, l'aire du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$

**PARTIE II -** On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + f(u_n)$$

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n < \alpha$ (utiliser 5-a) de la PARTIE I)

**0,25 pt** **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

**2 -** On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $g(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$

**0,5 pt** **a)** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $g(x) > 0$ (On prendra : $\ln(2) = 0,69$)

**0,5 pt** **b)** En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $0 \leq u_n$ (On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$ )

**0,25 pt** **c)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

**0,5 pt** **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

**3 -** On suppose que $u_0 < 0$

**0,5 pt** **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $u_n \leq u_0 + nf(u_0)$

**0,25 pt** **c)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\boxed{\text{FIN}}$$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences mathématiques A & B**

**Session : Normal 2019**

MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\,(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)\ ;\ (x+yi) * (a+bi) = xa + (x^2b + a^2y)i$$

0,25 pt **1 - a)** Montrons que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ ; $z = x + iy$ et $z' = a + ib$

On a :

$$\begin{aligned} z * z' &= (x+iy) * (a+ib) \\ &= xa + (x^2b + a^2y)i \\ &= ax + (a^2y + x^2b)i \\ &= z' * z \end{aligned}$$

$\boxed{\text{la loi } * \text{ est commutative sur } \mathbb{C}}$

0,5 pt **b)** Montrons que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

Soit $(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$ On a :

$$\begin{aligned} (z * z') * z'' &= [(x+iy) * (a+ib)] * (s+it) \\ &= [xa + (x^2b + a^2y)i] * (s+it) \\ &= xas + [x^2a^2t + s^2(x^2b + a^2y)]i \\ &= xas + (x^2a^2t + s^2x^2b + s^2a^2y)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \divideontimes (z' \divideontimes z'') &= (x+iy) \divideontimes [(a+ib) \divideontimes (s+it)] \\ &= (x+iy) \divideontimes [as + (a^2t + s^2b)i] \\ &= xas + (x^2(a^2t+s^2b) + a^2s^2y)i \\ &= xas + (x^2a^2t + s^2x^2b + s^2a^2y)i \end{aligned}$$

Donc : $(z \divideontimes z') \divideontimes z'' = z \divideontimes (z' \divideontimes z'')$

D'où : La loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$

**0,25 pt**

**c)** Montrons que la loi $*$ admet un élément neutre $e$ que l'on déterminera .

Comme $*$ est commutative, il suffit de résoudre l'équation $z*e = z$ d'inconnue $ae = a+ib$ et $\forall z \in \mathbb{C}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, tel que $z = x+iy$

$$\begin{aligned} z*e = z &\Leftrightarrow xa + (x^2b + a^2y)i \\ &\Leftrightarrow xa = x ; x^2b + a^2y = y \\ &\Leftrightarrow a = 1 ; x^2b = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 1 ; b = 0 \\ &\Leftrightarrow e = 1 \end{aligned}$$

Pour $z = 0$ on a : $0 \times 1 = 0$

Donc $*$ admet $e = 1$ comme l'élément neutre

**0,25 pt**

**d)** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrons que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe $\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$

Soient $z = x+iy$ et $z' = a+ib$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

On a : $z * z' = e = 1 \Leftrightarrow xa = 1$ et $x^2b + a^2y = 0$

Donc : $a = \frac{1}{x}$ et $b = \frac{-y}{x^4}$

Comme $*$ est commutative

Alors le symétrique de $z$ est $z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^4}$

**2 -** On considère le sous-ensemble $E$ de $\mathbb{C}$ défini par : $E = \{x+yi / x \in \mathbb{R}_+^* ; y \in \mathbb{R}\}$

**0,25 pt**

**a)** Montrer que $E$ est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $z, z' \in E$ tel que $z = x+iy$ et $z' = a+ib$, avec $x > 0$ et $a > 0$

On a : $z * z' = xa + (x^2b + a^2y)i \in E$

Car $x > 0$ et $a > 0 \Rightarrow xa > 0$

Donc $E$ est stable pour $*$

**0,5 pt**

**b)** Montrons que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

On a :

— $*$ Est associative

— $*$ admet un élément neutre $e = 1 \in E$

— Toute élément de $E$ est symétrisable de symétrique $z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^4}$ car : $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

— $*$ est commutative

$(E, *)$ est un groupe commutatif.

**0,5 pt**

**3 -** On considère le sous-ensemble $G$ de $E$ défini par : $G = \{1 + yi / y \in \mathbb{R}\}$

Montrons que $G$ est un sous-groupe de $(E, *)$

Comme $1 = 1 + 0i \in G$ alors $G \neq \emptyset$ et aussi $G \subset E$ car $1 > 0$

Soient $z, z' \in G$ et $(\forall (b, y) \in \mathbb{R}^2)$ avec $z = 1 + iy$ et $z' = 1 + ib$ le symétrique de $z$

On a : $z * z' = (1 + iy) * (1 + ib) = 1 + (b + y)i$

D'où $z * z' \in G$

Donc : $G$ est un sous-groupe de $(E, *)$

**4 -** On considère l'ensemble $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \right\}$

**0,25 pt**

**a)** Montrons que $F$ est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Soit $M(x, y), M(a, b) \in F$

On a : $M(x, y) \times M(a, b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \in F$

Car $xa > 0$ et $xb + ya \in \mathbb{R}$ De même $M(a, b) \times M(x, y) = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \in F$

Donc : $F$ est stable par $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$

**0,5 pt**

**b)** On considère l'application $\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x + yi & \longmapsto & M(x^2, y) \end{array}$

Montrons que $\varphi$ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$

Soient $z = x + iy$ , $z' = a + ib \in E$

On a : $$\varphi(z) \times \varphi(z') = M(x^2, y) \times M(a^2, b) = M((xa)^2, x^2 b + a^2 y)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z * z') &= \varphi(xa + (x^2 b + a^2 y)i) \\ &= M((xa)^2, x^2 b + a^2 y) \end{aligned}$$

**D'où :** $\varphi(z * z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$**(2)**

Soit $M(a, b) \in F$; $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = M(a, b) &\Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a, b) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{a} (x > 0); y = b \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{a} + bi \end{aligned}$$

**Alors $\varphi$ est une bijection de $E$ à valeurs dans $F$ (1)**

D'après (1) et (2) $\varphi$ est une isomorphisme de$(E,*)$ vers $(F,\times)$

**0,25 pt** **c)** Déduisons que $(F,\times)$ est un groupe commutatif.

— $(E,*)$ est un groupe commutative

— $\varphi$ est une isomorphisme de$(E,*)$ vers $(E,\times)$

Alors $(F,\times)$ est un groupe commutatif.

## Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m$ un nombre complexe non réel $(m \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$

### Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue $z$ définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

**0,25 pt** **1 - a)** Montrons que le discriminant de l'équation $(E)$ est non nul.

$$\begin{aligned}\Delta &= (1+i)^2(m+1)^2 - 2im \\ &= (1+i)^2\left((m+1) - 2m\right) \\ &= \left((1+i)(m-1)\right)^2\end{aligned}$$

Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ or $m \in \mathbb{C}$ **Absurde**

D'où $\Delta \neq 0; m \in \mathbb{C}$

**0,5 pt** **b)** Déterminons $z_1$ et $z_2$, les deux solutions de l'équation $(E)$

$z_1 = \dfrac{(1+i)(m+1)+(m-1)(1+i)}{2} = m(1+i)$

$z_2 = \dfrac{(1+i)(m+1)-(m-1)(1+i)}{2} = (1+i)$

Donc : les solutions de $(E)$ sont $z_1 = m(1+i)$ et $z_2 = (1+i)$

**2 -** On suppose dans cette question que $m = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

**0,5 pt** **a)** Déterminons le module est un argument de $z_1 + z_2$.

On sait que : $(z-z_1)(z-z_2) = 0 \Leftrightarrow z^2 - z(z_1+z_2) + z_1z_2 = 0$

Donc $z_1 + z_2 = (1+i)(1+m)$ et $z_1z_2 = -2im$

Comme $1 + \mathrm{e}^{ia} = 2\cos(\frac{a}{2})\mathrm{e}^{i\frac{a}{2}}$ (facile à démontrer)

Alors : $z_1 + z_2 = (1+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}})(1+\mathrm{e}^{i\theta}) = 4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Or $0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\theta}{2} > 0\right)$

Donc : $|z_1+z_2| = 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)|$ et $arg\,(z_1+z_2) \equiv \dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

**0,25 pt** **b)** Montrons que si $z_1z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1+z_2 = 2i$

On a : $z_1z_2 = -2im$

$z_1z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2im \in \mathbb{R} \Rightarrow m \in i\mathbb{R}$

D'où $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $m = ix$, puisque $|m| = 1$, alors $x = 1$ ou $x = -1$

Or $\theta \in ]0,\pi[$ d'où $x > 0$ donc $x = 1$ alors $m = i$

Finalement : si $z_1z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1+z_2 = 2i$

## Partie II

Le plan complexe rapporté un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$,

On considère les points suivants :

$A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a = 1+i$, $b = (1+i)m$ et $c = 1-i$

$D$ l'image de $B$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et $\Omega$ le milieu du segment $[CD]$.

**0,5 pt** **1 - a)** Montrons que l'affixe de $\Omega$ est $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$.

On a $\Omega(\omega)$ est le milieu du $[CD]$

D'où $\omega = \dfrac{c+d}{2}$

Or $D(d)$ est l'image de $B(b)$ par la rotation de centre $O(0)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Alors $d = ib = (i-1)m$

Donc : $\omega = \dfrac{(1-i)+m(i-1)}{2}$

**0,25 pt** **b)** $\dfrac{b-a}{\omega} = \dfrac{(1+i)m-(1+i)}{(1-i)(1-m)} \times 2 = 2\dfrac{1+i}{i-1} = -2i.$

**0,5 pt** **c)** Déduisons que $(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB = 2O\Omega$.

On a : $\dfrac{b-a}{\omega-0} = -2i$

Donc : $\begin{cases} \left(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ AB = 2\Omega \end{cases}$ Donc :$(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB = 2O\Omega$.

**2 -** La droite $(O\Omega)$ coupe la droite $(AB)$ au point $H$ d'affixe $h$

**0,5 pt** **a)** Montrons que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est imaginaire pur.

On a $H(h) \in (AB)$, Donc les points $A, B$ et $H$ sont alignées

D'où : $arg\left(\dfrac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right) = \left(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \pi[2\pi]$

Donc : $\dfrac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

On a $(OH)\perp(AB)$

D'où : $\left(\dfrac{h}{b-a}\right) \in i\mathbb{R}$

**0,25 pt** **b)** Déduisons $h$ en fonction de $m$.

On a : $\dfrac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ alors $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{h-a}{b-a} = x$

$\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R}$ alors $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{h}{b-a} = iy$

Par suite $\frac{h-a}{b-a} = x \Leftrightarrow \frac{h}{b-a} = x + \frac{a}{b-a} \Leftrightarrow iy = x + \frac{1}{m-1}$

On a : $-x + iy = \frac{1}{m-1}$ (1) et $-x - iy = \frac{1}{\overline{m}-1}$ (2)

$$\begin{aligned}
(1)+(2) \quad &\Leftrightarrow \quad -2x = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{\overline{m}-1} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{\overline{m}-1}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad h = x(b-a) + a \\
&\Leftrightarrow \quad h = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{\overline{m}-1}\right)(1+i)(m-1) + 1 + i \\
&\Leftrightarrow \quad h = \frac{-1}{2}\left(\frac{\overline{m}+m-2}{\overline{m}-1}\right)(1+i) + 1 + i \\
&\Leftrightarrow \quad h = (1+i)\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{\overline{m}+m-2}{\overline{m}-1}\right) + 1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad h = (1+i)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-\overline{m}-m+2+2\overline{m}-2}{\overline{m}-1}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad h = \frac{(1+i)}{2}\left(\frac{\overline{m}-m}{\overline{m}-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } h = \frac{(1+i)}{2}\left(\frac{\overline{m}-m}{\overline{m}-1}\right)}$$

## Exercice 3 : (3 pts)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle ) est un nombre premier.

Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969]$

**1 -** On suppose dans cette question que 2969 que ne divise pas $n$.

**0,5 pt** **a)** En utilisant le théorème de Bezout, montrons que : $(\exists u \in \mathbb{Z})\ : u \times n \equiv\ [2969]$.

— On a : 2969 ne divise pas $n$

— 2969 est premier

Alors $2969 \wedge n = 1$

D'après **T.B** $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ t.q $2969v + nu = 1$

$\boxed{\text{Donc : } nu \equiv 1[2969]}$

**0,5 pt** **b)** Déduisons que : $(u \times m)^8 \equiv -1\ [2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1\ [2969]$

( On remarque que : $2968 = 8 \times 371$ )

On a : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$

Donc : $(um)^8 \equiv -(nu)^8[2969]$

Or $(nu)^8 \equiv 1[2969]$

$\boxed{\text{D'où :} (um)^8 \equiv -1[2969]}$

Par suite : $(um)^{8\times371} \equiv (-1)^{371}[2969]$ (2969=8× 371)

$\boxed{(u \times m)^{2968} \equiv -1\ [2969]}$

**0,5 pt** **c)** Montrons que 2969 ne divise pas $u \times m$

On a : $(u \times m)^{2968} \equiv -1\ [2969]$

D'où $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q $(u \times m)^{2968} = -1 + 2969k$

Donc : $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q $(u \times m) \times (-(u \times m))^{2967} + k \times 2969 = 1$

On pose $u'(-(u \times m))^{2967}$ et $v' = k$

D'après **T.B** $(u \times m) \wedge 2969 = 1$

$\boxed{\text{Donc : 2969 ne divise pas } u \times m}$

**0,5 pt** **d)** Déduisons qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1\ [2969]$.

On a $\begin{cases} 2969 \wedge um = 1 \\ 2969 \text{ est premier} \end{cases}$

D'après théorème de Fermat, on a

$(u \times m)^{2968-1} \equiv 1\ [2969]$

$\boxed{\text{Donc : } (u \times m)^{2968} \equiv 1\ [2969]}$

**0,5 pt** **2 - a)** En utilisant les résultats précédents, montrons que 2969 divise $n$.

On a : $\begin{cases} (u \times m)^{2968} \equiv -1\ [2969]\ (u \times m)^{2968} \equiv 1\ [2969] \end{cases}$

D'où l'hypothèse dans la question 1) est fausse

$\boxed{\text{Donc 2969 divise } n}$

**0,5 pt** **b)** Montrons que : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969] \iff n \equiv 0\ [2969]$ et $m \equiv 0\ [2969]$.

$\Leftarrow)$

$\begin{cases} n \equiv 0[2969] \\ m \equiv 0[2969] \end{cases} \Rightarrow n^8 + mp^8 \equiv 0[2969]$

$\Rightarrow)$

On a $2969/n$

D'où $n \equiv 0[2969]$

Comme dans l'égalité $n^8 + mp^8 \equiv 0[2969]$ $n, m$ jouent des rôle symétriques

$\boxed{\text{Donc : } n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969] \iff n \equiv 0\ [2969] \text{ et } m \equiv 0\ [2969]}$

## Exercice 4 : (10 pts)

### Partie I

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x\left(\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2}x - 1\right)$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

**0,5 pt** **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} 4x\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} 4x\mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{x}{2}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right) = +\infty$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$

$\boxed{\text{Donc : } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

**0,5 pt** **2 - a)** Montrons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x\in\mathbb{R})$ : $f'(x) = 4\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)(1-x)$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le produit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Et on a $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4(\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x-1)+4\mathrm{e}^{-x}(-\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2})\\ &= 4\left(\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}+x-1\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc : } (\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x) = 4(x-1)(1-\mathrm{e}^{-x})}$

**0,75 pt** **b)** Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

Soit $x\in\mathbb{R}$ le singe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(1-\mathrm{e}^{-x})$

$$\begin{aligned}(x-1)(1-\mathrm{e}^{-x}) = 0 &\Leftrightarrow x-1=0 \text{ où } 1-\mathrm{e}^{-x}=0\\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ où } x=0\end{aligned}$$

Si $x<0$ on a $\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}>1\\ 1-x>0\end{cases}$ d'où $(\forall x<0)\,;\ f'x)>0$

Si $x\in[0,1]$ on a : $\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}<1\\ 1-x>0\end{cases}$ d'où $(\forall x\in[0,1])\,;\ f'x)\leqslant 0$

Si $x\in[1,+\infty[$ on a : $\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}<1\\ 1-x<0\end{cases}$ d'où $(\forall x\in[1,+\infty[)\,;\ f'x)\geqslant 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | f(1) | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**0,5 pt** **c)** Montrer que : $\exists!\alpha\in\left]\frac{3}{2};2\right[$ tel que $f(\alpha)=0$ ( On prendra $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}=4.5$)

On a $f$ est continue strictement croissante croissante sur $\left]\frac{3}{2};2\right[$

Donc : $f$ est une bijection de $\left]\frac{3}{2};2\right[$ vers $f\left(\left]\frac{3}{2};2\right[\right)=\left]6\left(e^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}-1\right);8e^{-2}\right[$

Comme $6\left(e^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}-1\right)<0$ et $8e^{-2}>0$, Alors $0\in f\left(\left]\frac{3}{2};2\right[\right)$

Donc $\exists!\alpha\in\left]\frac{3}{2};2\right[$ tel que $f(\alpha)=0$

**0,25 pt** **d)** Vérifions que : $e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\Leftrightarrow 4\alpha\left(e^{-\alpha}+\frac{\alpha}{2}-1\right)=0\\ &\Leftrightarrow \alpha=0 \text{ où } e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}\\ &\Leftrightarrow e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

Car $\alpha>\frac{3}{2}$

Donc : $e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$

**0,5 pt** **3 - a)** En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $f'$, montrer qu'il existe $x_0$ de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $f''(x_0)=0$

On a $f'$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $f'(0)=f'(1)=0$

D'après **T.R** $\exists x_0\in]0,1[$ tel que $f''(x_0)=0$

**0,5 pt** **b)** En appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction $f''$ , montrons que pour tout $x$ différent de $x_0$ de l'intervalle $[0;1]$, on a : $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$

Soit $x\neq x_0\in[0,1]$

On a : $f''$ est continue dérivable sur $I$ d'ext $x$ et $x_0$

D'après **T.A.F** $\exists c\in[0,1]$ tel que $f^{(3)}(c)=\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\frac{f''(x)}{x-x_0}$

Or $f^{(3)}(x)=4(3-x)e^{-x}$

D'où $f^{(3)}(c)=4(3-c)e^{-c}>0$ car $c\in I$ et $I\subset[0,1]$ Donc : $\forall x\in[0,1]\,;\,x\neq x_0$ , $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$

**0,25 pt** **c)** En déduisons que $I(x_0,f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

On a : $\begin{cases} f''(x_0)=0\\ \frac{f''(x)}{x-x_0}>0\end{cases}$ d'où $f$" s'annule en $x=x_0$ avec changement de signe

$I(x_0,f(x_0))$ est un point d'inflexion de la $(\mathcal{C})$.

**0,5 pt** **4 - a)** Étudions les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

On a $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, calculons $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}+\frac{x}{2}-1=+\infty$

Car : $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

Donc : $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés, au voisinage de $+\infty$

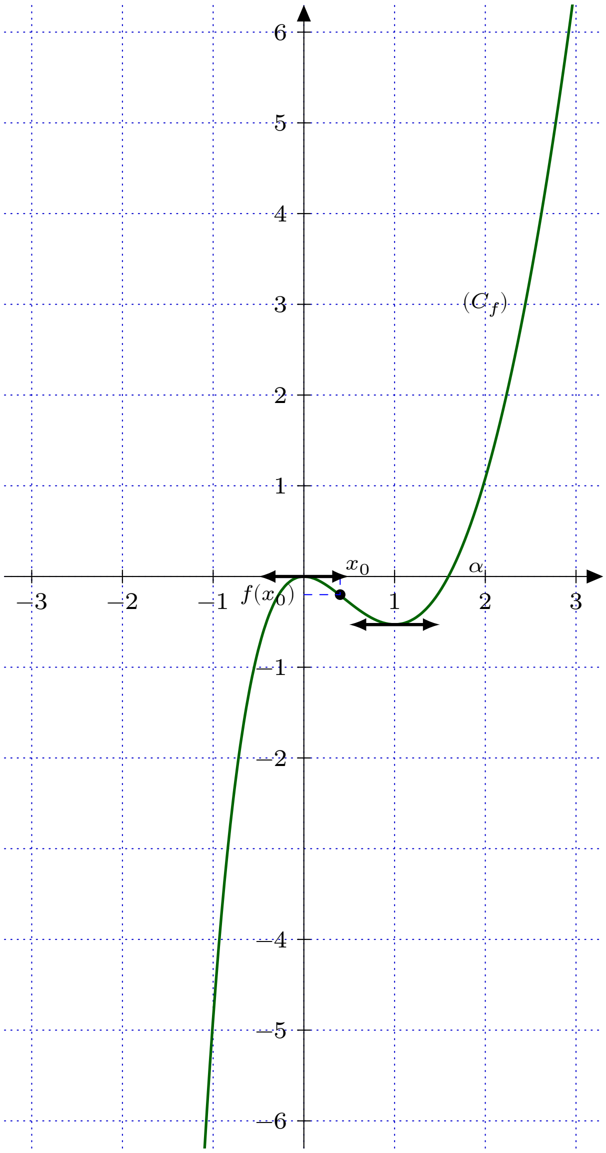
On a $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, calculons $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}+\frac{x}{2}-1=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{x\mathrm{e}^{x}}{2}-\mathrm{e}^{x}\right)=+\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^{x}=0$

Donc : $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés, au voisinage de $-\infty$

**0,5 pt** **b)** Représentation graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. (On prendra : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$ , $f(1)=-0,5$ et il n'est pas demandé de représenter le point $I$ )




**0,25 pt** **5 - a)** Vérifions que : $(\forall x\in\,]-\infty;\alpha])$ ; $f(x)\leq 0$

D'après T.V on a

— $\forall x\in]-\infty,0]$ ; $f(x)\leqslant 0$

— $\forall x\in[0,\alpha]$ ; $f(x)\leqslant 0$

Donc : $\forall x\in]-\infty,\alpha]$ ; $f(x)\leqslant 0$

**0,75 pt** **b)** Montrons que : $\displaystyle\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2\alpha(\alpha^2-3)}{3}$ , puis en déduire que : $\dfrac{3}{2}<\alpha\leq\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\alpha 4x\left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{x}{2}-1\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\alpha \left(4x\mathrm{e}^{-x}+\frac{4x^2}{2}-4x\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha 4x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= [4x\mathrm{e}^{-x}]_\alpha^0 + \int_0^\alpha 4\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= [4x\mathrm{e}^{-x}+4\mathrm{e}^{-x}]_\alpha^0 \\ &= 4-4\mathrm{e}^{-\alpha}(\alpha+1) \end{aligned}$$

Donc : $I_\alpha = 4-4\mathrm{e}^{-\alpha}(\alpha+1)+\dfrac{2}{3}\alpha^3-2\alpha^2$

Or : $\mathrm{e}^{-\alpha} = 1-\dfrac{\alpha}{2}$

$\boxed{\text{Donc : } I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2-3)}$

Conclusion :

Comme $\forall x \in [0,\alpha]\,;\ f(x) \leqslant 0$

D'où $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$

Alors $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$

Donc : $\dfrac{2}{3}\alpha(\alpha^2-3) \leqslant 0$

Alors : $\alpha^2-3 \leqslant 0$

Donc : $|\alpha| \leqslant \sqrt{3}$, or $\alpha > \dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{D'où : } \alpha \in ]\frac{3}{2},\sqrt{3}[}$

0,5 pt **c)** Calculer en fonction de $\alpha$, en $cm^2$ l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y=0$, $x=0$ et $x=\alpha$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y=0$, $x=0$ et $x=\alpha$, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^\alpha |f(x)|\mathrm{d}x u.m.s \\ &= \int_0^\alpha -f(x)\mathrm{d}x u.m.s \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{A} = \frac{2}{3}\alpha(3-\alpha^2).cm^2}$

## PARTIE II

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + f(u_n)$$

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n < \alpha$ (utiliser 5-a) de la PARTIE I)

Pour $n = 0$ on a $u_0 < \alpha$

Supposons que $u_n < \alpha$ pour $n$ fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} < \alpha$

Comme $u_n < \alpha$ alors $f(u_n) \leqslant 0$ (question I-5-a)

Donc $f(u_n) + u_n \leqslant u_n < \alpha$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n < \alpha$

**0,25 pt** **b)** Déduisons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}\,;\, u_{n+1} - u_n = f(u_n)$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}\,;\, u_n \leqslant \alpha$ et comme $f(u_n) \leqslant 0$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}\,;\, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

Donc : a suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

**2 -** On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ; \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

**0,5 pt** **a)** Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $g(x) > 0$ (On prendra : $\ln(2) = 0,69$)

On a $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions dérivables

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}\,;\, g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \ln(2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(2)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | | $\searrow$ | $g(ln2)$ | $\nearrow$ | |

Comme $\forall x \in \mathbb{R}\,;\, g(x) \geq g(ln2)$

Or : $g(ln2) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{4} > 0$ car $\ln(2) = 0.69 > \frac{1}{2}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}\,;\, g(x) > 0$

**0,5 pt** **b)** En utilisant le résultat de la question précédente, montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad 0 \leq u_n$

On a : $f(x) + x = 4x\left(\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right) + x = 4x\left(\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{4}\right) = 4xg(x)$

On a : $u_0 \geq 0$

Pour $; = 0\,;\, u_0 \geq 0$

Supposons que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$ pour $n$fixé de $\mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} - = f(u_n) + u_n = 4u_n g(u_n) > 0$

car $u_n > 0$ et $g(u_n) > 0$

$\boxed{\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_n \geq 0}$

**0,25 pt** **c)** Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

On a $(u_n)$ est minorée par 0, et décroissante

$\boxed{\text{Donc la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$

**0,5 pt** **d)** Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a : $u_{n+1} = f(u_n) + u_n = h(u_n)$

avec : $h(x) = f(x) + x$

Et on a : $0 \leq u_n \leq u_0 \leq \alpha$ et $h$ est continue sur $[0, \alpha]$

Alors : $\lim u_{n+1} = \lim h(u_n) = \lim f(u_n) + u_n$

Donc : $l = f(l) + l$

D'où $f(l) = 0$

Donc $l = 0$ où $l = \alpha$

Or $u_n \leq u_0 < \alpha$

D'où $\lim u_n \leq u_0 < \alpha$

$\boxed{\text{Donc : } \lim u_n = 0}$

**3 -** On suppose que $u_0 < 0$

**0,5 pt** **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$

On a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$

Comme $(u_n)$ est décroissante

Alors $u_n \leq u_0 < 0$ et $f$ est croissante sur $]-\infty, 0]$

D'où $f(u_n) \leq f(u_0)$

$\boxed{\text{Donc : } u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)}$

**0,5 pt** **b)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n \leq u_0 + nf(u_0)$

Pour $n = 0\,;\ u_0 \leq u_0$

Supposons que $u_n \leq u_0 + nf(u_0)$, pour $n$ fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} \leq u_0 + (n+1)f(u_0)$

On a : $u_{n+1} \leq u_n + f(u_0)$

Donc : $u_{n+1} \leq u_0 + nf(u_0) + f(u_0)$, d'où $u_n \leq u_0 + nf(u_0)$

$\boxed{\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n \leq u_0 + nf(u_0)}$

**0,25 pt** **c)** En déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a : $u_0 < 0 \Rightarrow f(u_0) < f(0) \Rightarrow f(u_0) < 0$

D'où : $\lim u_0 + nf(u_0) = -\infty$

$\boxed{\text{Donc } \lim u_n = -\infty}$

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage** juin 2019

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Nombres complexes** ........ **3.5 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** ........ **3 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** ........ **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** ........ **10 points**

## Exercice 1 : (3.5 pts)

Soit $\alpha$ un nombre complexe non nul.

**partie A :**

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$(E_\alpha)\ :\ z^2 - \mathrm{i}\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de $(E_\alpha)$ est : $\Delta = \alpha^2$

0,5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\alpha)$

0,5 pt **2 -** Sachant que $\alpha = |\alpha|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}\ \ (\lambda \in \mathbb{R})$, mettre les deux racines de l'équation $(E_\alpha)$ sous la forme exponentielle.

**partie B :**

On suppose que le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $\Omega$, $M_l$ et $M_2$ d'affixes respectivement $\alpha$, $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit $R$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

0,25 pt **b)** En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$, et $OM_1M_2$ sont équilatéraux.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

0,5 pt **b)** Montrer que Les deux droites $(\Omega M_2)$ et $(OM_1)$ sont orthogonales.

0,25 pt **c)** En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange.

0,5 pt **3 -** Montrer que pour tout réel $\theta$, le nombre : $Z = \dfrac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \dfrac{z_2 - |\alpha|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z_1 - |\alpha|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ est une réel.

## Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ $(n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 3)$. On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 pt **1 -** Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?

1 pt **2 -** Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

1 pt **3 -** On considère la variable aléatoire $X_n$ égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3.

Detérminer la loi de probabilité de $X_n$

## Exercice 3 : ( 3.5 pts )

On considère l'espace vectoriel de dimension 2 noté $(V_2, +, .)$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $V_2$. On pose : $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie par :

$\forall(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 \quad (x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx' + yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j}$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est une base de $V_2$

0,25 pt **b)** Vérifier que : $\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1}$ ; $\overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}$

0,25 pt **c)** Montrer que : $\forall\left(X, X', Y, Y'\right) \in \mathbb{R}^4 \; \left(X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}\right) * \left(X'\overrightarrow{e_1} + Y'\overrightarrow{e_2}\right) = XX'\overrightarrow{e_1} + YY'\overrightarrow{e_2}$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative.

0,25 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est associative.

0,25 pt **c)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

0,25 pt **d)** Montrer que $\left(V_2, +, *\right)$ est un anneau commutatif unitaire.

**3 -** Soit $\vec{u} \in V_2 - \left\{\vec{0}\right\}$. On note $E_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$

0,25 pt **a)** Montrer que $\left(E_{\vec{u}}, +\right)$ est un sous-groupe du groupe $\left(V_2, +\right)$

0,25 pt **b)** Montrer que $\left(E_{\vec{u}}, +, .\right)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\left(V_2, +, .\right)$

0,5 pt **c)** Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $* \iff$ la famille $\left(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u}\right)$ est liée

**4 -** On suppose que : $\left(\exists\alpha \in \mathbb{R}^*\right)$ ; $\vec{u} * \vec{u} = \alpha\vec{u}$

On considère l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & E_{\vec{u}} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\alpha}\vec{u} \end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}^*, \times\right)$ vers $\left(E_{\vec{u}}, *\right)$

0,25 pt **b)** En déduire que $\left(E_{\vec{u}}, +, *\right)$ est un corps commutatif.

## Exercice 4 : (10 pts)

**partie A :**

On considère la fonction $g$ définie sur $I = ]-1; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 2$

0,5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

0,5 pt **2 -** Montrer que $g$ est dérivable sur $I$ et que $\left(\forall x \in I\right)$ ; $g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$

**3 -** On donne le tableau de variations de $g$ :

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $2$ | $\searrow$ | $\frac{5}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

0,5 pt **a)** Montrer qu'il existe un réel strictement positif $\alpha$ unique tel que : $g(\alpha) = 0$

| | |
|---|---|
| **0,25 pt** | **b)** Vérifier que : $\alpha < 1$ (On prendra : $\ln 2 = 0.7$) |
| **0,5 pt** | **c)** En déduire que : $\left(\forall x \in ]-1;\alpha[\right)$ ; $0 < g(x)$ et que $\left(\forall x \in ]\alpha;+\infty[\right)$ ; $g(x) < 0$ |

**partie B :**

On considère la fonction $f$ définie sur $I = ]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

Soit $(C)$ sa courbe représentative dans repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

| | |
|---|---|
| **0,5 pt** | **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. |
| **0,5 pt** | **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. |
| **0,75 pt** | **2 - a)** Montrer que $f$ est dérivable sur $I$ et que : $\left(\forall x \in I\right)$ ; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}$ |
| **0,5 pt** | **b)** Donner le sens de variation de $f$ sur $I$ |
| **0,75 pt** | **c)** Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ et que $(\forall x \in I)$ $f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ |
| **0,25 pt** | **3 - a)** Donner l'équation de la tangente $(T)$ à $(C)$ au point d'abscisse 0 |
| **0,5 pt** | **b)** Montrer que : $\left(\forall x > 0\right)$ ; $\ln(1+x) < x$ |
| **0,25 pt** | **c)** En déduire que : $\left(\forall x > 0\right)$ ; $f(x) < x$ |
| **1pt** | **d)** Représenter graphiquement $(T)$ et $(C)$ (On prendra : $\alpha = 0.8$ et $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$) |

**partie C :**

On pose : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

| | |
|---|---|
| **1 pt** | **1 - a)** En utilisant le changement de variable : $t = \dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que : $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$ |
| **0,5 pt** | **b)** - Déterminer, en $cm^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C)$ , la tangente $(T)$, la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$ |
| **1 pt** | **2 -** En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x}\mathrm{d}x$ |

FIN

R O Y A U M E D U M A R O C

# Correction

**Baccalauréat Sciences mathématiques**

**Session : Rattrapage 2019**

## Mathématiques

### Exercice 1 : (3.5 pts)

#### Partie I

**1 - a)** Vérifions que le discriminant de $E_\alpha$ est : $\Delta = \alpha^2$

0.25 pt On a : $z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-i\alpha\sqrt{3}\right)^2 + 4\alpha^2 \\ &= -3\alpha^2 + 4\alpha^2 \\ &= \alpha^2\end{aligned}$$

0.25 pt **b)** l'équation admet deux solutions :

$$\boxed{z_1 = \frac{i\alpha\sqrt{3} - \alpha}{2} = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \text{ et } z_2 = \frac{i\alpha\sqrt{3} + \alpha}{2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\alpha}$$

0.5 pt **2 -** On a :

$$\begin{aligned}z_2 &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} \times |\alpha| e^{i\lambda} \\ &= |\alpha| e^{i(\lambda + \frac{\pi}{3})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \\ &= e^{i(\pi-\frac{\pi}{3})}\times|\alpha|e^{i\lambda} \\ &= |\alpha|e^{i(\lambda+\frac{2\pi}{3})} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{z_1=|\alpha|e^{i(\lambda+\frac{2\pi}{3})} \text{ et } z_2=|\alpha|e^{i(\lambda+\frac{\pi}{3})}}$$

## Partie II

**1 - a)** Montrons que $R(\Omega)=M_1$ et que $R(M_1)=M_2$

**0.5 pt** On a :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{3}}(\alpha-0)+0 &= \alpha e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ &= z_1 \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{R(\Omega)=M_1}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{3}}(z_1-0)+0 &= e^{i\frac{2\pi}{3}}\alpha \\ &= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha \\ &= z_2 \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{R(M_1)=M_2}$$

**0.25 pt** **b)** On a :

$$\begin{aligned} R(\Omega)=M_1 &\iff \begin{cases} O\Omega=OM_1 \\ \left(\overrightarrow{O\Omega},\overline{\overrightarrow{OM_1}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \\ &\iff O\Omega M_1 \text{est un triangle équilatérale} \end{aligned}$$

Et

$$R(M_2) = M_1 \iff \begin{cases} OM_2 = OM_1 \\ \left(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_1}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$
$$\iff OM_1M_2 \text{est un triangle équilatérale}$$

$\boxed{\text{Donc les triangles } O\Omega M_1, \text{ et } OM_1M_2 \text{ sont équilatéraux.}}$

**0.25 pt**

**2 - a)** On a :

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\alpha + i\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha - i\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } z_1 - z_2 = \alpha}$

**0.25 pt**

**b)** On a :

$$\begin{aligned} \frac{z_2 - \alpha}{z_1} &= \frac{z_2 - z_1 + z_2}{z_1} \\ &= \frac{-2 + i2\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(-3 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{4} \\ &= \frac{-3 + i\sqrt{3} + i3\sqrt{3} + 3}{4} \\ &= i\sqrt{3} \\ &= \left[\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } (\Omega M_2) \text{ et } (OM_1) \text{ sont orthogonales.}}$

**0.25 pt**

**c)** On a : $(\Omega M_2) \perp (OM_1)$ et $\Omega M_2 = o\Omega = \Omega M_1 = M_1M_2$

$\boxed{\text{Alors } O\Omega M_1M_2 \text{ est un losange.}}$

**3 -** Montrons que pour tout réel $\theta$, le nombre :$Z = \dfrac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha}\ \dfrac{z_2 - \alpha e^{i\theta}}{z_1 - \alpha e^{i\theta}}$ est réel.

On a $\dfrac{z_1 - \alpha}{z_2 - \alpha} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\dfrac{z_2 - \alpha e^{\mathrm{i}\theta}}{z_1 - \alpha e^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{\sin\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)} e^{-i\frac{\pi}{6}}$

**0.5 pt**

Et on a : $Z = \dfrac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha}\ \dfrac{z_2 - \alpha e^{i\theta}}{z_1 - \alpha e^{i\theta}}$

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \frac{z_2-\alpha e^{i\theta}}{z_1-\alpha e^{i\theta}} \\ &= \frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \times \frac{z_1-\alpha}{z_2-\alpha} \\ &= \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \times \frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)} e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= \sqrt{3} \times \frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $Z \in \mathbb{R}$

## Exercice 2 : (3 pts)

**1 -** Déterminant la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre.

**1 pt**

On a : $card(\Omega) = n!$

Notons $A$"le boules 1,2 et 3 sortent consécutive dans cette ordre".

On a : $card(A) = (n-2)(n-3)!$

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{(n-2)(n-3)!}{n!} \\ &= \frac{\cancel{(n-2)}\,\cancel{(n-3)!}}{n(n-1)\cancel{(n-2)}\,\cancel{(n-3)!}} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \end{aligned}$$

**2 -** Calculons la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre consécutivement ou pas. Notons $B$" les boules 1,2 et 3 sortent dans cette ordre ou pas"

**1 pt**

On a : $card(B) = C_n^3 \times (n-3)!$

Alors

$$\begin{aligned} p(B) &= \frac{C_n^3 \times (n-3)!}{n!} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

**1 pt**

**3 -** Déterminons la loi de probabilité de $X_n$. On a : $X(\Omega) = \{3, 4, 5, ..., n\}$

On a : $card(x_n = k) = c_3^1 \times A_{k-1}^2 \times (n-3)!$

Donc

$$p(X_n = k) = \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

## Exercice 3 : (3.5 pts)

**1 - a)** Montrons que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $V_2$

0.25 pt On a $dim(v_2) = 2$, donc pour montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $v_2$, il suffit de montrer qu'elle est libre , c'est à dire que $det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \neq 0$

On a :

$$\begin{aligned} det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $v_2$.

0.25 pt **b)** On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_2} &= \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) * \left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\vec{j} \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

De même $\overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_1} = \vec{0}$

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_1} &= \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) * \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\vec{j} \\ &= \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \\ &= \overrightarrow{e_1} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_2} &= \left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) * \left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\vec{j} \\ &= \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \\ &= \overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

**0.25 pt**

**c)** On a :

$$
\begin{aligned}
(X\overrightarrow{e_1}+Y\overrightarrow{e_2})*(X'\overrightarrow{e_1}+Y'\overrightarrow{e_2}) &= \left(\frac{X+Y}{2}\vec{i}+\frac{X-Y}{2}\vec{j}\right)*\left(\frac{X'+Y'}{2}\vec{i}+\frac{X'-Y'}{2}\vec{j}\right)\\
&= \left(\frac{X+Y}{2}\times\frac{X'+Y'}{2}+\frac{X-Y}{2}\times\frac{X'-Y'}{2}\right)\vec{i}\\
&+ \left(\frac{X+Y}{2}\times\frac{X'-Y'}{2}+\frac{X-Y}{2}\times\frac{X'+Y'}{2}\right)\vec{j}\\
&= \left(\frac{XX'+YY'}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{XX'-YY'}{2}\right)\vec{j}\\
&= XX'\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)+YY'\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right)\\
&= XX'\overrightarrow{e_1}+YY'\overrightarrow{e_2}
\end{aligned}
$$

**2 - a)** Montrons que la loi $*$ est commutative.

Soient $(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4$ et $X=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ et $X'=x'\overrightarrow{e_1}+y'\overrightarrow{e_2}$

**0.25 pt** On a :

$$
\begin{aligned}
X*X' &= (=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})*(x'\overrightarrow{e_1}+y'\overrightarrow{e_2})\\
&= xx'\overrightarrow{e_1}+yy'\overrightarrow{e_2}\\
&= x'x\overrightarrow{e_1}+y'y\overrightarrow{e_2}\\
&= (x'\overrightarrow{e_1}+y'\overrightarrow{e_2})*(=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})\\
&= X'*X
\end{aligned}
$$

Donc $*$ est commutative.

**b)** Montrons que la loi $*$ est associative.

Soient $(x,x',y,y',x'',x'')\in\mathbb{R}^6$ et $X=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ et $X'=x'\overrightarrow{e_1}+y'\overrightarrow{e_2}$ et $X''=x''\overrightarrow{e_1}+y''\overrightarrow{e_2}$

**0.25 pt** On a :

$$
\begin{aligned}
X*(X'*X'') &= X*((x'\overrightarrow{e_1}+y'\overrightarrow{e_2})*x''\overrightarrow{e_1}+y''\overrightarrow{e_2}))\\
&= X*(x'x''\overrightarrow{e_1}+y'y''\overrightarrow{e_2})\\
&= (x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})*(x'x''\overrightarrow{e_1}+y'y''\overrightarrow{e_2})\\
&= xx'x''\overrightarrow{e_1}+yy'y''\overrightarrow{e_2}\\
&= (xx'\overrightarrow{e_1}+yy'\overrightarrow{e_2})*(x''\overrightarrow{e_1}+y''\overrightarrow{e_2})\\
&= (X*X')*X''
\end{aligned}
$$

Donc " $*$ " est associative.

**c)** Montrons que la loi $*$ admet un élément neutre

**0.25 pt** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $X=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$

On cherche un élément $E$ de $v_2$ s'il existe tel que : $X * E = X$

On a :

$$\begin{aligned} X * E = X &\iff (x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}) * (a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}) = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \\ &\iff xa\overrightarrow{e_1} + yb\overrightarrow{e_2} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \\ &\iff \begin{cases} xa = x \\ yb = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'élément neutre est :

$$\begin{aligned} E &= 1\overrightarrow{e_1} + 1\overrightarrow{e_2} \\ &= \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2} \\ &= \frac{1}{2}\vec{i} + \cancel{\frac{1}{2}\vec{j}} + \frac{1}{2}\vec{i} - \cancel{\frac{1}{2}\vec{j}} \\ &= \vec{i} \end{aligned}$$

**d)** Montrons que $(V_2, +, *)$ est un anneau commutatif unitaire.

Soient $(x, x', y, y', x'', x'') \in \mathbb{R}^6$ et $X = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $X' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ et $X'' = x''\vec{i} + y''\vec{j}$

**0.25 pt** On a :

$$\begin{aligned} X * (X' + X'') &= (x\vec{i} + y\vec{j}) * \Big((x'\vec{i} + y'\vec{j}) + (x''\vec{i} + y''\vec{j})\Big) \\ &= (x\vec{i} + y\vec{j}) * \Big((x' + x'')\vec{i} + (y' + y'')\vec{j}\Big) \\ &= (x(x' + x'') + y(y' + y''))\,\vec{i} + (y(x' + x'') + x(y' + y''))\,\vec{j} \\ &= (x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) + (x\vec{i} + y\vec{j}) * x''\vec{i} + y''\vec{j} \end{aligned}$$

Alors " $*$ " est distributive par rapport à " $+$ ".

Et " $*$ " est commutative

Donc $(v_2, +, *)$ est un anneau commutative unitaire d'unité $\vec{i}$.

**3 - a)** Montrons que $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(V_2, +)$

**0.25 pt** On remarque que $E_{\vec{u}} \subset v_2$

Et $0.\vec{u} = \vec{0} \in E_{\vec{u}}$, donc $E_{\vec{u}} \neq \emptyset$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{u} \in v_2 - \{\vec{0}\}$

On a : $\lambda_1\vec{u} - \lambda_2\vec{u} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{u} \in E_{\vec{u}}$

Donc $(E_{\vec{u}}, +)$ est un sous groupe de $(v_2, +)$

**b)** Montrons que $(E_{\vec{u}}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(V_2, +, .)$

**0.25 pt** On a : $E_{\vec{u}} \neq \emptyset$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{u} \in v_2 - \{\vec{0}\}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda_1 \vec{u}) + \beta(\lambda_2 \vec{u}) &= (\alpha\lambda_1)\vec{u} + (\beta\lambda_2)\vec{u} \\ &= (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)\vec{u} \in E_{\vec{u}} \end{aligned}$$

Donc $(E_{\vec{u}}, +, .)$ est un sous espace vectoriel de $(v_2, +, .)$

**c)** Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $*$ $\iff$ la famille $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$ est liée

**0.5 pt** Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{u} \in V_2 - \vec{0}$

Supposons que $E_{\vec{u}}$ est stable par " $*$ "

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 \vec{u} * \lambda_2 \vec{u} = \alpha \vec{u}$

En particulier pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} * \vec{u} = \alpha_1 \vec{u}$

Alors $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u}) = (\alpha_1 \vec{u}, \vec{u})$ est liée.

Réciproquement :

Si $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$ est liée.

Alors $\vec{u} * \vec{u}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$

D'où $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} * \vec{u} = \alpha \vec{u}$

Par la suite $\lambda_1 \vec{u}$ et $\lambda_2 \vec{u}$ deux vecteurs quelconques de $E_{\vec{u}}$ où $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \in v_2 - \{\vec{0}\}$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{u} * \lambda_2 \vec{u} &= \lambda_1 (a\vec{i} + b\vec{j}) * \lambda_2 (a\vec{i} + b\vec{j}) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (\vec{u} * \vec{u}) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (\alpha \vec{u}) \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 \alpha) \vec{u} \end{aligned}$$

Alors $\lambda_1 \vec{u} * \lambda_2 \vec{u} \in E_{\vec{u}}$

D'où $E_{\vec{u}}$ est stable pour " $*$ ".

**4 - a)** Montrons que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E_{\vec{u}}, *)$

**0.5 pt** Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \in v_2 - \{\vec{0}\}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$

On a : $\forall\, (\lambda_1 \vec{u}, \lambda_2 \vec{u}) \in E_{\vec{u}}^2$ , $\quad \lambda_1 \vec{u} * \lambda_2 \vec{u} = \lambda_1 \lambda_2 \vec{u}$

Et alors,

$$\begin{aligned} \varphi(x) * \varphi(y) &= \frac{x}{\alpha}\vec{u} * \frac{y}{\alpha}\vec{u} \\ &= \frac{xy}{\alpha^2}\alpha\vec{u} \\ &= \frac{xy}{\alpha}\alpha\vec{u} \end{aligned}$$

Et $\varphi(x \times y) = \varphi(xy) = \dfrac{xy}{\alpha}\vec{u}$

Donc $\varphi(x \times y) = \varphi(x) * \varphi(y)$

D'où $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E^*_{\vec{u}}, *)$

**Montrons que $\varphi$ est réalise une bijection de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E^*_{\vec{u}}, *)$**

Soit $\lambda\vec{u} \in E^*_{\vec{u}}$, cherchons $x \in \mathbb{R}^*$ s'il existe tel que $\varphi(x) = \lambda\vec{U}$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \lambda\vec{u} &\iff \frac{x}{\alpha}\vec{u} = \lambda\vec{u} \\ &\iff \left(\frac{x}{\alpha} - \lambda\right)\vec{u} = \vec{0} \\ &\iff \frac{x}{\alpha} - \lambda = 0 \\ &\iff x = \alpha\lambda \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $(\forall \lambda\vec{u} \in E^*_{\vec{u}})\,; \quad (\exists! x = \alpha\lambda \in \mathbb{R}^*)$ tel que $\varphi(x) = \lambda\vec{u}$

Donc $\varphi$ est réalise une bijection de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E^*_{\vec{u}}, *)$

$\boxed{\text{par conséquent } \varphi \text{ est un isomorphisme de } (\mathbb{R}^*, \times) \text{ vers } (E^*_{\vec{u}}, *)}$

**b)** En déduire que $(E_{\vec{u}}, +, *)$ est un corps commutatif.

0.25 pt On a : $(E_{\vec{u}}, +)$ est un groupe commutative.

Et " $*$ " est distributive par rapport à " $+$ " et commutative.

Et on a $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe et $\varphi$ est isomorphisme, alors $(E^*_{\vec{u}}, *)$ est un groupe.

$\boxed{\text{Donc } (E_{\vec{u}}, +, *) \text{ est un corps commutative.}}$

## Problème : ( 10 pts)

### Partie I

**1 - a)** Montrons que $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 2$

0.25 pt On a : $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$, et

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^+} g(x) &= \lim_{x \to -1^+} 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x) \\ &= 2 \quad \left(\text{car } \lim_{x \to -1^+} (1+x)\ln(x+1) = \lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0\right) \end{aligned}$$

**0.25 pt**

**b)** Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty} 1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x) \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\left(\frac{1+x}{x}\right)\ln(1+x)\right) \\
&= -\infty \quad \left(\text{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x}=1 \text{et } \lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty\right)
\end{aligned}$$

**2 -** Montrons que $g$ est dérivable sur $I$

**0.5 pt**

On a $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $I$.

On a : $(\forall x \in I)\,,\ 1+x>0$ et $x\mapsto 1+x$ est dérivable sur $I$, alors $x\mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $I$.

D'où $g$ est dérivable sur $I$.

Et $(\forall x \in I)$, on a :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \cancel{2x} - 2(1+x)\ln(1+x) - 2x\ln(1+x) \cancel{-2x}\,\cancel{(1+x)} \times \frac{1}{\cancel{1+x}} \\
&= -2\ln(1+x)(1+2x)
\end{aligned}$$

**3 - a)** Montrons qu'il existe un réel strictement positif $\alpha$ unique tel que : $g(\alpha)=0$

**0.5 pt**

On a $g$ est dérivable sur $I$, donc elle est continue sur $I$.

On a $g\left(]-1,0]\right) = \left[\frac{5}{4}-\frac{\ln 2}{2};2\right[$, donc $0 \notin g\left(]-1,0]\right)$

Alors l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur $]-1,0]$

Et on a $g$ est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

Et $g\left([0,+\infty[\right) = ]-\infty,1]$ donc $0 \in g\left([0,+\infty[\right)$

Alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0,+\infty[$

$\boxed{\text{Finalement l'équation } g(x)=0 \text{ admet une unique solution sur } ]-1,+\infty[}$

**b)** Vérifions que : $\alpha < 1$

**0.25 pt**

On a : $g(1) = 1+1-2\times 2\ln(2) = 4\left(\frac{1}{2}-\ln 2\right) < 0 = g(\alpha)$

Et puisque $g$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, alors $\alpha<1$

**0.5 pt**

**c)** d'après tableau de variation de $g$ on a 0 est une valeur minimale de $g$ sur $]-1,\alpha]$

Donc $\forall x \in ]-1,\alpha],\ g(x)\geq 0$

Et puisque $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$ sur $]-1,+\infty]$, alors $(\forall x \in ]-1,\alpha[),\ g(x)>0$

Et d'après tableau de variation de $g$ on a 0 est une valeur maximale de $g$ sur $[\alpha,+\infty[$

Donc $(\forall x \in [\alpha,+\infty[),\ g(x)\leq 0$

Et puisque $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$ sur $]-1,+\infty]$

$\boxed{\text{Alors } (\forall x \in ]\alpha,+\infty[),\ g(x)<0}$

## Partie II

**0.5 pt**

**1 - a)** Calculons $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{C}_f)$ admet un asymptote verticale à droite d'équation $x = -1$

**0.5 pt**

**b)** Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} \times \frac{1+x}{1+x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet un asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

**0.75 pt**

**2 - a)** Montrons que $f$ est dérivable sur $I$

On a $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $I$

Et on a $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $I$

Alors $f$ est dérivable sur $I$

On a : $(\forall x \in I)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{1+x} \times (1+x^2) - 2x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

**0.5 pt**

b)

| $x$ | $-1$ | | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $1+x$ | $0$ | | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | ‖ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $0$ |

0.75 pt **c)** On a :

$$\begin{aligned} g(\alpha)=0 &\iff 1+\alpha^2-2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha)=0 \\ &\iff \ln(1+\alpha)=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha(1+\alpha)} \end{aligned}$$

ET on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} \\ &= \frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha(1+\alpha)}}{1+\alpha^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)} \end{aligned}$$

D'après le tableau de variation de $f$, on a $f(\alpha)$ est la valeur maximale de $f$ sur $]-1,+\infty[$

Alors $\forall x \in ]-1,+\infty[,\ f(x) \leq f(\alpha)$

D'où $\forall x \in ]-1,+\infty[,\ f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

0.25 pt **3 - a)** On a $f$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, alors dérivable en 0 et $f'(0)=1$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente $(T)$ en point d'abscisse 0 d'équation $(T) : y = x$

**b)** Montrons que : $(\forall x > 0)$ ; $\ln(1+x) < x$

0.5 pt Considérons la fonction $\varphi$ définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x)=\ln(1+x)-x$

On a $\varphi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in ]0,+\infty[, \varphi'(x)=\dfrac{-x}{1+x}<0$

Donc $\varphi$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | ‖ $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

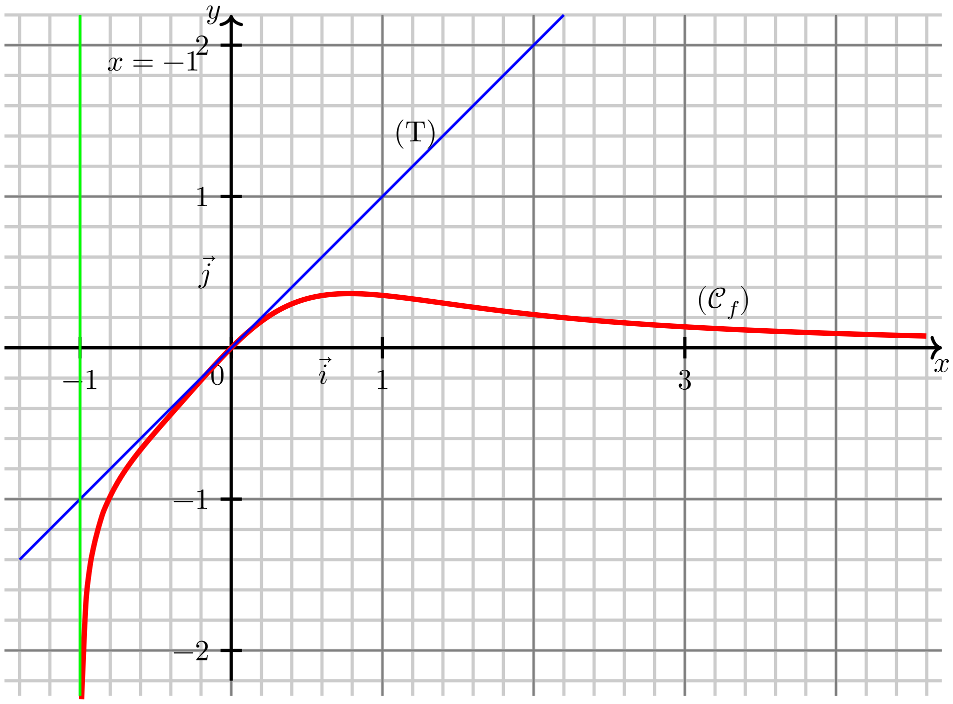
D'où $\forall x \in ]0,+\infty[,\ \varphi(x) < 0$

$\boxed{\text{Donc } \forall x \in ]0,+\infty[,\ \ln(x+1) < x}$

**0.25 pt** **c)** Soit $x \in ]0,+\infty[, \quad \ln(x+1) < x \Longrightarrow \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2} < \dfrac{x}{1+x^2} < x$

**1 pt** Donc $\forall x \in ]0,+\infty[,\ f(x) < x$

**d)**




## Partie III

**1 pt** **1 - a)** On a : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$

Posons : $t = \dfrac{1-x}{1+x}$, Alors $x = \dfrac{1-t}{1+t}$ et $dx = \dfrac{-2dt}{(1+t)^2}$

Si $x = 0$ on a $t = 1$ et si $x = 1$ on a $t = 0$

Donc

$$\begin{aligned}
J &= \int_1^0 \frac{\ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}+1\right)}{\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2+1} \times \frac{-2}{(1+t)^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln 2 - \ln(1+t)}{2+2t^2} \times 2\,dt \\
&= \ln 2 \times \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt \\
&= \ln 2 \times [Arctan(t)]_0^1 - J \\
2J &= \ln 2 \times \frac{\pi}{4} \\
J &= \ln 2 \times \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

**b)** Déterminons, en $cm^2$,$\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C)$ , la tangente

**0.5 pt** $(T)$, la droite d'équation $x=0$ et la droite d'équation $x=1$

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 |f(x)-x|\,dx\text{u.a} \\ &= \int_0^1 x-\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx \text{ u.a} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\ln(2) \text{ u.a} \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\ln(2)\right)\times 4\ cm^2 \\ &= 2-\frac{\pi}{2}\ln 2\ cm^2 \end{aligned}$$

**1 pt** **2 -** On a :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{Arctan(x)}{1+x}\,dx \\ &= [\ln(1+x)\times Arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx \\ &= \ln(2)\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\ln(2) \\ &= \frac{\pi}{8}\ln(2) \end{aligned}$$

FIN

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juillet 2020

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Le candidat doit traiter **exercice 3** et **exercice 4**
Et choisir de traiter **exercice 1** ou bien **exercice 2**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Arithmétiques** (au choix avec exercice 2) .................... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Structures algébriques**(au choix avec exercice 1) .......... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** (obligatoire ) .......................... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** (obligatoire ) .......................... **13 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : ( 3.5 points/au choix )

Si tu choisis de traiter **Exercice 1**, il ne faut pas traiter **Exercice 2**

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(D)$ : $7x^3 - 13y = 5$

**1 -** Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution de l'équation $(D)$.

**0,5 pt** **a)** Montrer que $x$ et 13 sont premier entre eux.

**0,5 pt** **b)** En déduire que : $x^{12} \equiv 1\ [13]$

**1 pt** **c)** Montrer que : $x^3 \equiv 10\ [13]$

**0,5 pt** **d)** En déduire que : $x^{12} \equiv 3\ [13]$

**1 pt** **2 -** Déduire des questions précédentes, que l'équation $(D)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

## Exercice 2 : ( 3.5 points/au choix )

Si tu choisis de traiter **Exercice 2**, il ne faut pas traiter **Exercice 1**

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble $E$ de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^* \right\}$.

**0,5 pt** **1 - a)** Montrer que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ .

**0,5 pt** **b)** Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans $E$.

**0,5 pt** **c)** Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}^*)$; $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**0,5 pt** **2 -** Montrer que $(E, \times)$ est un groupe non commutatif.

**3 -** On considère le sous-ensemble $F$ de $E$ défini par : $F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

**0,5 pt** **a)** Montrer que l'application $\varphi$ définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $\varphi(x) = M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

**1 pt** **b)** En déduire que $(F, \times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

## Exercice 3 : (3.5 points/obligatoire)

Soit $m$ un nombre complexe non nul.

**Première partie :**

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$, $(E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$

**0,5 pt** **1 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ (On remarque que $m$ est une solution de l'équation $(E)$)

**2 -** On note $z_1$ et $z_2$ les deux autres solutions de l'équation $(E)$ autre que $m$.

**0,25 pt** **a)** Vérifier que : $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{m}$.

**0,5 pt** **b)** Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique $z_1$ et $z_2$ .

**Deuxième partie :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

On considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On note :

— $P$ le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme $O$ en $A$.

— $Q$ le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme $A$ en $B$.

— $R$ le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme $B$ en $O$.

0,25 pt **1 -** Montrer que les points $O, A$ et $B$ ne sont pas alignés.

1 pt **2 - a)** Montrer que l'affixe de $P$ est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de $R$ est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0,5 pt **b)** Montrer que l'affixe de $Q$ est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0,5 pt **3 -** Montrer que $OQ = PR$ et les deux droites $(OQ)$ et $(PR)$ sont perpendiculaires.

## Exercice 4 : (13 points/obligatoire)

**Première partie :**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in ]0; +\infty[) \quad ; \quad f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

0,5 pt **1 -** On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x; x+1]$, montrer que : $(P)$ : $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la proposition $(P)$, montrer que la fonction $f$ est dévrivable à droite en 0.

0,5 pt **b)** En utilisant la proposition $(P)$, montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche paraboliques dont on précisera la direction.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad ; \quad f'(x) = 3x^2\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0,5 pt **b)** En déduire que $f$ est strictement croissante sur $I$ (On pourra utiliser la proposition $(P)$)

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

**4 -** pour tout $x \in ]0; +\infty[$, on pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

0,75 pt **a)** Vérifier que $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad ; \quad g'(x) = 2x\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right)$, en déduire que $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

0,5 pt **b)** Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution unique notée $\alpha$ puis vérifier que $\alpha \in ]1; 2[$ (On prendra $\ln(2) = 0,7$ et $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1,5$))

0,5 pt **c)** En déduire que les seuls solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et $\alpha$.

0,5 pt **5 - a)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ (On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de $(\mathcal{C})$)

0,25 pt **b)** Montrer que $f$ est une bijection de $I$ vers $I$ . (On notera $f^{-1}$ sa bijection réciproque)

**Deuxième partie :**

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $0 < u_0 < \alpha$ et $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \quad 0 < u_n < \alpha$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $g\left(]0;\alpha[\right) = ]0;1[$.

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

0,25 pt **c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

0,5 pt **3 -** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**Troisième partie :**

On considère la fonction $F$ définie sur l'intervalle $I$ par : $(\forall x \in I) \quad ; \quad F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Étudier suivant les valeurs de $x$, le signe de $F(x)$.

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur $I$ et déterminer sa dérivée première $F'$.

0,25 pt **c)** En déduire que $F$ est strictement décroissante sur $I$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \in [1;+\infty[) \quad ; \quad F(x) \leq (1-x)\ln(2)$.

0,25 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5 pt **3 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in ]0;+\infty[) \quad ; \quad F(x) = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$$

.

0,5 pt **b)** Calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$ (On remarque que $\dfrac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \dfrac{1}{t+1}$)

0,5 pt **c)** En déduire que : $(\forall x \in ]0;+\infty[)\,; \quad F(x) = \dfrac{5}{24} - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}\ln(1+x) - \dfrac{x^4}{4}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

0,5 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

**4 -** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose : $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

0,5 pt **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ :

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad -\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

(On remarquera que : $\dfrac{2k+1}{2n} < \dfrac{k+1}{n}$)

0,25 pt **c)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématique A & B**

**Session : Normal 2020**

MATHÉMATIQUES

Si tu choisis de traiter **Exercice 1**, il ne faut pas traiter **Exercice 2**

## Exercice 1 : (3.5 pts)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(D)$ : $7x^3 - 13y = 5$

**1 -** Supposons que l'équation $(D)$ admet une solution $(x; y)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

0.5 **a)** Montrons que $x$ et 13 sont premiers entre eux

Pour cela, posons $d = x \wedge 13$ et montrons que $d = 1$

Comme $d = x \wedge 13$, alors $d/x$ et $d/13$

Donc $d/x \times 7x^2 + 13 \times (-y)$

D'où $d/5$ ( car $5 = 7x^3 - 13y$ )

Et par suite $d = 5$ ou $d = 1$ ( puisque 5 est premier et $d \geqslant 1$ )

Et comme 5 ne divise pas 13 alors $d = 1$

Et par suite $\boxed{x \text{ et } 13 \text{ sont premiers entre eux}}$

0.5 **b)** Déduisons que : $x^{12} \equiv 1[13]$

Comme 13 est premier et comme $x \wedge 13 = 1$, alors d'après le théorème de **Fermat** $x^{13-1} \equiv 1[13]$ c.à.d. $\boxed{x^{12} \equiv 1[13]}$

1 **c)** Montrons que $x^3 \equiv 10[13]$

On a : $7x^3 - 13y = 5$ et comme $5 \equiv 70[13]$ et $13y \equiv 0[13]$, alors $7x^3 \equiv 70[13]$

Donc $13/7(x^3 - 10)$ et comme $13 \wedge 7 = 1$, alors d'après le théorème de **Gauss** $13/x^3 - 10$ et par suite $\boxed{x^3 \equiv 10[13]}$

0.5 **d)** Déduisons que $x^{12} \equiv 3[13]$

On a d'après la question précédente $x^3 \equiv 10[13]$, et comme $10 \equiv 3[13]$

Alors $(x^3)^4 \equiv (-3)^4[13]$ et comme $(-3)^4 \equiv 27 \times 3[13]$ et $27 \equiv 1[13]$

Alors $\boxed{x^{12} \equiv 3[13]}$

1 **2 -** Déduisons que l'équation $(D)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

D'après ce qui a précédé, si on suppose que l'équation $(D)$ admet une solution $(x; y)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, alors $x^{12} \equiv 1[13]$ et $x^{12} \equiv 3[13]$ d'où $1 \equiv 3[13]$

c.à.d $13/2$, ce qui contredit le fait que 13 ne divise pas 2

On en déduit que $\boxed{\text{l'équation } (D) \text{ ne peut pas avoir de solution dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$

Si tu choisis de traiter **Exercice 2**, il ne faut pas traiter **Exercice 1**

## Exercice 2 : (3.5 pts)

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} / (x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$$

0.5 **1 - a)** Montrons que $E$ est une partie stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

Pour cela, considérons deux matrices $M$ et $N$ de $E$ tels que :

$M = M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = N(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$

Et montrons que $M \times N \in E$ ( Sous-entendu , on a $(a,x) \in \mathbb{R}$ et $(b,y) \in \mathbb{R}^*$ )

$$\begin{aligned} \text{On a : } M \times N &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + a \times 0 & 1 \times x + a \times y \\ 0 \times 1 + b \times 0 & 0 \times x + b \times y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x + ay \\ 0 & by \end{pmatrix} \\ &= M(x + ay, by) \end{aligned}$$

Et comme $(x + ay) \in \mathbb{R}$ ( car$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau) et $by \in \mathbb{R}^*$ ( car $(\mathbb{R}^*, +, \times)$ est un groupe ) alors $M \times N \in E$

Et par suite $\boxed{E \text{ est une partie stable dans } (M_2(\mathbb{R}), \times)}$

0.5 **b)** Montrons que la loi $\times$ n'est pas commutative dans $E$

Pour cela, considérons deux matrices $M$ et $N$ de $E$ tels que :

$M = M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $N = N(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$, et montrons que $M \times N \neq N \times M$

On a, d'après la question précédente : $M \times N = \begin{pmatrix} 1 & x + ay \\ 0 & by \end{pmatrix} = M(x + ay, by)$

et $N \times M = \begin{pmatrix} 1 & a + xb \\ 0 & yb \end{pmatrix} = M(a + xb, yb)$

On constate bien que $M \times N \neq N \times M$ en général

En effet, si on prend par exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $M \times N = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M(x + ay, by)$ et $N \times M = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M(a + xb, yb)$

Donc $M \times N \neq N \times M$ et par suite $\boxed{\text{la loi } \times \text{ n'est pas commutative dans } E}$

0.5 **c)** Montrons que : $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + x\times 0 & 1\times\frac{-x}{y} + x\times\frac{1}{y} \\ 0\times 1 + y\times 0 & 0\times\frac{-x}{y} + y\times\frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De même, on a : $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + \frac{-x}{y}\times 0 & 1\times x + \frac{-x}{y}\times y \\ 0\times 1 + \frac{1}{y}\times 0 & 0\times x + \frac{1}{y}\times y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}),(\forall y\in\mathbb{R}^*) : \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

**0.5** **2 -** Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif

On a $E\subset M_2(\mathbb{R})$ et $E\neq\emptyset$ (car$I\in E$ ; $I=M(0,1)$)

D'après 1) a-, $E$ est une partie stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

Comme $E$ est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$, et comme $\times$ est associative dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$, alors elle l'est dans $E$ et comme $I$ est l'élément neutre dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ alors il l'est aussi dans $(E,\times)$

Et d'après la question précédente, l'inverse de tout élément $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ de $E$ dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ est $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$ et comme $\frac{-x}{y}\in\mathbb{R}$ et $\frac{1}{y}\in\mathbb{R}^*$, alors $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ dans $E$

D'où $\boxed{(E,\times) \text{ est un groupe, et d'après la question 1) b-, ce groupe est non commutatif}}$

**3 -** Considérons la partie F de E définie par : $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = M(x-1,x)/x\in\mathbb{R}^*\right\}$

**a)** Considérons l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & E \\ x & \longrightarrow & \varphi(x)=M(x) \end{array}$

**0.5** Montrons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

On a d'une part : $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2$ , $\varphi(x\times y)=\varphi(xy)=M(xy)=M(xy-1,xy)$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}\varphi(x)\times\varphi(y) &= M(x)\times M(y) = M(x-1,x)\times M(y-1,y)\\ &= M(y-1+(x-1)y,xy) = M(y-1+xy-y,xy) = M(xy-1,xy)\end{aligned}$$

D'où : $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2$ ; $\varphi(x\times y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

Et par suite $\boxed{\varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{R}^*,\times) \text{ vers } (E,\times)}$

**1** **b)** Déduisons que $(F,\times)$ est un groupe commutatif et précisons son élément neutre

Par définition de $F$, on en déduit que $F=\varphi(\mathbb{R}^*)$, en effet $F=\{\varphi(x)/x\in\mathbb{R}^*\}$

Et comme $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$, et comme $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif alors $(\varphi(\mathbb{R}^*),\times)$ c.à.d $\boxed{(F,\times) \text{ est un groupe commutatif}}$

## Exercice 3 : (3.5 pts)

Soit $m$ un nombre complexe non nul

### Partie I

Considérons, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$ avec $m \in (\mathbb{C}^*)$

0,5 **1 -** Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ sachant que $m$ est une solution de l'équation $(E)$

On a :

$$
\begin{aligned}
(\forall z \in \mathbb{C}) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0 &\Leftrightarrow z^3 - m^3 - 2mz^2 + 2m^2z = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-m)(z^2+mz+m) - 2mz(z-m) = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-m)(z^2+mz-2mz+m^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-m)(z^2-mz+m^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow z-m = 0 ou z^2 - mz + m^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow z = m ou z^2 - mz + m^2 = 0
\end{aligned}
$$

Résolvons, dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - mz + m^2 = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = -3m^2 = (im\sqrt{3})^2$

Cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont :

$z_1 = \dfrac{-(-m) - im\sqrt{3}}{2} = m\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $z_2 = \dfrac{-(-m) + im\sqrt{3}}{2} = m\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où, l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ est : $\boxed{S = \left\{m, m\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), m\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}}$

**2 -** Notons $z_1$ et $z_2$ les deux autres solutions de l'équation $(E)$ autre que $m$.

0.25 **a)** Vérifions que : $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{m}$

Comme $z_1$ et $z_2$ sont des solutions de l'équation $(E)$ autre que $m$

Alors $z_1 + z_2 = \dfrac{-(-m)}{1} = m$ et $z_1 \times z_2 = \dfrac{m^2}{1} = m^2$

Et par suite : $\boxed{\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \dfrac{m}{m^2} = \dfrac{1}{m}}$

0.5 **b)** Donnons l'écriture algébrique de chacun des nombres $z_1$ et $z_2$ en prenant dans cette question $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

On a : $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc :

$z_1 = m\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{4} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}$

$\boxed{z_1 = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Et : $z_2 = m\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{4} + i\dfrac{3\sqrt{3}}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3}{4}$

$\boxed{z_2 = \sqrt{3}i}$

## PARTIE II

Considérons, dans Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$,
les points $A(a = me^{i\frac{\pi}{3}})$ et $B(b = me^{-i\frac{\pi}{3}})$

Considérons les trois rotations : $R_1 = r\left(P, \frac{\pi}{2}\right)$ , $R_2 = r\left(Q, \frac{\pi}{2}\right)$ et $R_3 = r\left(R, \frac{\pi}{2}\right)$

Par hypothèses on a : $A = R_1(O)$ , $B = R_2(A)$ et $O = R_3(B)$

**0.25** **1 -** Montrons que les points $O, A$ et $B$ ne sont pas alignés

On a : $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{me^{i\frac{\pi}{3}}}{me^{-i\frac{\pi}{3}}} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \notin \mathbb{R}$ (car : $Im\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$)

D'où $\boxed{\text{les points } O, A \text{ et } B \text{ ne sont pas alignés}}$

**1** **2 - a)** Montrons que : $z_P = p = m\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que : $z_R = r = m\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}}$

On a $P$ est le centre de la rotation
$R_1 = r(P; \frac{\pi}{2})$ avec $A = R_1(O)$

$$\begin{aligned}
A = R_1(O) &\Leftrightarrow z_A - z_P = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_P)\\
&\Leftrightarrow a - p = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(0 - p)\\
&\Leftrightarrow a - p = -ip\\
&\Leftrightarrow a = (1 - i)p\\
&\Leftrightarrow p = \frac{a}{1 - i}\\
&\Leftrightarrow p = \frac{me^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}\\
&\Leftrightarrow p = m\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})}\\
&\Leftrightarrow p = m\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{p = m\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}}$

On a $R$ est le centre de la rotation
$R_3 = r(R; \frac{\pi}{2})$ avec $O = R_3(B)$

$$\begin{aligned}
O = R_3(B) &\Leftrightarrow z_O - z_R = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_R)\\
&\Leftrightarrow 0 - r = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(b - r)\\
&\Leftrightarrow -r = i(b - r)\\
&\Leftrightarrow -r + ir = ib\\
&\Leftrightarrow r(-1 + i) = ib\\
&\Leftrightarrow r\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \times me^{-i\frac{\pi}{3}}\\
&\Leftrightarrow r = \frac{m}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4})}\\
&\Leftrightarrow r = m\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{r = m\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}}}$

**0.5** **b)** Montrons que : $z_Q = q = m\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

On a $Q$ est le centre de la rotation $R_2 = r(Q; \frac{\pi}{2})$ avec $B = R_2(A)$

$$\begin{aligned}
B = R_2(A) &\Leftrightarrow z_B - z_Q = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_Q)\\
&\Leftrightarrow b - q = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(a - q)\\
&\Leftrightarrow b - q = i(a - q)\\
&\Leftrightarrow iq - q = ia - b\\
&\Leftrightarrow (i - 1)q = ia - b\\
&\Leftrightarrow q = \frac{ia - b}{i - 1}\\
&\Leftrightarrow q = \frac{me^{i\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} - me^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}\\
&\Leftrightarrow q = \frac{m(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}})}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow q = \frac{m(\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})} - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}})}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}\\
&\Leftrightarrow q = \frac{m}{\sqrt{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}\\
&\Leftrightarrow q = m\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}(\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}} - \mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}})}{\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}\\
&\Leftrightarrow q = m\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}(\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}} - \mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}})\\
&\Leftrightarrow q = m\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}} - \mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}})\\
&\Leftrightarrow q = m\frac{\sqrt{2}}{2}(-i)\left(2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{q = m\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)}$

0.5 **3 -** Montrons que $OQ = PR$

On a d'une part : $aff(\overrightarrow{OQ}) = q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

Et d'autre part : $aff(\overrightarrow{PR}) = r - p = m\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{-i\frac{7\pi}{12}} - e^{i\frac{7\pi}{12}}\right) = -2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)m\frac{\sqrt{2}}{2} = -i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)m\sqrt{2}$

Donc : $OQ = \left\|\overrightarrow{\text{OQ}}\right\| = |q| = \sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)|m|$ $\left(\text{car } \frac{7\pi}{12} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) > 0\right)$

Et : $PR = \left\|\overrightarrow{\text{PR}}\right\| = |r - p| = \sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)|m|$

Donc : $\boxed{OQ = PR}$

Montrons que $(OQ)\perp(PR)$

On a : $\frac{z_Q - z_O}{z_R - z_P} = \frac{q - 0}{r - p} = \frac{q}{r - p} = \frac{\sqrt{2}m\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{\sqrt{2}mi\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $\left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{OQ}\right) = arg\left(\frac{aff(\overrightarrow{OQ})}{aff(\overrightarrow{PR})}\right) = arg\left(\frac{q - 0}{r - p}\right) \equiv arg\left(\frac{q}{r - p}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$

D'où $\boxed{\text{les droites } (PR) \text{ et } (OQ) \text{ sont perpendiculaires}}$

## Exercice 4 : (13 pts)

### Partie I

Considérons la fonction $f$ définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$f(0) = 0$ et $\forall x \in ]0; +\infty[\,;\ \ f(x) = x^3\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (avec $\left\|\vec{\text{i}}\right\| = \left\|\vec{\text{j}}\right\| = 1cm$)

0.5 **1 -** Soit $x \in ]0; +\infty[$, montrons en appliquant le T.A.F. à la fonction ln sur l'intervalle $[x; x+1]$, que : $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

Comme la fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, alors elle est continue sur l'intervalle $[x; x+1]$, et dérivable sur l'intervalle $]x; x+1[$, alors d'après le T.A.F. $\exists c \in ]x; x+1[$ tel que : $\ln(x+1) - \ln x = \ln'(c)(x + 1 - x) = \ln'(c) = \frac{1}{c}$

Et comme $\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Alors : $\exists c \in ]x; x+1[$ tel que : $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{c}$

Et comme : $c \in ]x; x+1[ \Leftrightarrow x < c < x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$

Alors : $\boxed{\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}}$

**2 -** Considérons la propriété : $(P) : (\forall x \in ]0; +\infty[) : \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

0.5 **a)** En utilisant la propriété $(P)$, montrons que $f$ est dérivable à droite en 0

On a : $\forall x \in ]0; +\infty[\,;\ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$,

Comme : $\forall x \in ]0; +\infty[\,;\ x^2 > 0$

Alors de $(P)$ on déduit que : $(\forall x \in ]0; +\infty[)\,;\ \frac{x^2}{x+1} < x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{x^2}{x}$,

c.à.d. : $(\forall x \in ]0; +\infty[)\,;\ \frac{x^2}{x+1} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < x$

Et comme : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^2}{x+1} = 0$

Alors, d'après le théorème dit des gendarmes, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \in \mathbb{R}$

Et par suite, $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et on a } f'_d(0) = 0}$

0.5 **b)** En utilisant la propriété $(P)$, montrons que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction

D'abord, on remarque que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = +\infty$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ (en posant $t = \dfrac{1}{x}$)

En suite, on déduit, de la proposition $(P)$ que : $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ : $\dfrac{x^2}{x+1} < \dfrac{f(x)}{x} < x$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Et par suite $\boxed{\text{la courbe } (\mathcal{C}) \text{ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de } +\infty}$

0.75 **3 - a)** ❖ Montrons que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Comme la fonction : $x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable et strictement positive sur $]0;+\infty[$, alors la fonction $x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

D'où $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable et strictement positive sur } ]0;+\infty[}$ (produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$)

❖ Montrons que : $\forall x \in ]0;+\infty[\ :\ f'(x) = 3x^2\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{3(1+x)}\right]$

Et on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in ]0;+\infty[\ : f'(x) &= \left[x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]' \\
&= (x^3)' \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]' \\
&= 3x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3 \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}} \\
&= 3x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x^3 \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1+x}{x}} \\
&= 3x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{f'(x) = 3x^2\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{3(1+x)}\right]}$

0.5 **b)** Déduisons que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

On a : $\forall x \in ]0;+\infty[$ : $f'(x) = 3x^2\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{3(1+x)}\right]$

Et comme, d'après $(P)$ : $\forall x \in ]0;+\infty[$ : $\dfrac{1}{3(1+x)} < \dfrac{1}{1+x} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, alors : $\forall x \in ]0;+\infty[$ : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{3(1+x)} > \dfrac{1}{1+x} > 0$

Et comme $\forall x \in ]0;+\infty[$ : $3x^2 > 0$, alors : $\forall x \in ]0;+\infty[$ : $f'(x) > 0$

D'où $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } ]0;+\infty[}$

0.25 **c)** Tableau de variations de $f$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f$ | $0 \nearrow +\infty$ |

**4 -** Considérons la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

0.75 **a)** ❖ Vérifions que $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\quad;\quad g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{2(x+1)}\right)$

D'abord, signalons que $g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (rapport de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$)

On a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\,]0;+\infty[\ :\ g'(x) &= \left[\frac{f(x)}{x}\right]'\\ &= \frac{f'(x)x-f(x)(x')}{x^2}\\ &= \frac{1}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\\ &= \frac{1}{x}\left(f'(x)-\frac{1}{x}f(x)\right)\\ &= \frac{1}{x}\left[3x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right]-\frac{1}{x}x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\\ &= 3x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{1+x}\\ &= 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{1+x}\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{g'(x)=2x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{2(1+x)}\right]}$

❖ déduisons que $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

On a : $g'(x)=2x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{2(1+x)}\right]$

Toujours, d'après $(P)$, on a : $\forall x\in\,]0;+\infty[\ :\ \dfrac{1}{2(1+x)}<\dfrac{1}{1+x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Et comme $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\ :\ 2x>0$ , alors $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\ :\ g'(x)>0$

Et par suite $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } ]0;+\infty[}$

0.5 **b)** ❖ Montrons que l'équation $g(x)=1$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]0;+\infty[$

Comme la fonction $g$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors c'est une bijection de $]0;+\infty[$ vers l'intervalle $J=g(]0;+\infty[)$

Et on a : $J=g(]0;+\infty[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}g(x);\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right[=]0;+\infty[$

Car : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

Et comme $1\in J$, alors $\exists!\alpha\in\,]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=1$ ( d'après théorème de la fonction bijective )

Finalement : $\boxed{\text{l'équation } g(x)=1 \text{ admet une solution unique } \alpha \text{ sur } ]0;+\infty[}$

❖ Vérifions que $\alpha \in ]1;2[$ (Prenons $\ln(2) = 0,7$ et $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1,5$))

Comme $g(1) = f(1) = \ln 2 \approx 0.7$ et $g(2) = \frac{1}{2}f(2) = 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1.5$ et $g(\alpha) = 1$, alors : $g(1) < g(\alpha) < g(2)$

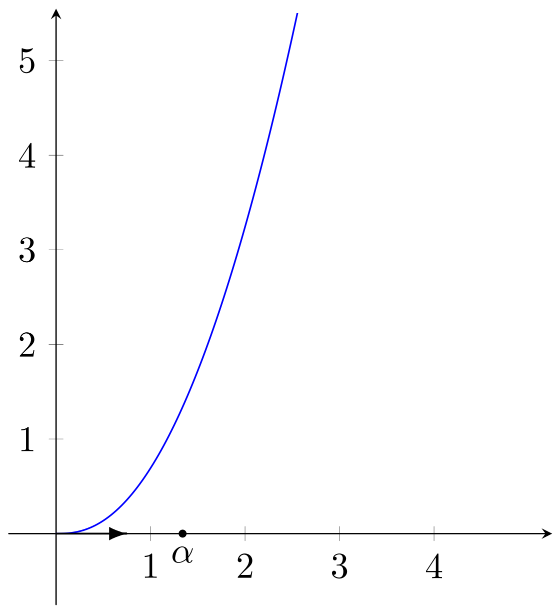
Et comme la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que $1$, $\alpha$ et $2$ sont des éléments de cet intervalle alors $1 < \alpha < 2$ c.à.d. $\boxed{\alpha \in ]1;2[}$

0.5 **c)** Déduisons que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont $0$ et $\alpha$

On a : $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow g(x) = 1 \Leftrightarrow x = \alpha$

Et comme $f(0) = 0$, alors $\boxed{\text{les seules solutions de l'équation } f(x) = x \text{ sont } 0 \text{ et } \alpha}$

0.5 **5 - a)** Représentation graphique de la fonction $f$




0.25 **b)** Montrons que $f$ est une bijection de $I$ vers $I$

Comme la fonction $f$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I$, alors elle réalise une bijection de $I$ vers $f(I) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[ = ]0;+\infty[ = I$

Signalons que $f$ est continue à droite en $0$, puisqu'on a démontré qu'elle est dérivable à droite en $0$ , d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = f(0) = 0$ (Notons $f^{-1}$ sa bijection réciproque)

Conclusion : $\boxed{f \text{ est une bijection de } I \text{ vers } I}$

## Partie II

Considérons la suite $(u_n)_{n\geqslant0}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ avec $0 < u_0 < \alpha$

0.5 **1 -** Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $0 < u_n < \alpha$

Par hypothèse la propriété est vraie pour $n = 0$, $0 < u_0 < \alpha$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < \alpha$ et montrons que : $0 < u_{n+1} < \alpha$

On a, d'après l'hypothèse de la récurrence $0 < u_n < \alpha$, et la fonction $f^{-1}$ est strictement croissante sur $f(I) = I$ (car $f$ l'est sur $I$)

Alors $f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) < f^{-1}(\alpha)$ et comme $f^{-1}(0) = 0$ et $f^{-1}(\alpha) = \alpha$ (puisque $f(0) = 0$ et

$f(\alpha)=\alpha$), alors : $0<u_{n+1}<\alpha$ (puisque $f^{-1}(u_n)=u_{n+1}$)

Selon le principe de la récurrence on peut conclure que : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n<\alpha}$

0.5 **2 - a)** Montrons que : $g\left(]0;\alpha[\right)=]0;1[$

On a vu déjà que g est continue est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Et comme $]0;\alpha[\subset]0;+\infty[$, alors elle l'est aussi sur $]0;\alpha[$

Et donc : $g\left(]0;\alpha[\right)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}g(x);\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}}g(x)\right[=]0;1[$, ( en effet : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}}g(x)=g(\alpha)=1$ (car $g$ est continue en $\alpha$ et $g(\alpha)=1$ ) )

Conclusion : $\boxed{g\left(]0;\alpha[\right)=]0;1[}$

0.5 **b)** Déduisons que la suite $(u_n)_{n\geqslant0}$ est strictement croissante

Du fait que $g\left(]0;\alpha[\right)=]0;1[$, on déduit que $(\forall x\in]0;\alpha[):\ 0<g(x)<1$

Et comme $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n\in]0;\alpha[$, alors $(\forall n\in\mathbb{N}):\ 0<g(u_n)<1$

Et comme $(\forall n\in\mathbb{N}):\ g(u_n)=\dfrac{f(u_n)}{u_n}$ et $u_n>1$

Alors on en déduit que $(\forall n\in\mathbb{N}):\ 0<f(u_n)<u_n$ et comme $f^{-1}$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, alors $(\forall n\in\mathbb{N}):\ f^{-1}(0)<f^{-1}(f(u_n))<f^{-1}(u_n)$

Alors $(\forall n\in\mathbb{N}):\ 0<u_n<f^{-1}(u_n)$

Et comme $f^{-1}(u_n)=u_{n+1}$, alors on déduit que $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n<u_{n+1}$

Ce qui signifie, finalement, que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$

0.25 **c)** Montrons que la suite $(u_n)_{n\geqslant0}$ est convergente

Comme la suite $(u_n)$ est strictement croissante et comme elle est majorée (par $\alpha$)

Alors $\boxed{(u_n)\text{ est convergente}}$

0.5 **3 -** Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

La suite $(u_n)$ est une suite récurrente définie par $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$

avec $u_0\in]0;\alpha[\subset[0;\alpha[$

Comme la fonction $f^{-1}$ est continue sur l'intervalle $[0;\alpha]$

Et comme $f^{-1}\left([0;\alpha]\right)=[0;\alpha]\subset[0;\alpha]$ ( car $\alpha\in]1;2[$ )

Et comme $u_0\in[0;\alpha]$

Et comme $(u_n)$ est convergente

Alors la limite de $(u_n)$ est solution de l'équation $f^{-1}(x)=x$ sur l'intervalle $[0;\alpha]$

Or :

$$\begin{aligned}(\forall x\in[0;\alpha])\ :\ f^{-1}(x)=x\ &\Leftrightarrow\ f(x)=x\\ &\Leftrightarrow\ x=0 \text{ ou } x=\alpha\end{aligned}$$

Donc On a ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$ et comme $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ 0<u_n<\alpha$ et comme la suite $(u_n)$ est strictement croissante, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha}$, ( en effet, du fait que $(u_n)$ est strictement croissante on déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\geqslant u_0$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\geqslant u_0$ et comme $u_0>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n>0$ )

## Partie III

Considérons la fonction $F$ définie sur $I = [0;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

0.5 **1 - a)** Étudions, suivant les valeurs de $x$, le signe de $F(x)$

Soit $x \in [0;+\infty[$

On sait que $f$ est continue sur $I = [0;+\infty[$ et que $(\forall t \in [0;+\infty[) : f(t) \geqslant 0$

Donc : $\boxed{F(x) \geqslant 0 \text{ si } x \leqslant 1 \text{ et } F(x) \leqslant 0 \text{ si } x \geqslant 1}$

0.5 **b)** Montrons que la fonction $F$ est dérivable sur $I$ et déterminons sa dérivée première $F'$

Remarquons d'abord que $F(x) = -\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ et comme la fonction $f$ est continue sur $I$ et comme $1 \in I$, alors la fonction : $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ est la fonction primitive de $f$ qui s'annule en 1 et on a : $(\forall x \in I) : \left(\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$, on en déduit que

$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est dérivable sur } I \text{ et que } (\forall x \in I) : F'(x) = -f(x)}$

0.25 **c)** Déduisons que $F$ est strictement décroissante sur $I$

Comme $(\forall x \in I) : F'(x) = -f(x)$ et comme $(\forall x \in ]0;+\infty[) : f(x) \geqslant 0$

Alors $(\forall x \in ]0;+\infty[) : F'(x) < 0$, et par suite $\boxed{F \text{ est strictement décroissante sur } I = [0;+\infty[}$

0.5 **2 - a)** Montrons que : $(\forall x \in [1;+\infty[) ; \ F(x) \leqslant (1-x)\ln 2$

Soit $x \in [1;+\infty[$

On a $(\forall t \in [1;x]) : f(1) \leqslant f(t)$ et comme $f(1) = \ln 2$, alors $(\forall t \in [1;x]) : \ln 2 \leqslant f(t)$, et comme $1 \leqslant x$, alors $\displaystyle\int_1^x \ln 2\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$

Donc : $(x-1)\ln 2 \leqslant \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, et par suite $-\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant -(x-1)\ln 2$

C.à.d. : $\boxed{F(x) \leqslant (1-x)\ln 2}$

0.25 **b)** Déduisons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$

Comme d'après la question précédente : $(\forall x \in [1;+\infty[) ; \ F(x) \leqslant (1-x)\ln 2$, et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (1-x)\ln 2 = -\infty$ (car $\ln 2 > 0$).

Alors $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty}$

0.5 **3 - a)** Montrons que : $(\forall x \in ]0;+\infty[) ; F(x) = \dfrac{\ln(2)}{4} - \dfrac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$

Soit $x \in ]0;+\infty[$, On a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_x^1 t^3 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_x^1 \left[\frac{t^4}{4}\right]' \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^4}{4}\left[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]'\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^4}{4}\left[\frac{\frac{-1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}}\right]\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^4}{4}\left[\frac{-1}{t(1+t)}\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(x) &= \left[\frac{t^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1 - \int_x^1 -\frac{t^3}{4(1+t)}\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1 + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[)\,;\ F(x) = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t}$

0.5 **b)** Calculons $\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$ (Remarquons que $\frac{t^3}{t+1} = t^2-t+1-\frac{1}{t+1}$)

Soit $x \in ]0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t &= \int_x^1 \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(1+t)\right]_x^1\\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\forall x \in ]0;+\infty[\ :\ \int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{5}{6}-\ln 2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)}$

0.5 **c)** Déduisons que : $(\forall x \in [1;+\infty[)\,;\ F(x) = \frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

D'après les deux questions $3-a)$ et $3-b)$ on déduit que :

$\boxed{(\forall x \in [1;+\infty[)\,;\ \ F(x) = \frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

0.5 **d)** Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)$ et en déduisons la valeur de $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

❖ Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)$

Comme $\forall x \in ]0;+\infty[\ :\ F(x) = \frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

Et comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x) = \frac{5}{24}}$

❖ Déduisons la valeur de $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

Comme $\forall x \in [0;+\infty[\ :\ F(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$, et comme $0 \in I$, alors $F(0) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

Et comme $F$ est continue à droite en 0 (car dérivable), alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x) = F(0)$

Et comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x) = \frac{5}{24}$ et comme la limite d'une fonction si elle existe est unique.

Alors $\boxed{\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{24}}$

**4 -** Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\left[F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right]$

0.5 **a)** Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$

$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Appliquant le T.A.F. à la fonction $F$ sur L'intervalle $\left[\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right]$

On a $F$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et comme $\left[\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right] \subset [0; +\infty[$, alors elle continue sur $\left[\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right[$, donc d'après le T.A.F. : $\left(\exists c \in \left]\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right[\right)$ tel que $F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = F'(c)\left(\frac{2k+1}{2n} - \frac{k}{n}\right) = -f(c)\frac{1}{2n}$

Et comme $f$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et comme $\frac{k}{n} < c < \frac{2k+1}{n}$, alors : $f\left(\frac{k}{n}\right) < f(c) < f\left(\frac{2k+1}{n}\right)$

Et par suite : $\boxed{-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$

**0.5** **b)** Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ; $-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant v_n \leqslant -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

On a d'après la question précédente : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ; $(\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\})$

$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

Et en passant à la sommation on obtient :

$\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ (*)

On a : $\forall k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ $\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$

Et comme $f$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, alors $\forall k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$

$f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ donc $\forall k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ $-f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant -f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$

Et donc $-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$

Et d'après $(*)$ on obtient : $-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant v_n \leqslant -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Et comme $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Alors $\boxed{-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant v_n \leqslant -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}$

**0.25** **c)** Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminons sa limite

D'après la question précédente on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ; $-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant v_n \leqslant -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Et comme $f$ est continue sur l'intervalle $[0; 1]$, alors les deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ; $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ; $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sont convergentes et on a : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{24}$

Donc les deux suites $\left(-\frac{1}{2}S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(-\frac{1}{2}T_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes

Et on a : $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}S_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}T_n = \frac{-5}{48}$

Et comme $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ; $-\frac{1}{2}S_n \leqslant v_n \leqslant -\frac{1}{2}T_n$, alors $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$

Et on a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{-5}{48}}$

FIN

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage** juillet 2020

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'usage de la calculatrice est strictement interdit ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

✓ **Le candidat doit traiter EXERCICE 3 et EXERCICE 4 et choisir de traiter EXERCICE 1 ou bien EXERCICE 2.**

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte quatre exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :***

- Exercice 1 : **Arithmétique** (au choix) .................................. **3.5 points**
- Exercice 2 : **Structures Algébriques** (au choix) ........................ **3.5 points**
- Exercice 3 : **Les Nombres Complexes** (obligatoire) ................... **3.5 points**
- Exercice 4 : **L'analyse** (obligatoire) ..................................... **13 points**

**Le candidat doit traiter au total trois exercices**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

**Tu choisis de traiter EXERCICE 1 ou bien EXERCICE 2**

**Tu traites obligatoirement EXERCICE 3 et EXERCICE 4**

## Exercice 1 : (3.5 pts / au choix)

**Si tu choisis de traiter EXERCICE 1 il ne faut pas traiter EXERCICE 2**

Soient $p$ et $q$ deux nombres premiers vérifiant : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1\ [pq]$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $p$ et 9 sont premiers entre eux.

1 pt **b)** En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et que $9^{q} \equiv 1\ [p]$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $p-1$ et $q$ sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p = 2$

0.5 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1\ [q]$

0.5 pt **b)** En déduire que : $q = 5$

## Exercice 2 : (3.5 pts / au choix)

**Si tu choisis de traiter EXERCICE 2 il ne faut pas traiter EXERCICE 1**

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zero $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous-ensemble : $E = \left\{ M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

**Première partie** :

0.25 pt **1 - a)** Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$

0.5 pt **b)** Déterminer une base de $(E, +, .)$

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3\ ;\ M(x,y,z) \times M(x',y',z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz')$

0.5 pt **b)** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif

**Deuxième partie** :

On considère le sous-ensemble $F$ de $E$ des matrices de la forme $M(x,y,0)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

0.25 pt **1 -** Montrer que $F$ est un sous-groupe du groupe $(E, +)$

**2 -** On note $\varphi$ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $E$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \varphi(x+iy) = M(x,y,0)$

0.25 pt **a)** Monter que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$

0.5 pt **b)** En déduire que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif. ($F^*$ désigne $F - \{O\}$)

0.5 pt **c)** Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que : $(\forall M(x,y,0) \in F)$ ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M(x,y,0) = O$

0.25 pt **b)** En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble $F$ n'admet un inverse pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

## Exercice 3 : (3.5 pts / obligatoire)

I- Soit $m$ un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux équations :

$$(E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \quad \text{et} \quad (F) : z^3 + 2(1-i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1+m^2) = 0$$

0.5 pt **1 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$

0.25 pt **2 - a)** Montrer que l'équation $(F)$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(F)$

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les deux points : $A(-1+im)$ et $B(-1-im)$

Soient $\Omega$ le milieu du segment $[AB]$, $A'$ le milieu du segment $[OB]$ et $B'$ le milieu du segment $[OA]$

La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ transforme $A$ en $P(p)$, la rotation de centre $A'$ et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ transforme $B$ en $Q(q)$ et la rotation de centre $B'$ et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ transforme $O$ en $R(r)$

1.5 pt **1 -** Montrer que : $p = -1 + m$ , $q = \dfrac{1-i}{2}(-1-im)$ et $r = \bar{q}$

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que : $q - r = -ip$

0.5 pt **b)** En déduire que : $OP = QR$ et que les deux droites $(OP)$ et $(QR)$ sont orthogonales.

## Exercice 4 : ( 13 pts / obligatoire)

**Première partie** :

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = [0,1]$ par $f(x) = x\ln(2-x)$

et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $f$ est dérivable sur $I$ et que : $\forall x \in I$ ; $f'(x) = \ln(2-x) - \dfrac{x}{2-x}$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction dérivée $f'$ est strictement décroissante sur $I$

0.75 pt **c)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in ]0;1[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2-\alpha}$

0.75 pt **2 - a)** Étudier les variations de $f$, puis donner son tableau de variations.

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe $(C)$ est concave.

0.5 pt **c)** Montrer que : $(\forall t \in I)$ , $(\forall x \in I)$ ; $f(x) \leqslant f'(t)(x-t) + f(t)$

0.5 pt **d)** En déduire que : $(\forall x \in I)$ ; $f(x) \leqslant x\ln(2)$ et $f(x) \leqslant -x+1$.

0.5 pt **3 -** Représenter la courbe $(C)$ (On prendra : $\|\vec{i}\| = 2cm$)

**0.75 pt** **4 -** Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C)$ et les droites d'équations respectives : $x = 0$ , $x = 1$ et $y = 0$

**Deuxième partie :**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction $f_n$ définie sur $I = [0,1]$ par : $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$

**0.5 pt** **1 - a)** Vérifier que $f_n$ est positive sur $I$ et que $f_n(0) = f_n(1)$

**0.5 pt** **b)** Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in ]0,1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$

**0.75 pt** **2 - a)** Montrer que $f_n$ est dérivable sur $I$ et que : $\forall x \in I$ ; $f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où : $g_n(x) = n \ln(2-x) - \dfrac{x}{2-x}$

**0.5 pt** **b)** Montrer que la fonction $g_n$ est strictement décroissante sur $I$

**0.5 pt** **c)** En déduire que $\alpha_n$ est unique.

**3 -** On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ ainsi définie.

**1 pt** **a)** Montrer que : $\forall n \geqslant 2$; $f_n(\alpha_n) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$, en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

**1 pt** **b)** Montrer que : $\forall n \geqslant 2$; $g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

**0.25 pt** **c)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

**0.5 pt** **d)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

**Troisième partie** :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$

**0.75 pt** **1 -** Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

**0.5 pt** **2 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{2-x}\,dx$

**0.75 pt** **3 -** Montrer que : $(\forall n \geqslant 2)$ ; $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

FIN

R O Y A U M E D U M A R O C

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : RATTRAPAGE 2020**

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (3 pts)

Soient $p$ et $q$ deux nombres premiers vérifiant : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1 \quad [pq]$

0.5 pt

**1 - a)** Montrons que $p$ et 9 sont premiers entre eux.

Soit $d = p \wedge 9 \Rightarrow d/p$ et $d/9$

$$\Rightarrow d \in \{1, p\} \text{ et } d \in \{1, 3, 9\}$$
$$\Rightarrow d \in \{1, p\} \cap \{1, 3, 9\}$$
$$\Rightarrow d \in \{1\}; \quad p \neq 3$$
$$\Rightarrow d = 1$$
$$\boxed{\Rightarrow p \wedge 9 = 1}$$

1 pt

**b)** — Déduisons que : $9^{p-1} \equiv 1[p]$ et que $9^q \equiv 1[p]$

On $a$ aussi : $9^{p+q-1} \equiv 1[pq]$

$$\Rightarrow pq/\left(9q \cdot 9p^{-1} - 1\right)$$
$$\Rightarrow \left(9q \cdot 9^{p-1} - 1\right) = kpq$$
$$\Rightarrow \left(9q \cdot 9^{p-1} - 1\right) = k'p \text{ avec } k' = kq$$
$$\Rightarrow p/\left(9^q \cdot 9^{p-1} - 1\right)$$
$$\Rightarrow 9^q \cdot 9^{p-1} \equiv 1[p]$$

$$\text{Or } g^{p-1} \equiv 1[p] \Rightarrow 9^q \cdot g^{p-1} \equiv 9^q[p]$$

$$\boxed{(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 9^4 \equiv 1[p]}$$

0.5 pt

**2 - a)** Montrons que $p$ - 1 et $q$ sont premiers entre eux .

Soit $d = (p-1) \wedge q$

$\Rightarrow d/q$ et $q$ est un nombre premier

$\Rightarrow d \in \{1, q\}$

On suppose que $d = q$

Alors $\quad (p-1) \wedge q = q$

$\Rightarrow q/(p-1)$

$\Rightarrow q < (p-1)$

Or on a $p < q$

(1) et (2)

$\Rightarrow p < q < p-1$

$\Rightarrow p < p-1$

$\Rightarrow 0 < -1$ contradiction

$\Rightarrow$ hypothèse $(d = q)$ a rejeter

$\Rightarrow$ hypothèse $(d = 1)$ est retenue

$\boxed{\Rightarrow (p-1) \wedge q = 1}$

**0.5 pt** **b)** — En utilisant le théorème de BEZOUT, montrons que : $p = 2$

On $a$ : $(p-1) \wedge q = 1$

$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N} : aq - b(p-1) = 1$; Bezout

Car $q$ et $(p-1) \in$ N tels que $q > (p-1)$

$$- \left\{ \begin{array}{l} 9^q \equiv 1[p] \\ 9^{(p-1)} \equiv 1[p] \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(9^A\right)^a \equiv 1^a[p] \\ \left(9^{(p-1)}\right)^b \equiv 1^b[p] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9^{aq} \equiv 1[p] \\ 9^{(p-1)b} \equiv 1[p] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9^{aq} \equiv 1[p] \\ 9^{(p-1)b+1} \equiv 9[p] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9^{aq} \equiv 1[p] \\ 9^{aq} \equiv 9[p] \end{array} \right.$$

$\Rightarrow 9 \equiv 1[p]$

$\Rightarrow p$ divise 8

$\boxed{\Rightarrow p \in \{1, 2, 4, 8\}}$

$\Rightarrow p = 2 \quad car \quad p \in \mathbb{P}$

**0.5 pt**

**3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAT,montrons que : $9^{q-1} \equiv 1[q]$

Dans le raisonnement proposé dans la question 1)a) On peut faire pareil pour montrer l'identité $q \wedge 9 = 1$.

$$\text{Ainsi : } \boxed{\left| \begin{array}{l} q \in \mathbb{P} \\ q \wedge 9 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 9^{p-1} \equiv 1[q]}$$

**0.5 pt** **b)** — Déduisons que : $q = 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} 9^{(q-1)} \equiv 1[q] \\ 9^{p+q-1} \equiv 1[q] \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9^{(q-1)} \equiv 1[q] \\ 9^2 \cdot 9^{(q-1)} \equiv 1[q] \end{array} \right. \quad ; p = 2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9^2 \cdot 9^{(q-1)} \equiv 9^2[q] \\ 9^2 \cdot 9^{(q-1)} \equiv 1[q] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 9^2 \equiv 1[q]$$

$$\Rightarrow q \text{ divise } 80$$

$$\Rightarrow q \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$$

$$\Rightarrow q \in \{2; 5\} \text{ car } q \in \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow q \in \{5\} \text{ car } q > p = 2$$

$$\boxed{\Rightarrow q = 5}$$

## Exercice 2 : (3 pts)

On note $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R})+, .)$ est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que $(M_3(\mathbb{R})+, \times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zéro $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous -ensemble : $E = \left\{ M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

### Partie I

**0.25 pt** **1 - a)** Montrons que $E$ est un sous-espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R})+, .)$

Rappel : (Caractérisation des SEV sur $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{c} F \text{ est un sev} \\ \text{de } (E, +, ) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} (\forall a \in \mathbb{R})(\forall x, y \in F) \\ (\alpha x + y) \in F \end{array}$$

Soient A et B deux éléments de E. Soit $\alpha$ un scalaire de $\mathbb{R}$.

$$\alpha A + B = \alpha \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & z' & 0 \\ y' & x'-z' & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha x + x') & -(\alpha y + y') & -(\alpha y + y') \\ 0 & (\alpha z + z') & 0 \\ (\alpha y + y') & (\alpha x + x') - (\alpha z + z') & (\alpha x + x') \end{pmatrix}$$

$$= M((\alpha x + x') ; (\alpha y + y') ; (\alpha z + z')) \in E$$

Car $((\alpha x + x') ; (\alpha y + y') ; (\alpha z + z')) \in \mathbf{R}^3$

$D'o$ ù : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}), (\forall A, B \in E) : (\alpha A + B) \in E$

$\boxed{c-a-d : E \text{ est un sev de l'espace } (M_2(\mathbb{R}), +, \ )}$

0.5 pt **b)** — Déterminons une base de $(E, +, \times)$

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & -z & 0 \end{pmatrix}$$

$$= x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{u} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{w}$$

$$= xu + yv + zw$$

Donc $(u, v, w)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel réel $(E, +, \times)$.

Soit ( $\alpha u + \beta v + \gamma w = \theta$) une combinaison linéaire nulle des éléments $u$, $v$ et $w$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & \alpha - \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc la seule combinaison linéaire de $(u, v, w)$ qui soit nulle est celle pour laquelle on ait

$\alpha = \beta = \gamma = 0$.

C-ò-d $(u, v, w)$ est une famille libre. Finalement on déduit que $(u, v, w)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(E, +, \times)$ comme étant génératrice de $E$ et étant libre . Et on aurait ainsi : ( dimE $= 3$)

**0.25 pt**

**2 - a)** Vérifions que :

$\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3; M(x, y, z) \times M(x', y', z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz')$

$$M(x, y, z) \times M(x', y', z')$$
$$= \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & z' & 0 \\ y' & x'-z' & x' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (xx'-yy') & -(xy'+x'y) & -(xy'+x'y) \\ 0 & zz' & 0 \\ (xy'+x'y) & (xx'-yy')-zz' & (xx'-yy') \end{pmatrix}$$
$$\boxed{= M(xx' - yy'; xy' + yx'; zz') \in E}$$
$$Car : (xx' - yy'; xy' + yx'; zz') \in \mathbb{R}^3$$

**0.5 pt**

**b)** — Montrons que ( $E, +; \times$ ) est un anneau commutatif

$(E, +,)$ est un espace vectoriel réel. Alors : $(E, +)$ est un groupe commutatif On a aussi : $\times$ est associative sur $E \subset M_3(\mathrm{R})$ Car $\times$ est associative sur $M_3(\mathbb{R})$. Comme $x$ est distributive par rapport à $+$ sur $M_2(R)$ alors $\times$ est distributive par rapport a $+$ dans $E$. Car $E \subseteq M_3(R)$. La conclusion finale est que $(E, +, x)$ est un anneau. En plus cet anneau est commutatif car la loi $x$ est commutative sur $E$.

$$M(x, y, z) \times M(x', y', z')$$
$$= M(xx' - yy'; xy' + yx'; zz')$$
$$= M(x'x - y'y; y'x + x'y; z'z)$$
$$\boxed{= M(x', y', z') \times M(x, y, z)}$$

## Partie II

On considère le sous-ensemble $F$ de $E$ des matrices de la forme $M(x, y, 0)$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

**0.25 pt**

**1 -** Montrons que $F$ est un sous-groupe du groupe $(E, +)$
D'abord On $a$ : $F \subseteq E$ Car $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $M(x, y, 0) \in E$ Aussi : $F$ est non vide car $\theta \in F$
Soient $A = M(x, y, 0)$ et $B = M(x', y', 0)$ deux matrices de $F$, on $a$ :

$$A - B = M(x, y, 0) - M(x', y', 0)$$
$$= M(x - x'; y - y'; 0) \in F$$

Car $(x-x') \in \mathbb{R}$ et $(y-y') \in \mathbf{R}$
Donc d'après la caractérisation des sous-groupes on en déduit que $F$ est un sous-groupe du groupe commutatif du groupe $(E,+)$

On note $\varphi$ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $E$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \varphi(x+iy) = M(x,y,0)$$

**0.25 pt** **2 - a)** Montrons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E,\times)$

$$\begin{aligned}\varphi\left((x+iy)\times(x'+iy')\right) &= \varphi\left((xx'-yy')+i\left(xy'+yx'\right)\right)\\ &= M\left(xx'-yy';xy'+yx';0\right)\\ &= M(x,y,0)\times M\left(x',y',0\right)\\ &= \varphi(x+iy)\times\varphi\left(x'+iy'\right)\end{aligned}$$

**0.5 pt** **b)** — Déduisons que $(F^*;\times)$ est un groupe commutatif. ( $F^*$ désigne $F-\{O\}$)
On montre d'abord que $\varphi$ est une bijection de $C^*$ vers $F^*$. Soit $M(a,b,0)$ une matrice donnée de $F^*$. Et soit à résoudre dans $C^*$ l'équation $\varphi(z) = M(a,b,0)$.

$$\begin{aligned}\varphi(z) = M(a,b,0) \quad &\Leftrightarrow \varphi(x+iy) = M(a,b,0)\\ &\Leftrightarrow M(x,y,0) = M(a,b,0)\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & a & a \end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow x = a \text{ et } y = b\end{aligned}$$

D'où la chose suivante :
$(\forall M(a,b,0) \in F^*), (\exists! z = a+bb \in C^*) : \varphi(z) = M(a,b,0)$
C-à-d que $\varphi$ est bijective.
D'où $\varphi$ est un isomorphisme.
Alors $\varphi\left(C^*, x\right) = \left(F^*, x\right)$ est un groupe commutatif car ( $C^*, x)$ l'est à priori. Comme $(1+0i)$ est l'élément neutre pour le groupe (C*,x) Alors $\varphi(1+0i) = M(1,0,0)$ est l'élément neutre pour le groupe $(F^*, x)$.

$$\text{Comme : } \operatorname{Sym}_{\mathrm{C}^+}(x+iy) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}\right)$$

$$\begin{aligned}&\text{Alors : } \operatorname{Sym}_{F^*}(M(x,y,0)) = \operatorname{Sym}_{F}\cdot(\varphi(x+iy))\\ &= \varphi\left(\operatorname{Sym}_{\mathbf{C}}(x+iy)\right)\\ &= \varphi\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}\right)\\ &= M\left(\frac{x}{x^2+y^2}; \frac{-y}{x^2+y^2}; 0\right)\end{aligned}$$

**0.5 pt** **c)** Montrons que $(F,+;\times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité. $(F,+,\times)$ est un corps commutatif car :

$$\begin{cases} (F,+) \text{ est un groupe abélien} \\ (F^*,\times) \text{ est un groupe} \\ \times \text{ est distributive par rapport à} + \text{ dans } F \subset M_3(\mathrm{R}) \\ \times \text{ est commutative sur } F \subset E \end{cases}$$

L'unité du corps $(F,+,x)$ sera l'élément neutre de la loi $x$ dans $F$ à savoir $M(1,0,0)$.

**0.25 pt** **3 - a)** Vérifions que : $(\forall M(x,y,0) \in F)$ ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M(x,y,0) = O$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**0.25 pt** **b)** — Déduisons qu'aucun des éléments du sous-ensemble $F$ n'admet un inverse pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R}^3)$

On suppose l'existence d'un élément de F inversible pour la multiplication matricielle dans $M_3(\mathbb{R})$. C-d-d : $M^{-1} \times M = M \times M^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M \times M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow 1 = 0$ contradiction

Donc ce qu'on a supposé est faux.

C-ó-d qu'aucun élément de $F$ n'est guerre inversible pour la multiplication matricielle dans l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$.

## Exercice 3 : (3 pts)

### Partie I

Soit $m$ un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes **C**, les deux équations :

$$\text{(E)} : \; : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \quad \text{et} \quad (F) : z^3 + 2(1-i)z^2 + \left(1 + m^2 - 4i\right) z - 2i\left(1 + m^2\right) = 0$$

**0.5 pt** **1 -** Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$

$$(E) : z^2 + 2z + m^2 + 1 = 0$$

$$\boxed{\Delta = (2\text{im})^2 \quad ; \quad z = -1 \pm im}$$

**0.25 pt** **2 - a)** Montrons que l'équation ( $F$ ) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

Soit $ai$ un nombre imaginaire pure avec $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \left(4a-2a^2\right)+i\left(-a^3+2a^2+a+im^2-2-\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a-2a^2=0 \\ -a^3+2a^2+a+im^2-2-2m^2 \end{cases}$$

ai $\in$ solution $(F)$

$$\Rightarrow (ai)^3+2(1-i)(ai)+\left(1+m^2-4i\right)ai-2i\left(1+m^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien} & a=0 \\ \text{ou bien} & a=2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow a=2 \text{ car } a\neq 0$$

Pour l'implication réciproque si on remplace $z=2i$ dans l'équation (F) on obtient zéro.

$$-8i-8+8i+2i+2im^2+8-2i-2im^2=0$$

D'où la conclusion : $\boxed{(F) admetunesolutionimaginaire \quad pure \quad etc'estlenombre 2 \text{ i.}}$

0.5 pt **b)** Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(F)$ En effectuant la division euclidienne du polynôme $z^3+2(1-i)z^2+\left(1+m^2-4i\right)z-2i\left(1+m^2\right)$ sur le polynôme $(z-2i)$ l'équation $(F)$ devient ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} &(z-2i)\left(z^2+2z+1+m^2\right)=0 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \text{ou bien} & z=2i \\ \text{ou bien} & z=-1+im \\ \text{ou bien} & z=-1-im \end{cases} \end{aligned}}$$

## Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$
On considère les deux points : $A(-1+im)$ et $B(-1-im)$
Soient $\Omega$ le milieu du segment $[AB]$, $A'$ le milieu du segment $[OB]$ et $B'$ le milieu du segment $[OA]$
La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme $A$ en $P(p)$, La rotation de centre $A'$ et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme $B$ en $Q(q)$ et La rotation de centre $B'$ et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme $O$ en $R(r)$

1.5 pt **1 -** Montrons que : $p=-1+m \quad , \quad q=\frac{1-i}{2}(-1-im) \quad$ et $\quad r=\bar{q}$

$$\Omega = \text{milieu}[AB] \quad \Leftrightarrow \quad z_{\text{Q}} = \frac{z_A + z_{\text{B}}}{2} = -1$$

$$r_1(A) = p \quad \Leftrightarrow \quad \left(z_p - z_n\right) = e^{\frac{-iz}{2}}\left(z_A - z_\Omega\right)$$

$$\Leftrightarrow \text{p} + 1 = -\text{i}(-1 + \text{im} + 1)$$

$$\Leftrightarrow p = m - 1$$

$$A' = \text{milieu}[OB] \quad \Leftrightarrow \quad z_{A'} = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{-1 - im}{2}$$

$$r_2(B) = Q \quad \Leftrightarrow \quad \left(z_Q - z_{A'}\right) = e^{\frac{-it}{2}}\left(z_B - z_{A'}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(q + \frac{1}{2} + \frac{im}{2}\right) = i\left(-1 - im + \frac{1}{2} + \frac{im}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad q = i - m - \frac{i}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2} - \frac{im}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{i}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} - \frac{im}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{2}(i - m - 1 - im)$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{2}(-i(-1 - im) - 1 - im)$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{2}(1 - i)(-1 - im)$$

$$B' = \text{milieu}[OA] \quad \Leftrightarrow \quad z_{B'} = \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{-1 + im}{2}$$

$$r_3(O) = R \quad \Leftrightarrow \quad \left(z_R - z_{B'}\right) = e^{\frac{-ii}{2}}\left(z_D - z_{B'}\right)$$

$$\Leftrightarrow r + \frac{1}{2} - \frac{im}{2} = -i\left(\frac{1}{2} - \frac{im}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{i}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} + \frac{im}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2}(-i - m - 1 + im)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}(i(-1 + im) - 1 + im)$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2}(i + 1)(-1 + im)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad r = \tfrac{1}{2}\overline{(1 - i)}\,\overline{(-1 - im)} = \bar{q}}$$

0.25 pt **2 - a)** Vérifions que : $q - r = -ip$
$D'$ abord $\text{Im}(q) = \frac{1-m}{2}$ ; facile a prouver

$$\boxed{\begin{aligned} D' \text{ où } : \quad q - r &= q - \bar{q} = 2i\,\text{Im}(q) = 2i\left(\frac{1-m}{2}\right) \\ &= i - im = -i(-1 + m) = -ip \end{aligned}}$$

0.5 pt **b)** Déduisons que : $OP = QR$ et que les deux droites $(OP)$ et $(QR)$ sont orthogonales.
On $a \left(\frac{z_q - z_R}{z_p - z_o}\right) = \frac{q-r}{p} = \frac{-ip}{p} = -i = e^{\frac{-ix}{2}}$

$$\text{Ainsi} \ : \begin{cases} \left|\frac{z_Q - z_Q}{z_P - z_O}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_Q - z_{\tilde{R}}}{z_P - z_O}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \left|z_F - z_O\right| = \left|z_Q - z_{\tilde{R}}\right| \\ (\overline{OP}; \overline{RQ}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} QR = OP \\ (OP) \perp (QR) \end{cases}}$$

## Exercice 4 : (4 pts)

### PARTIE I

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = [0,1]$ par $f(x) = x\ln(2-x)$ et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1 -**

0.75 pt **a)** Montrons que $f$ est dérivable sur $I$ et que : $\forall x \in I; \quad f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$

La fonction $u : [0,1] \mapsto [1,2]$ est dérivable sur $[0,1]$

$$x \mapsto (2-x)$$

Car c'est un polynôme.

La fonction $v : ]0,+\infty[ \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^+$ D'après le cours. $x \mapsto \ln x$

On remarque que $u([0,1]) = [1,2] \subset ]0,+\infty[$. Donc la composition $v \circ u(x) = \ln(2-x)$ est dérivable sur l'intervalle $[0,1]$.

D'où $x \mapsto x\ln(2-x)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme étant produit de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $[0,1]$.

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= (x\ln(2-x))' \\ &= x(\ln(2-x))' + \ln(2-x) \\ &= \frac{-x}{2-x} + \ln(2-x) \quad ; \quad \forall x \in [0,1] \end{aligned}}$$

0.5 pt **b)** Montrons que la fonction dérivée $f'$ est strictement décroissante sur $I$

La fonction $f'(x)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme étant somme de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $[0,1]$.

$$f''(x) = \frac{-1}{2-x} - \left(\frac{2-x+x}{(2-x)^2}\right) = \frac{x-4}{(2-x)^2}$$

On remarque que $\forall x \in [0,1] : f^*(x) < 0$

Donc $f'$ est strictement décroissante sur $I$.

0.75 pt **c)** Montrons qu'il existe un unique réel $\alpha \in ]0;1[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

On a $f'$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle I (décroissante).

Alors $f' : [0,1] \mapsto [-1, \ln 2]$ est une bijection.

C-à-d : $(\forall y \in [-1;\ln 2])(\exists! x \in [0,1]) : f'(x) = y$

C-à-d : (pour $0\epsilon[-1;\ln 2]$)$(\exists!\alpha \in [0,1])$ : $f'(\alpha)=0$

Comme : $f'(0)=\ln 2$ et $f'(1)=-1$.

$$\begin{aligned} f'(\alpha)=0 &\Leftrightarrow \ln(2-\alpha)-\frac{\alpha}{2-\alpha}=0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2-\alpha)=\frac{\alpha}{2-\alpha} \\ &\Leftrightarrow \alpha\ln(2-\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha} \\ &\boxed{f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha}} \end{aligned}$$

**0.75 pt** **2 - a)** Étudions les variations de $f$, puis donner son tableau de variations.

Soit $x \in [0,1]$

$$\text{Si } x \geq \alpha \left| \begin{array}{l} \Rightarrow f'(x) \leq f'(\alpha) \text{ car } f' \text{ est décroissante sur} I \\ \Rightarrow f'(x) \leq 0 \text{ car } f'(\alpha)=0 \\ \Rightarrow f \text{ est décroissante sur } [\alpha,1]. \end{array}\right.$$

$$\text{Si } x \leq \alpha \left| \begin{array}{l} \Rightarrow f'(x) \geq f'(\alpha) \text{ car } f' \text{ est décroissante sur } I \\ \Rightarrow f'(x) \geq 0 \text{ car } f'(\alpha)=0 \\ \Rightarrow f \text{ est croissante sur } [0,\alpha]. \end{array}\right.$$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$ | $\searrow$ | $0$ |

**0.5 pt** **b)** Montrons que la courbe $(C)$ est concave.

On a montrer que $f''(x)$ est négative :

$$\forall x \in I ; f''(x)<0$$

$\boxed{\text{Donc la courbe } (c) \text{ est concave.}}$

**0.5 pt** **c)** Montrons que : $(\forall t \in I),(\forall x \in I)$; $\quad f(x) \leq f'(t)(x-t)+f(t)$

Soient $x$ et $t$ deux éléments de $t$ tels que $x < t$

$$f \text{ est continue } \text{sur}[x,t] \subset [0,1]$$
$$\Rightarrow \exists c \epsilon ]x,t\Big[ \quad ; \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(c)$$
$$c\epsilon]x,t[ \Rightarrow c \leq t$$
$$\Rightarrow f'(c) \geq f'(t); \text{ car } f' \text{ est } \searrow \text{ sur } 1$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right) \geq f'(t)$$
$$\Rightarrow f(x) \leq (x-t)f'(t) + f(t)(*)$$

**0.5 pt** **d)** Déduisons que : $(\forall x \in I)$; $\quad f(x) \leq x \ln 2$ et $f(x) \leq -x+1$

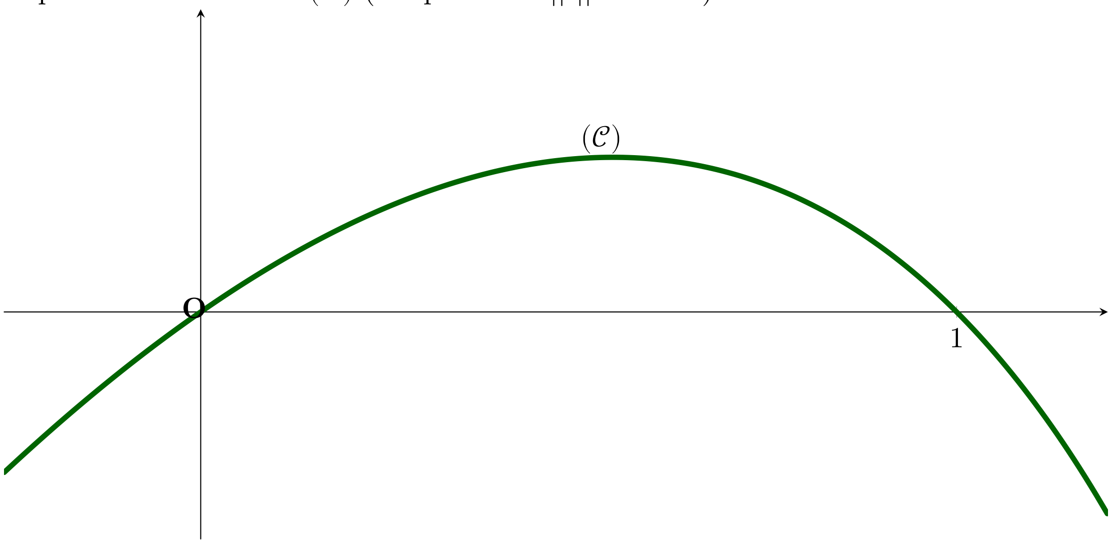
Pour $t = 0$ l'inégalité (*) devient :

$$f(x) \leq x f'(0) + f(0)$$
$$c - \text{a} - d \quad : \quad f(x) \leq x \ln 2$$

Pour $t = 1$ l'inégalité $(*)$ devient :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \leq (x-1)f'(1) + f(1) \\ c-a-d : f(x) \leq 1-x \end{array}}$$

**0.5 pt** **3 -** Représentons la courbe $(C)$ (On prendra : $||\vec{i}|| = 2$ cm )




**0.è5 pt** **4 -** Calculons , en cm$^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C)$ et les droites d'équations respectives : $x=0, x=1$ et $y=0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^1 |f(x)| dx \quad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_0^1 \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(2-x)}_{v} dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln(2-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(\frac{-1}{2-x}\right) dx \\
&= 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2-x}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-x-2+\frac{4}{2-x}\right) dx \\
&= \frac{-1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [x] - 2\int_0^1 \left(\frac{-1}{2-x}\right) dx \\
&= \frac{-1}{4} - 1 - 2[\ln|2-x|]_0^1 \\
&= \frac{-1}{4} - 1 - 2(-\ln 2) \\
&= \left(\frac{8\ln 2 - 5}{4}\right) \|\|^2 \\
&= \left(\frac{8\ln 2 - 5}{4}\right) (4 \text{ cm}^2) \\
&\boxed{= (8\ln 2 - 5)\text{cm}^2}
\end{aligned}$$

**Remarque :**

On effectuant la division euclidienne de $x^2$ par $(2-x)$ pour justifier l'identité suivante :

$$\left(\frac{x^2}{2-x}\right) = \left(-x-2+\frac{4}{2-x}\right)$$

## Partie II

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

On considère la fonction $f_n$ définie sur $I=[0,1]$ par : $f_b(x) = x'' \ln(2-x)$

**0.5 pt** **1 - a)** Vérifions que $f_n$ est positive sur $I$ et que $f_n(0) = f_n(1)$

$$x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 0 \leq x^n \leq 1; \forall n \geq 2 \\ \text{et bien } 1 \leq 2-x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^* \leq 1 \\ 0 \leq \ln(2-x) \leq \ln 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^* \ln(2-x) \leq \ln 2$$

$$f_n(x) \geq 0$$

$$\boxed{\text{Et Encore : } \begin{cases} f_n(0) = 0^* \cdot \ln(2-0) = 0 \\ f_n(1) = 1^* \cdot \ln(2-1) = 0 \end{cases}}$$

**0.5 pt** **b)** Montrons qu'il existe au moins $\alpha_n \in ]0,1[$ tel que : $f_n'(\alpha_n) = 0$

La fonction $f_n(x)$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$ et dérivable sur l'intervalle $]0,1[$ comme étant produit de deux fonctions continues et dérivables sur $I$ .

Et on a $f_n(0) = f_n(1)$ donc d'après le théorème de Rolle : $\boxed{\exists \alpha_n \epsilon ]0,1[: \quad f_n'(\alpha_n) = 0}$

**0.75 pt** **2 - a)** Montrons que $f_n$ est dérivable sur $I$ et que : $\forall x \in I; \quad f_n'(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où :

$$g_n(x) = n\ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

La fonction $f_n$ est dérivable sur l'intervalle $I$ comme étant produit de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $I$.

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (x^n \ln(2-x)) \\ &= nx^{x-1} \cdot \ln(2-x) - \frac{x^n}{2-x} \\ &= x^{n-1}\left(n\ln(2-x) - \frac{x}{2-x}\right) \\ &\boxed{= x^{n-1} \cdot g_n(x)} \end{aligned}$$

**0.5 pt** **b)** Montrons que la fonction $g_n$ est strictement décroissante sur $I$

$$g_n'(x) = \frac{-n}{2-x} - \left(\frac{2-x+x}{(2-x)^2}\right)$$
$$= \frac{-n(2-x)-2}{(2-x)^2}$$
$$= nx - 2n - 2$$

$$x \in I \left| \begin{array}{ll} \Rightarrow & x \leq 1 \\ \Rightarrow & nx \leq n \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow nx - 2n - 2 \leq n - 2n - 2$$

$$\Rightarrow nx - 2n - 2 \leq -(n+1) < 0$$

$$\Rightarrow nx - 2n - 2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{nx-2n-2}{(2-x)^2} < 0$$

$$\Rightarrow g_n'(x) < 0$$

$$\boxed{\Rightarrow g_n \text{ est décroissante sur } I}$$

0.5 pt **c)** Déduisons que $\alpha_n$ est unique.

Comme $g_n$ est continue et étant strictement décroissante alors $g_n : [0,1] \mapsto [-1; n\ln 2]$ est une bijection de $[0,1]$ vers son image $[-1, n\ln 2]$ avec $g_n([0,1]) = [-1; n\ln 2]$ d'où selon la définition de la bijection on écrit :

$(\forall y \in [-1; n\ln 2])$. $(\exists! x \in [0,1])$ : $g_n(x) = y$ (pour $0 \in [-1; n\ln 2]), (\exists! \alpha_n \in [0,1])$ : $g_n(\alpha_n) = 0$

$$\left| \begin{array}{l} \Leftrightarrow (\alpha_n)^{n-1} \cdot g_n(\alpha_n) = 0 \\ \boxed{\Leftrightarrow \quad f_n'(\alpha_n) = 0} \end{array} \right.$$

**3 - a)** On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie.

1 pt

- Montrons que : $\forall n \geq 2$; $f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}, \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$, en déduire que : $\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

$$f_n'(\alpha_n) = 0 \left| \begin{array}{ll} \Leftrightarrow & g_n(\alpha_n) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(2-\alpha_n) - \frac{\alpha_n}{2-\alpha_n} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \ln(2-\alpha_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_n}{2-\alpha_n}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad (\alpha_n)^n \cdot \ln(2-\alpha_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}\right) \\ & \boxed{\Leftrightarrow \quad f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}\right)} \end{array} \right.$$

- **En déduire que** $\lim_{+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$ **:**

$$\alpha_n \epsilon ]0,1[; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \quad 0 < \alpha_n < 1 \text{ et } 0 < \alpha_{n+1} < 1$$
$$\Rightarrow 1 < (2-\alpha_n) < 2 \text{ et } |\alpha_{n+1}| < 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2-a_n} < 1 \text{ et } |\alpha_{n+1}| < 1$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{2-\alpha_n}\right| < 1 \text{ et } |\alpha_{n+1}| < 1$$
$$\Rightarrow \left|\frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_n}\right| < 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left|\frac{a_{n+1}}{2-\alpha_n}\right| < \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow |f_n(a_n)| < \left(\frac{1}{n}\right)$$
$$comme \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$
$$\boxed{\Rightarrow \quad \lim_{+\infty} f_n(\alpha_n) = 0}$$

1 pt

- Montrons que : $\forall n \geq 2 \quad g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

$$g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (n+1)\ln(2-\alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_{n+1}} = 0$$
$$\Leftrightarrow (n+1)\ln(2-\alpha_{n+1}) = \frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_{n+1}}$$

On a :

$$g_n(\alpha_{n+1}) = n\ln(2-\alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_{n+1}}$$
$$= n\ln(2-\alpha_{n+1}) - (n+1)\ln(2-\alpha_{n+1})$$
$$\boxed{= -\ln(2-\alpha_{n+1})}$$

- **En déduire que $(\alpha_n)_{n\gg 2}$ est strictement croissante :**

$$\text{D'abord } \begin{aligned} g_n(\alpha_{n+1}) - g_n(\alpha_n) &= -\ln(2-\alpha_{n+1}) - 0 \\ &= -\ln(2-\alpha_{n+1}) \end{aligned}$$

$\alpha_{n+1} \in ]0,1[ \Rightarrow \alpha_{n+1} < 1 \Rightarrow -\alpha_{n+1} > -1$

$\Rightarrow \quad 2-\alpha_{n+1} > 1$

$\Rightarrow \ln(2-a_{n+1}) > 0$

$\Rightarrow -\ln(2-\alpha_{n+1}) < 0$

$\Rightarrow g_n(\alpha_{n+1}) - g_n(\alpha_n) < 0$

$\Rightarrow g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow g_n^{-1}(g_n(\alpha_{n+1})) < g_n^{-1}(g_n(\alpha_n))$

Car $g_n$ est une bijection décroissant sur $[0,1]$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} > \alpha_n; \forall n \geq 2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad (\alpha_n)_{n\gg 2} \text{ est une suite croissante}}$$

**0.25 pt** — Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite convergente car croissante et étant majorée par 1.

$$\text{car } 0 < a_n < 1 \; \boxed{\text{ainsi } \lim(a_n) = l}$$

**0.5 pt** — Montrons que $\lim_{n\to 4\infty} \alpha_n = 1$

On $a = 0 < a_n < 1$ Alors par passage aux limites : $0 < \ell < 1$ Comme $f_n$ est continue sur $[0,1]$. Alors : $\lim_{n\infty} f_n(\alpha_n) = f_n(\lim_{n\infty}(\alpha_n)) = f_n(\ell) = 0$ (c-ò-d intervertir les signes lim et $f_n$ )

$$\boxed{\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ell^n \ln(2-\ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2-\ell) = 0 \text{ car } \ell \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 1 \end{aligned}}$$

## Partie III

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $J_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

**0.75 pt** **1 -** Montrons que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

$$\begin{aligned}
x \in [0,1] \Rightarrow \quad & x \leq 1 \\
& \Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 1 \leq (2-x) \leq 2 \\ \text{et bien } x \cdot x^n \leq x^n \text{ car } x^n > 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 0 \leq \ln(2-x) \leq \ln 2 \\ \text{et bien } x^{n+1} \leq x^n \end{cases} \\
& \Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \cdot \ln(2-x) \leq x^n \cdot \ln(2-x) \\
& \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{n+1} \cdot \ln(2-x) dx \leq \int_0^1 x^n \cdot \ln(2-x) dx
\end{aligned}$$

Car la continuité est vérifiée et $0 < 1$ garde le sens de l'inégalité inchangée.

$$\Rightarrow \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

La suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est une suite décroissante en plus elle est minorée par 0 donc convergente .

**0.5 pt** **2 -** En utilisant une intégration par parties, montrons que : $I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 f_n(x) dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n}{v^n(x)} \cdot \frac{\ln(2-x)}{u(x)} dx \\
&= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(2-x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \left( \frac{-1}{2-x} \right) dx \\
&= 0 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left( \frac{x^{n+1}}{2-x} \right) dx \\
&= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left( \frac{x^{n+1}}{2-x} \right) dx
\end{aligned}$$

**0.75 pt** **3 -** Montrons que : $(\forall n \geq 2); \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

$$0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 2 - x > 1 \\ \text{et bien } x^{n+1} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } 0 < \left(\frac{1}{2-x}\right) < 1 \\ \text{et bien } 0 < x^{n+1} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 0dx \leq \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right) dx \leq \int_0^1 1dx$$

La continuité est vérifié et $0 < 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right) dx \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{2-x}\right) dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

La continuité est vérifié et $0 < 1$.

- **En déduire que** $\lim_{+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$ **:**

  On a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

  comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n = 0$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normale** juin 2021

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé ;

✓ L'usage de la couleur rouge ln'est pas autorisé ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***L'épreuve comporte 3 exercices indépendants.***

***Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.***

— Exercice 1 : **Problème d'Analyse** ........................................ **12 points**
— Exercice 2 : **Nombres Complexes** ........................................ **4 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** ................................................ **4 points**

## Exercice 1 : (12 pts)

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

*(on prend $\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 1cm$)*

**Partie I :**

0.5 pt **1 - a)** Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f_n(x) - nx + 2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet, en $-\infty$, une asymptote $(\Delta_n)$ dont on déterminera une équation cartésienne.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f_n'(x) = \frac{-2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} + n$$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; \dfrac{4\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \leq 1$.

**c)** En déduire le sens de variations de $f_n$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt *(On distinguera les deux cas : $n = 0$ et $n \geq 1$)*

0.5 pt **3 - a)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au point $I$ d'abscisse 0.

0.5 pt **b)** Montrer que le point $I$ est le seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

0.5 pt **4 -** Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

**5 -** Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_n)$ et les droites d'équations respectives : $y = nx - 2$ , $x = 0$ et $x = t$

0.5 pt **a)** Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$

0.5 pt **b)** Calculer $\lim_{t\to+\infty} A(t)$

**Partie II :**

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = f_0(u_n)$$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; |f_0'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |\alpha|$.

0.5 pt **c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\alpha$.

**Partie III :**

On suppose dans cette partie que $n$ est un entier tel que $n \geq 2$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n$ solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad 0 < x_n < 1$.

$$\left( \textit{On prendra} \quad \frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} < 1.47 \right)$$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad f_{n+1}(x_n) > 0$

0.5 pt **b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

0.5 pt **c)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad \dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right)$.

0.5 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ , puis montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n x_n = 1$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\quad x_n \leq x_2$

0.5 pt **b)** En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n$.

## Exercice 2 : (4 pts)

Soient $a$ , $b$ et $c$ trois nombres complexes non nuls tel que : $a + b \neq c$

0.5 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$

$$(E) \ : \ z^2 - (a+b+c)\, z + c\,(a+b) = 0$$

0.5 pt **b)** On suppose dans cette question que : $a = \mathrm{i}$ , $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$

Ecrire les deux solutions de l'équation $(E)$ sous forme exponentielle.

**2 -** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les trois points $A\,(a)$ , $B\,(b)$ et $C\,(c)$ qu'on suppose non alignés.

Soient $P\,(p)$ le centre de rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme $B$ en $A$ , et $Q\,(q)$ le centre de rotation d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ qui transforme $C$ en $A$ , et $D\,(d)$ le milieu du segment $[BC]$.

1 pt **a)** Montrer que : $2p = b + a + (a-b)\,\mathrm{i}$ et $2q = c + a + (c-a)\,\mathrm{i}$

0.5 pt **b)** Calculer : $\dfrac{p-d}{q-d}$

0.5 pt **c)** En déduire la nature du triangle $PDQ$

**3 -** Soient $E$ le symétrique de $B$ par rapport à $P$ et $F$ le symétrique de $C$ par rapport à $Q$ et $K$ le milieu du segment $[EF]$.

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe de $K$ est $k = a + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\,(c-b)$.

0.5 pt **b)** Montrer que les points $K$ , $P$ , $Q$ et $D$ sont cocycliques.

## Exercice 3 : (4 pts)

**Partie I :** On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ 47x - 43y = 1$

0.25 pt **1 -** Vérifier que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de l'équation $(E)$.

0.75 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E)$.

**Partie II :** On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F)\ :\ x^{41} \equiv 4\ [43]$.

**1 -** Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation $(F)$.

0.5 pt **a)** Montrer que $x$ et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1\ [43]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $4x \equiv 1\ [43]$, en déduire que : $x \equiv 11\ [43]$.

0.5 pt **2 -** Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $(F)$.

**Partie III :** On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant $(S)\ :\ \begin{cases} x^{41} \equiv 4\ [43] \\ x^{47} \equiv 10\ [47] \end{cases}$.

**1 -** Soit $x$ une solution du système $(S)$.

0.5 pt **a)** Montrer que $x$ est solution du système $(S')\ :\ \begin{cases} x \equiv 11\ [43] \\ x \equiv 10\ [47] \end{cases}$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $x \equiv 527\ [2021]$ *(On pourra utiliser la partie* I *).*

0.5 pt **2 -** Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système $(S)$.

FIN

ROYAUME DU MAROC

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : NORMAL 2021**

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (12 pts)

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{-2e^x}{1+e^x} + nx$

### PARTIE I

0.5 pt **1 - a)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - nx + 2)$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - nx + 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2e^x}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} + 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{1+\dfrac{1}{e^x}} + 2 = 0.$

$\left(\text{Car } \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0\right)$

D'où la droite d'équation $y = nx - 2$ est une asymptote oblique de la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **b)** Montrons que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet, en $-\infty$, une asymptote $(\Delta_n)$ dont on déterminera une équation cartésienne.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (f_n(x) - nx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2e^x}{1+e^x} = 0.$

Donc la droite $(\Delta_n)$ d'équation $y = nx$ est une asymptote oblique de la courbe $(C_n)$ au voisinage de $-\infty$.

0.5 pt **2 - a)** Montrons que la fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ ; $f_n'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n.$

Comme les deux fonctions : $x \to e^x$ et $x \to e^x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et comme $(\forall x \in \mathbb{R})$ $e^x + 1 \neq 0$ alors la fonction $x \to \dfrac{-2e^x}{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (rapport de deux fonctions dérivables)

Et comme la fonction $x \to nx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de deux fonctions dérivables).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -2\frac{(e^x)'(1+e^x)-(1+e^x)'e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= -2\frac{e^x(1+e^x)-e^xe^x}{(1+e^x)^2}+n \\ &= \frac{-2e^x+e^{2x}-e^{2x}}{(1+e^x)^2}+n \\ &= \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}+n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } (\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \quad f_n'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}+n.}$$

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1.$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1-\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} &= \frac{1+2e^x+(e^x)^2-4e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1-2e^x+(e^x)^2}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1+2e^x+(e^x)^2-4e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1-2e^x+(e^x)^2}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2} \end{aligned}$$

Et comme $(\forall x \in \mathbb{R}) : \dfrac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2} \geq 0$, alors $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ 1-\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \geq 0.$

$$\boxed{\text{Par suite } \quad \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

**0.5 pt** **c)** Déduisons le sens de variations de $f_n$ sur $\mathbb{R}$. *(On distinguera les deux cas : $n=0$ et $n \geq 1$)*

Pour $n=0$, on a $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ f_0'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0,$

$\boxed{\text{par suite } f_0 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$

Pour $n \geq 1$. D'après la question 2.$b$ on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} \geq -\dfrac{1}{2}$

Par suite $\quad f_n'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2}+n \geq n-\dfrac{1}{2} > 0 \qquad (\text{ car } n \geq 1).$

$\boxed{\text{Donc } f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

**0.5 pt** **3 - a)** Déterminons l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au point $I$ d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ au point $I(0,-1)$ est donnée par : $y = f_n'(0)(x-0)+f_n(0)$

c.à.d. $\boxed{y = \left(n-\dfrac{1}{2}\right)x-1.}$ $\quad \left( \text{car} \quad f_n'(0) = n-\dfrac{1}{2} \ \text{ et } \ f_n(0) = -1 \right)$

**0.5 pt** **b)** Montrons que le point $I$ est le seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables $\left(x \mapsto -2e^x \text{ et } x \mapsto (1+e^x)^2 \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, (1+e^x)^2 \neq 0\right)$.

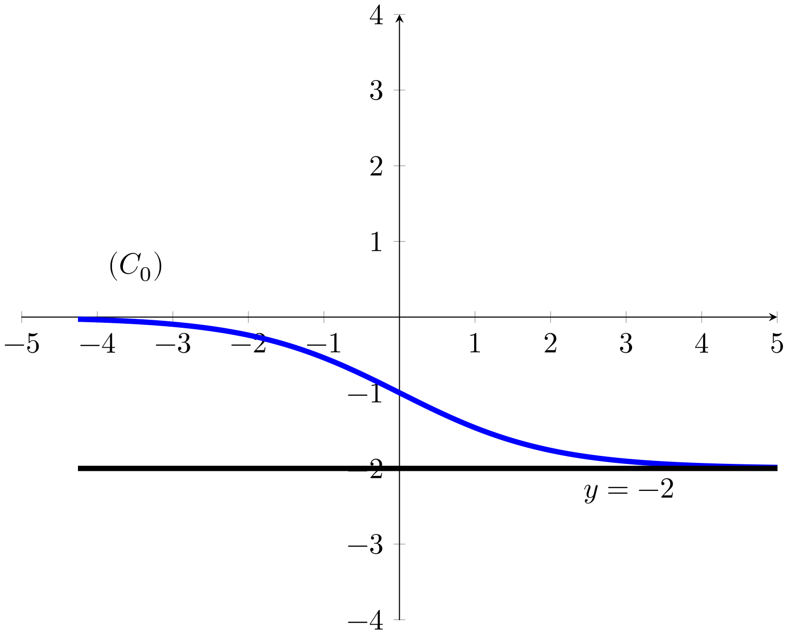
Donc la fonction $f_n'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

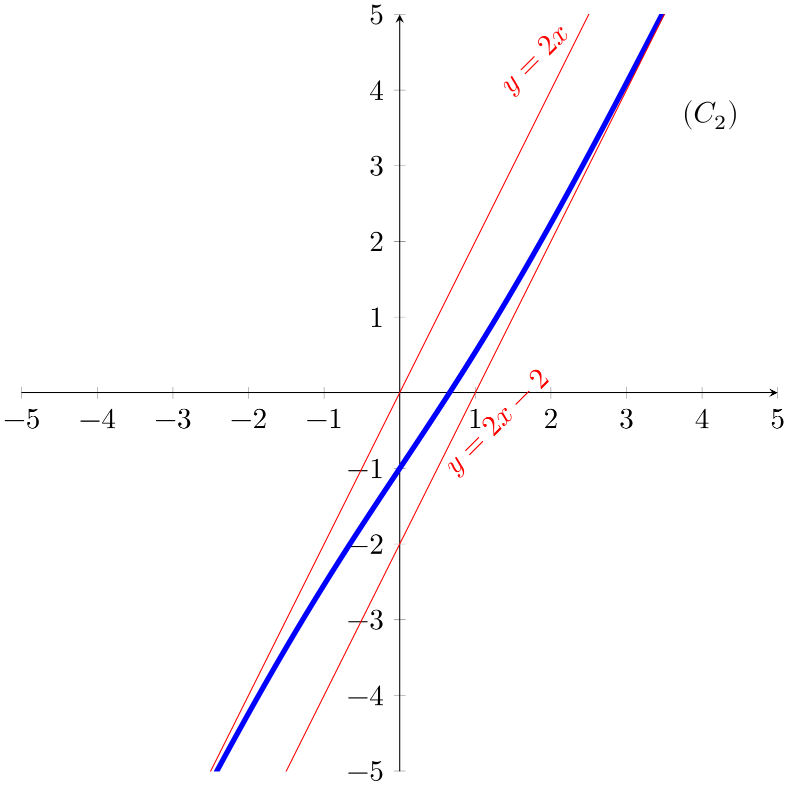
$$\begin{aligned} f_n''(x) &= \frac{-2e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)(-2e^x)}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{-2e^x(1+e^x)(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} \end{aligned}$$

Comme $(\forall x \in \mathbb{R}) : \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^3} > 0$ alors le signe de $f_n''(x)$ est celui de $e^x - 1$,
et comme $e^x - 1$ s'annule seulement en $0$ en changeant de signe ,

$\boxed{\text{alors } (\mathcal{C}_n) \text{ admet un unique point d'inflexion qui est le point } I(0,-1).}$

**0.5 pt** **4 -** Représentation graphique de $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_2)$ :






**5 -** Pour tout réel $t>0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_n)$ et les droites d'équations respectives : $y=nx-2$ , $x=0$ et $x=t$

**0.5 pt**

**a)** Calculons $A(t)$ pour tout $t>0$

On a pour tout $t>0$, : $A(t)=\displaystyle\int_0^t \Big|f_n(x)-(nx-2)\Big|dx \quad u.a$ avec $\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|=1cm^2$

Et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)-nx+2=\dfrac{1}{1+e^x}$, par suite $f_n(x)>nx-2$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^t (f_n(x)-nx+2))\,dx &= \int_0^t\left(\frac{-2e^x}{1+e^x}+2\right)dx\\ &= 2\int_0^t\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx\\ &= 2\left[x-\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^t\\ &= 2\left(t-\ln\left(1+e^t\right)+\ln 2\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } t>0,\ \ A(t)=2\left(t-\ln\left(1+e^t\right)+\ln 2\right)cm^2}$$

**0.5 pt** **b)** Calculons $\lim_{t \to +\infty} A(t)$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} A(t) &= \lim_{t \to +\infty} 2\left(t - \ln\left(1+e^{t}\right) + \ln 2\right) \\
&= \lim_{t \to +\infty} 2\left(t - \ln\left(e^{t}\left(1+e^{-t}\right)\right) + \ln 2\right) \\
&= \lim_{t \to +\infty} 2\left(t - t - \ln\left(1+e^{-t}\right) + \ln 2\right) \\
&= 2\ln 2 \qquad \left( car \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 \text{ et } \ln 1 = 0\right)
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{t \to +\infty} A(t) = 2\ln 2$ .

## Partie II

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_0(u_n) \qquad (\forall n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

**0.5 pt** **1 - a)** Montrons que l'équation $f_0(x) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f_0(x) - x$.

Comme la fonction $f_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $h$ l'est aussi, et on a,

$(\forall x \in \mathbb{R}) : h'(x) = f_0'(x) - 1 = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} - 1 < 0$.

Donc $h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

D'où $h$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $h(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x \to +\infty} h(x), \lim_{x \to -\infty} h(x)\right[ = ]-\infty, +\infty[$

Et comme $0 \in \mathbb{R}$ alors $(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) : h(\alpha) = 0$ c.à.d. $(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) : f_0(\alpha) = \alpha.$

**0.5 pt** **b)** Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) : |f_0'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : |f_0'(x)| = \left|\dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2}\right| = \dfrac{1}{2}\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2}$, et comme $(\forall x \in \mathbb{R}) : \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R}) : |f_0'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

**0.5 pt** **2 - a)** Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) :$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

<u>1^er^ cas</u> : Si $u_n = \alpha$ alors $u_{n+1} = f_0(\alpha) = \alpha$ donc $|u_{n+1} - \alpha| = 0$ et $\dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| = 0$, d'où l'inégalité est triviale.

<u>2^éme^ cas</u> : En appliquant l'inégalité des accroissement finis à la fonction $f_0$ entre $u_n$ et $\alpha$ on en déduit que $|f_0(u_n) - f_0(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

**0.5 pt** **b)** Déduisons que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

Pour $n = 0$, on a $\left|u_0 - \alpha\right| = |0 - \alpha| = |\alpha|$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |\alpha| = |\alpha|$, donc $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |\alpha|$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |\alpha|$.

On a d'après la question précédente : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ et comme selon l'hypothèse de la récurrence : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |\alpha|$.

Par suite, d'après le principe de la récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$.

**0.5 pt** **c)** Montrons que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

Comme $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha| = 0 \quad ($ car $0 \leq \frac{1}{2} \langle 1$ $)$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$. Ainsi on en déduit que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.

## Partie III

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$.

**0.5 pt** **1 - a)** Montrons que $(\exists! x_n \in \mathbb{R})$ tel que : $\quad f_n(x_n) = 0$.

On a $f_n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f_n(\mathbb{R}) = ]\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)[= \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors $(\exists! x_n \in \mathbb{R}) : f_n(x_n) = 0$

**0.5 pt** **b)** Montrons que $0 < x_n < 1$.

$f_n(0) = -1 < 0, \quad f_n(x_n) = 0, \;$ et $\; f_n(1) = \frac{-2e}{1+e} + n = \frac{(n-2)e + n}{1+e} > 0.$

Donc $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$ et comme $f_n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $0 < x_n < 1$.

**0.5 pt** **2 - a)** Montrons que $f_{n+1}(x_n) > 0$

On a $f_{n+1}(x_{n+1}) = \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + (n+1)x_n = \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx_n + x_n = f_n(x_n) + x_n = x_n$ ( car $f_n(x_n) = 0$ ) et comme $x_n > 0$, alors $f_{n+1}(x_{n+1}) > 0$

**0.5 pt** **b)** Déduisons la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

On a $f_{n+1}(x_{n+1}) > 0$ et Comme $f_{n+1}(x_n) = 0$ et alors $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$

Puisque $f_{n+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $x_n > x_{n+1}$, et ceci pour tout $n \geq 2$.

Par suite, la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

**0.5 pt** **c)** Montrons que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente .

Comme la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et comme elle est minorée par 0 alors elle est convergente .

**0.5 pt** **3 - a)** Montrons que $(\forall n \geq 2); \quad \frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$

Ona $\quad f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx^n = 0 \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{n} \times \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} \Leftrightarrow x_n = \frac{-1}{n} f_0(x_n).$

La fonction $f_0$ est strictement décroissante sur $]0;1[$, donc

$$0 < x_n < 1 \Rightarrow \frac{-2e}{1+e} < f_0(x_n) < -1,$$

Par suite :

$$\boxed{\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right).}$$

**0.5 pt** **b)** Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$.

On a $(\forall n \geq 2)$; $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right)$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right) = 0$

alors $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

On a : $(\forall n \geq 2) : f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow nx_n = \dfrac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et la fonction $x \to \dfrac{2e^x}{1+e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0,

$$\boxed{\text{alors } \lim_{n\to+\infty} nx_n = \frac{2e^0}{1+e^0} = \frac{2}{2} = 1.}$$

**0.5 pt** **4 - a)** Montrons que $(\forall n \geq 2) : x_n \leq x_2$

Comme la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante alors elle est majorée par son premier terme $x_2$. $\boxed{\text{D'où } (\forall n \geq 2) : x_n \leq x_2.}$

**0.5 pt** **b)** Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n$.

**0.5 pt** Comme $(\forall n \geq 2)$; $0 < x_n \leq x_2$. alors, on a : $(\forall n \geq 2)$; $0 < (x_n)^n \leq (x_2)^n$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_2)^n = 0$ (car $0 < x_2 < 1$), $\boxed{\text{alors } \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0.}$

## Exercice 2 : (4 pts)

Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{C}^*)^3$ tel que $a+b \neq c$. On considère l'équation :

$$(E) : z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$$

**0,5 pt** **1 - a)** On Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

On remarque que :

$$\begin{aligned} z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0 &\Leftrightarrow z^2 - ((a+b)+c)z + c(a+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z-(a+b))(z-c) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = a+b \text{ ou } z = c \end{aligned}$$

D'où l'équation $(E)$ admet dans **C** deux racines distinctes qui sont : $a+b$ et $c$.

$$\boxed{\text{Donc : } S = \{a+b; c\}}.$$

**0,5 pt**

**b)** On suppose dans cette question que : $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$.

Ecrivons les deux solutions sous forme exponentielle :

On a :

$$\begin{aligned}
c &= i - e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}}{2}\right)} \left( e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}\right)} \right) \\
&= e^{i\frac{5\pi}{12}} \left( e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right) \\
&= 2i \sin\frac{\pi}{12} e^{i\frac{5\pi}{12}} \\
&= 2\sin\frac{\pi}{12} e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 2\sin\frac{\pi}{12} e^{i\frac{11\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{12} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. alors $\sin\frac{\pi}{12} > 0$. $\boxed{\text{Donc : } c = 2\sin\frac{\pi}{12} e^{i\frac{11\pi}{12}}}$

On a aussi

$$\begin{aligned}
a + b &= i + e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}}{2}\right)} \left( e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}\right)} \right) \\
&= e^{i\frac{5\pi}{12}} \left( e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}} \right) \\
&= 2i \cos\frac{\pi}{12} e^{i\frac{5\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{12} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. alors $\cos\frac{\pi}{12} > 0$. $\boxed{\text{Donc : } a + b = 2\cos\frac{\pi}{12} e^{i\frac{5\pi}{12}}}$

**2 -** On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points : $A(a), B(b)$ et $C(c)$. On suppose que ces trois points sont non alignés. On considère les rotations : $\mathcal{R}_1 = r\left(P(p), \frac{\pi}{2}\right), \mathcal{R}_2 = r\left(Q(q), -\frac{\pi}{2}\right)$ tels que $\mathcal{R}_1(B) = A$ et $\mathcal{R}_2(C) = A$. Soit $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$.

**1 pt** **a)** Montrons que : $2p = b + a + (a-b)i$ et que $2q = c + a + (c-a)i$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1(B) = A &\Leftrightarrow a - p = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-p) \\
&\Leftrightarrow a - p = i(b-p) \\
&\Leftrightarrow -p + ip = ib - a \\
&\Leftrightarrow p(-1+i) = ib - a \\
&\Leftrightarrow p(-1+i)(-1-i) = (ib-a)(-1-i) \\
&\Leftrightarrow 2p = -ib + b + a + ia \\
&\Leftrightarrow 2p = b + a + i(a-b)
\end{aligned}$$

D'où $2p = b + a + i(a-b).$

De même, on $a$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_2(C) = A &\Leftrightarrow a - q = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-q) \\
&\Leftrightarrow a - q = -i(c-q) \\
&\Leftrightarrow q + iq = ic + a \\
&\Leftrightarrow q(1+i) = ic + a \\
&\Leftrightarrow q(1+i)(1-i) = (ic+a)(1-i) \\
&\Leftrightarrow 2q = ic + c + a - ia \\
&\Leftrightarrow 2q = c + a + i(c-a)
\end{aligned}$$

D'où $2q = c + a + i(c-a).$

**0,5 pt** **b)** Calculons : $\dfrac{p-d}{q-d}$

On a $d = \dfrac{b+c}{2}$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{p-d}{q-d} &= i-e^{i\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{p-\frac{b+c}{2}}{q-\frac{b+c}{2}}\\ &= \frac{2p-(b+c)}{2q-(b+c)}\\ &= \frac{b+a+(a-b)i-(b+c)}{c+a+(c-a)i-(b+c)}\\ &= \frac{a-c+(a-b)i}{a-b-(a-c)i}\\ &= \frac{i(a-b-(a-c)i)}{a-b-(a-c)i}\\ &= i\end{aligned}$$

D'où $\dfrac{p-d}{q-d}=i.$

0,5 pt **c)** Déduisons la nature du triangle $PDQ$

Comme $\dfrac{p-d}{q-d}=i$ alors $\left|\dfrac{p-d}{q-d}\right|=|i|=1$ et $\arg\left(\dfrac{p-d}{q-d}\right)\equiv \arg(i)[2\pi]$

c.à.d. $DP=DQ$ et $(\overrightarrow{DQ},\overrightarrow{DP})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où le triangle $PDQ$ est isocèle et rectangle en $D$.

**3 -** On $a$ : $E=S_P(B), F=S_Q(C)$ et $K$ est le milieu de $[EF]$.

0,5 pt **a)** Montrons que $k=a+\dfrac{i}{2}(c-b)$

- $K$ est le milieu de $[EF]$ alors $k=\dfrac{e+f}{2}$
- $P$ est le milieu de $[EB]$ alors $p=\dfrac{e+b}{2}$
- $Q$ est le milieu de $q=\dfrac{c+f}{2}$

d'où $2p=e+b$ et $2q=f+c$

Par suite

$$\begin{aligned}k &= \frac{2p-b+2q-c}{2}\\ &= \frac{\cancel{b}+a+(a-b)i-\cancel{b}+\cancel{k}+a+(c-a)i-\cancel{k}}{2}\\ &= \frac{2a+(c-b)i}{2}\\ &= a+\frac{i}{2}(c-b)\end{aligned}$$

D'où $k = a + \frac{i}{2}(c-b)$.

0,5 pt **b)** Montrons que les points $K$ , $P$ , $Q$ et $D$ sont cocycliques.

Comme $PDQ$ est un triangle alors les points $P$, $D$ et $Q$ ne sont pas alignés, et comme :

$$\frac{p-d}{q-d} \div \frac{p-k}{q-k} = i \div \frac{p-k}{q-k}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{p-k}{q-k} &= \frac{2p-2k}{2q-2k}\\ &= \frac{b+a+(a-b)i-2a-i(c-b)}{c+a+(c-a)i-2a-i(c-b)}\\ &= \frac{b-a+(a-c)i}{c-a+i(b-a)}\\ &= -i\end{aligned}$$

Alors $\quad \frac{p-d}{q-d} \div \frac{p-k}{q-k} = i \div (-i) = -1 \in \mathbb{R}$.

Par suite les points $K, P, Q$ et $D$ sont cocycliques.

## Exercice 3 : (4 pts)

### Partie I

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) \quad : 47x - 43y = 1$

0,25 pt **1 -** Vérifions que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de $(E)$.

On a : $47 \times 11 - 43 \times 12 = 517 - 516 = 1$, donc le couple $(11, 12)$ est bien une solution particulière de $(E)$. Et d'après le théorème de Bezout on en déduit que $47 \wedge (-43) = 1$.

0,75 pt **2 -** Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E)$.

Comme $(11, 12)$ est une solution particulière de $(E)$, alors l'ensemble de ses solutions est :

$$S = \left\{ \left( 11 - \frac{-43k}{47 \wedge (-43)}, 12 + \frac{47k}{47 \wedge (-43)} \right) / k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ (11 + 43k, 12 + 47k) / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

### Partie II

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F) \quad : x^{41} \equiv 4[43]$

0,5 pt **1 - a)** Montrons que $x$ et 43 sont premiers entre eux,puis déduisons que : $x^{42} \equiv 1\,[43]$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de $(F)$. Posons $x \wedge 43 = d$ et montrons que $d = 1$

On a :

$$x^{41} \equiv 4[43] \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{Z}) : x^{41} - 4 = 43k$$
$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{Z}) : x^{41} - 43k = 4$$

Comme $x \wedge 43 = d$ alors $d/x$ et $d/43$, donc $d/\left(x^{41} - 43k\right)$ c.à.d $d/4$, d'où $d = 1$ ou $d = 2$ ou $d = 4$ Et comme $d/43$ et 43 impair alors on a nécessairement $d = 1$. Et par suite $x \wedge 43 = 1$. Comme 43 est premier et $x \wedge 43 = 1$

alors d'après le théorème de Fermat : $x^{42} \equiv 1[43]$

**0,5 pt** **b)** • Montrons que $4x \equiv 1[43]$

Comme $x^{41} \equiv 4[43]$ alors $x^{41}.x \equiv 4x[43]$ c.à.d $x^{42} \equiv 4x[43]$

Et comme $x^{42} \equiv 1[43]$, alors $1 \equiv 4x[43]$, par suite : $4x \equiv 1[43]$.

• Déduisons que $x \equiv 11[43]$

Comme $4x \equiv 1[43]$ et $44 \equiv 1[43]$ alors $4x \equiv 44[43]$ c.à.d $43/4(x-11)$ et comme $43 \wedge 4 = 1$ alors D'après le théorème de Gauss $43/(x-11)$, par suite $x \equiv 11[43]$.

**0,5 pt** **2 -** Déterminons l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $(F)$.

On a montré que $x \in \mathbb{Z}$ une solution de $(F)$ implique que $x \equiv 11[43]$, donc l'ensemble des solutions de $(F)$ est contenu dans l'ensemble $\{11 + 43k/k \in \mathbb{Z}\}$.

Réciproquement, si $x \equiv 11[43]$ alors $x^{41} \equiv 11^{41}[43]$, et comme $11 \times 11^{41} = 11^{42}$ et 43 premier et premier avec 11 alors d'après le théorème de Fermat $11 \times 11^{41} \equiv 1[43]$ et comme $44 \equiv 1[43]$ alors $11 \times 11^{41} \equiv 44[43]$ $11^{41} \equiv 4[43]$ et par suite $x^{41} \equiv 4[43]$, c.à.d $x$ est solution de $(F)$. D'où l'ensemble des solutions de $(F)$ est $\{11 + 43k/k \in \mathbb{Z}\}$.

## Partie III

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant $(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases}$.

**1 -** Soit $x$ une solution de $(S)$.

**0,5 pt** **a)** Montrons que $x$ est solution du système $(S') : \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases}$

Dans la question 2) on a montré que $x^{41} \equiv 4[43] \Leftrightarrow x \equiv 11[43]$

donc il reste à montré que $x^{47} \equiv 10[47] \Leftrightarrow x \equiv 10[47]$.

La relation $x^{47} \equiv 10[47]$ implique nécéssairement que $47 \wedge x = 1$

En appliquant le petit théorème de Fermet, il en résulte que $x^{46} \equiv 1[47]$.

Ainsi $x^{46} \equiv 1[47] \Rightarrow 10x^{46} \equiv 10[47] \Rightarrow x^{46}(x-10) \equiv 0[47] \Rightarrow x - 10 \equiv 0[47]$.

Par suite les deux systèmes $(S)$ et $(S')$ sont équivalents.

**0,5 pt** **b)** Déduisons que $x \equiv 527[2021]$.

On a $527 = 43 \times 12 + 11$ et $527 = 47 \times 11 + 10$, donc $527 \equiv 11[43]$ et $527 \equiv 10[47]$

Donc

$$\begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 527[43] \\ x \equiv 527[47] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 43/x - 527 \\ 47/x - 527 \end{cases} \Leftrightarrow 43 \times 47/x - 527$$

(car $43 \wedge 47 = 1$ )

D'où

$$\begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases} \Leftrightarrow 2021/x - 527 \Leftrightarrow x \equiv 527[2021] \qquad (\text{puisque } 43 \times 47 = 2021\ )$$

**0,5 pt**

**2 -** Déterminons l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système $(S)$.

Comme le système $(S)$ est équivalent à l'équation $x \equiv 527\ [2021]$, alors l'ensemble des solutions du système est $(S)$ est $\{527 + 2021k/k \in \mathbb{Z}\}$.

.

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage** juin 2021

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
✓ L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
✓ L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Analyse** ........ **8 points**
— Exercice 2 : **Analyse** ........ **4 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** ........ **4 points**
— Exercice 4 : **Arithmétique** ........ **4 points**

## Exercice 1 : ( 8 pts )

**Partie I :**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = ]-\infty;1[$ par : $f(x) = \ln(1-x)$

Soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $f$ est continue sur $I$

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction $f$ est strictement décroissante sur $I$

0,75 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

0,5 pt **d)** Interpréter graphiquement les résultats obtenus

0,25 pt **e)** Donner le tableau de variations de $f$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la courbe $(C)$ est concave.

0,25 pt **b)** Représenter graphiquement la courbe $(C)$ dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que $f$ est une bijection de $I$ vers $\mathbb{R}$

On note $f^{-1}$ sa bijection réciproque.

0,25 pt **b)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

0,25 pt **c)** Vérifier que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$

**Partie II :**

Pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ , il existe un unique réel $x_n \in ]0;1[$ tel que : $P_n(x_n) = 1$

0,5 pt **2 -** Déterminer le réel $\alpha = x_2$ et vérifier que : $0 < \alpha < 1$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n) > 1$

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

0,25 pt **c)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \in ]0;\alpha]$

0,25 pt **d)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

**4 -** pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $f_n(x) = f(x) + P_n(x)$

0,5 pt **a)** Montrer que : $\Big(\forall x \in I\Big)$ ; $\Big(\forall n \geq 2\Big)$ $f_n'(x) = \dfrac{-x^n}{1-x}$

0,25 pt **b)** Montrer que : $\Big(\forall x \in [0;\alpha]\Big)$ ; $\Big(\forall n \geq 2\Big)$ $\Big|f_n'(x)\Big| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **c)** En déduire que : $\Big(\forall x \in [0;\alpha]\Big)$ ; $\Big(\forall n \geq 2\Big)$ $|f_n(x)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **d)** Montrer que : $\Big(\forall n \geq 2\Big)$ $|f(x_n) + 1| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **e)** En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to +\infty} x_n$

## Exercice 2 : (4 pts)

On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

**0,5 pt** **1 - a)** Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de $x$

**1 pt** **b)** Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

**0,5 pt** **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

**0,5 pt** **b)** Calculer $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$

**3 -** On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)$$

**0,5 pt** **a)** Vérifier que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}F\left(\frac{k}{n}\right)$

**0,5 pt** **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

## Exercice 3 : (4 pts)

$m$ est un nombre complexe différent de 2 et de $-\mathrm{i}$

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct$(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(E)\ :\ z^2-(m-\mathrm{i})z-\mathrm{i}m=0$$

**0,5 pt** **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation $(E)$ est $(m+\mathrm{i})^2$

**0,5 pt** **b)** Déterminer $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de $(E)$

**0,75 pt** **c)** Sachant que $m=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$, écrire le nombre $z_1+z_2$ sous forme exponentielle.

**2 -** On considère les points $A$, $B$ et $M$ d'affixes respectifs 2, $-\mathrm{i}$ et $m$ et soit $M'$ le symétrique de $M$ par rapport à l'axe imaginaire.

**0,5 pt** **a)** Déterminer en fonction de $m$ l'affixe de $M'$

**0,75 pt** **b)** Déterminer en fonction de $m$ l'affixe du point $N$ tel que le quadrilatére $ANMB$ soit un parallélogramme.

**1 pt** **c)** Montrer que les deux droites $(AM)$ et $(BM')$ sont perpendiculaires si et seulement si $\Re e\Big((2-i)m\Big)=\Re e(m^2)$

## Exercice 4 : (4 pts)

Soit $a$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$

Soit $p$ un nombre premier impair tel que : $p$ divise $A$

**1 pt** **1 - a)** Montrer que $a^7 \equiv 1[p]$, en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $a^{7n} \equiv 1[p]$

**1 pt** **b)** Montrer que $a$ et $p$ sont premiers entre eux, en déduire que : $(\forall m \in \mathbb{N})$ ; $a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$

**2 -** On suppose que 7 ne divise pas $p-1$

**0,5 pt** **a)** Montrer que : $a \equiv 1[p]$

**0,5 pt** **b)** En déduire que : $p = 7$

**1 pt** **3 -** Montrer que si $p$ un nombre premier impair tel que : $p$ divise $A$, alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$

FIN

R O Y A U M E D U M A R O C

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : RATTRAPAGE 2021**

## MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (8 pts)

### PARTIE I

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I = ]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \ln(1-x)$$

Soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

0,25 pt **1 - a)** Montrons que la fonction $f$ est continue sur $I$ :

Comme la fonction $f_1 : x \mapsto 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$, (Car c'est une fonction polynomiale) et $f_2 : x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$

De plus $\forall x \in ]0, +\infty[ : 1-x \in I = ]-\infty, 1[$

Donc $\boxed{f = f_2 \circ f_1 \text{ est continue sur } I.}$

0,25 pt **b)** Montrons que la fonction $f$ est strictement décroissante sur $I$ :

Comme $f_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = -1$, $f_2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f_2'(x) = \dfrac{1}{x}$

De plus $\forall x \in ]0, +\infty[ : 1-x \in I = ]-\infty, 1[$

Alors $f = f_2 \circ f_1$ est dérivable sur $I$, et on a :

pour tout $x$ de $I$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_2 \circ f_1)'(x) \\ &= f_2'(f_1(x)) \times f_1'(x) \\ &= \frac{1}{1-x} \times (-1) \\ &= \frac{-1}{1-x} \\ &= \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

Par siute $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Etudions le signe de $f'$ sur $I$ :

On a : $\forall x \in I$ :

$$\begin{aligned} x < 1 &\Leftrightarrow x - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} < 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $x$ de $I$ : $f'(x) < 0$

D'où $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } I}$

**0,75 pt** **c)** • Calculons $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ :

On a : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \ln(1-x)$

On pose $t = 1 - x$, alors $x = 1 - t$, et lorsque $x \to 1^-$, $t \to 0^+$.

Par suite

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty}$

• Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ :

On pose $t = 1 - x$, alors $x = 1 - t$, et lorsque $x \to -\infty$, $t \to +\infty$.

Par suite

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \ln(1-x) \\ &= \lim_{t \to +\infty} \ln t \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.}$

• Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ :

On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{x} \\ &= 0 \times (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$ (avec $t = 1 - x$)

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x} = -1$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0}$

**0,5 pt** **d)** Interprétons graphiquement les résultats obtenus :

• On a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, alors :

La droite$(\Delta)$ d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe $(C)$.

• On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors :

La courbe $(C)$ admet une branche parabolique vers l'axe $(Ox)$ au voisinage de $-\infty$.

**0,25 pt** **e)** Donnons le tableau de variation de $f$ :

D'aprés ce qui précède, on obtient le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$          $1$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow -\infty$ |

**0,25 pt** **2 - a)** Montrons que la courbe $(C)$ est concave :

La fonction $f$ est dérivable sur $I$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{1-x}$ pour tout $x$ de $I$, et $f'$ est dérivable sur $I$ (car c'est une fonction rationnelle) et on a pour tout $x$ de $I$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-1}{1-x}\right)' \\ &= \frac{-1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Donc $f''(x) < 0$ pour tout $x$ de $I$.

D'où la courbe $(C)$ est concave.

**0,25 pt** **b)** Représentons graphiquement la courbe $(C)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ :

**Remarques :**

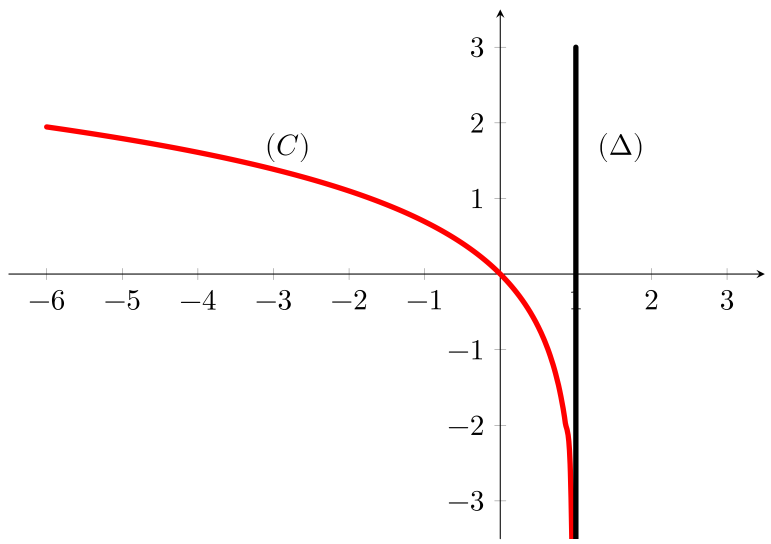
— Les points remarquable :

On a : $f(0) = \ln(1-0) = \ln 1 = 0$, donc $(C)$ coupe l'axe $(Ox)$ en $(0, 0)$.

— la fonction $f$ est strictement décroissante.

— La droite $(\Delta)$ d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe $(C)$.

— La courbe $(C)$ admet une branche parabolique vers l'axe $(Ox)$ au voisinage de $-\infty$.




**0,25 pt** **3 - a)** Montrons que $f$ est une bijection de $I$ vers $\mathbb{R}$ :

On a $f$ est continue et est strictement décroissante sur $I$, alors elle constitue une bijection entre $I$ et l'intervalle $f(I)$, et on a $f(I) = \left]\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$ (car f est décroissante).

Donc $f(I) = ]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

D'où $\boxed{f \text{ est une bijection de } I \text{ vers } \mathbb{R}.}$

On note $f^{-1}$ sa bijection réciproque

**0,25 pt** **b)** Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ :

On a la fonction $f$ est bijective

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $f^{-1}(x) = y$, donc $y \in I$ et $f(y) = x$, on a :

$$\begin{aligned} f(y) = x &\Leftrightarrow \ln(1-y) = x \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(1-y)} = e^x \\ &\Leftrightarrow 1 - y = e^x \\ &\Leftrightarrow y = 1 - e^x \end{aligned}$$

Donc la fonction réciproque de $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{f^{-1}(x) = 1 - e^x}$

**0,25 pt** **c)** Vérifions que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$ :

On a $f^{-1}(x) = 1 - e^x$ pour tout $x$ de $I$, donc pour $x = -1$ : $\boxed{f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}.}$

## Partie II

Pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on posee :

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n}$$

**0,5 pt** **1 -** Montrons que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in ]0,1[$ tel que :

$$P_n(x_n) = 1$$

La fonction $p_n$ est continue sur $[0,1]$ (car c'est une fonction polynomiale).

La fonction $p_n$ est dérivable sur $]0,1[$ (car c'est une fonction polynomiale).

Et $P_n(0) = 0 < 1$ et $P_n(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1$

et comme $(\forall x \in ]0,1[)$ : $P'_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1}$

Donc $P'_n(x) > 0$ $(\forall x \in ]0,1[)$

Par suite la fonction $P_n$ est strictement croissante sur $]0,1[$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$\boxed{\text{il existe un unique réel } x_n \in ]0,1[ \text{ tel que } : P_n(x_n) = 1.}$

**0,5 pt** **2 -** • Déterminons le réel $\alpha = x_2$ :

On a :

$$\begin{aligned}
P_2(x_2) = 1 &\Rightarrow x_2 + \frac{x_2^2}{2} = 1 \\
&\Rightarrow x_2^2 + 2x_2 = 2 \\
&\Rightarrow x_2^2 + 2x_2 + 1 = 3 \\
&\Rightarrow (x_2+1)^2 = 3 \\
&\Rightarrow x_2 + 1 = \sqrt{3} \text{ ou } x_2 + 1 = -\sqrt{3} \\
&\Rightarrow x_2 = -1 + \sqrt{3} \text{ ou } x_2 = -1 - \sqrt{3} \\
&\Rightarrow x_2 = -1 + \sqrt{3} \text{ car } (0 < x_2 < 1)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\alpha = x_2 = -1 + \sqrt{3}}$

• vérifions que : $0 < \alpha < 1$

On a $0 < -1 + \sqrt{3} < 1$ car $1 < \sqrt{3} < 2$

Alors $\boxed{0 < \alpha < 1}$

**0,5 pt** **3 - a)** Montrons que : pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n) > 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ :

On a

$$(\forall x \in ]0,1[) : \; P_{n+1}(x) = x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Alors

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x_n) &= x_n + \frac{x_n^2}{2} + ... + \frac{x_n^n}{n} + \frac{x_n^{n+1}}{n+1} \\
&= P_n(x_n) + \frac{x_n^{n+1}}{n+1} \\
&= 1 + \frac{x_n^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

Comme $x_n \in ]0,1[$ alors $1 + \frac{x_n^{n+1}}{n+1} > 1$

Finalement : $\boxed{(\forall n \geq 2)\, P_{n+1}(x_n) > 1}$

**0,5 pt** **b)** En déduisons que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq 2)$ :

On a $P_{n+1}(x_n) > 1$ et $P_{n+1}(x_{n+1}) = 1$, alors $P_{n+1}(x_n) > P_{n+1}(x_{n+1})$.

Et comme la fonction $P_{n+1}$ est strictement croissante sur $]0,1[$ et que $(x_n, x_{n+1}) \in (]0,1[)^2$, alors :$x_n > x_{n+1}$

Ainsi $(\forall n \geq 2) : \; x_n > x_{n+1}$

Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geq 2} \text{ est strictement décroissante}}$

**0,25 pt** **c)** Montrons que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \in ]0, \alpha]$

D'aprés la question 1) on a $(\forall n \geq 2)$ :$x_n > 0$

Et la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante

Alors : $(\forall n \geq 2)$ : $x_n < x_{n-1} < x_{n_2} < ... < x_2$

Donc $(\forall n \geq 2) : x_n \leq x_2$, par suite $(\forall n \geq 2) : 0 < x_n \leq \alpha$ (car $\alpha = x_2$)

Finalement $\boxed{(\forall n \geq 2) : x_n \in ]0, \alpha].}$

**0,25 pt** **d)** Montrons que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente :

- la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante
- On a $(\forall n \geq 2) : 0 < x_n$, c-à-d la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est minorée par 0

Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geq 2} \text{ est convergente}}$

**4 -** Pour tout réel $x$ de $I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$f_n(x) = f(x) + P_n(x)$$

**0,5 pt** **a)** Montrons que : $(\forall x \in I) ; (\forall n \geq 2) \quad f_n'(x) = \dfrac{-x^n}{1-x}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$

On a $f_n = f + P_n$, la fonction $f_n$ est dérivable sur $I$ entant que somme de deux fonctions dérivables sur $I$, et on a pour tout $x$ de $I$ :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= f'(x) + P_n'(x) \\ &= \frac{(1-x)'}{1-x} + 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} \\ &= \frac{-1}{1-x} + 1 \times \frac{1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{-1+1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{-x^n}{1-x} \end{aligned}$$

( car $1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$ est une suite géométrique de raison $r = x$)

Donc $\boxed{(\forall x \in I) ; (\forall n \geq 2) \quad f_n'(x) = \dfrac{-x^n}{1-x}}$

**0,25 pt** **b)** Montrons que : $(\forall x \in [0, \alpha]) ; (\forall n \geq 2) \quad |f_n'(x)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $x \in [0, \alpha]$

On a :

$$|f_n'(x)| = |\frac{-x^n}{1-x}| = \frac{x^n}{1-x}$$

( Car $x^n \geq 0$ et $1 - x > 0$)

Or $0 \leq x \leq \alpha < 1$ donc $0 \leq x^n \leq \alpha^n < 1$ et $1 \leq \dfrac{1}{1-x} \leq \dfrac{1}{1-\alpha}$

Donc $\dfrac{x^n}{1-x} \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

D'où $\boxed{(\forall x \in [0, \alpha])(\forall n \geq 2) : |f_n'(x)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}}$

**0,5 pt** **c)** Déduisons que : $(\forall x \in [0, \alpha]) ; (\forall n \geq 2) \quad |f_n(x)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $x \in [0, \alpha]$

• Si $x = 0$ :

$$\begin{aligned} |f_n(0)| &= |f(0) + P_n(0)| \\ &= |0 + 0| \\ &= 0 \end{aligned}$$

et on a bien $0 \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

• Si $x > 0$ :

$f_n$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$

et $(\forall t \in ]0, x[) : |f_n'(t)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

d'après le théorème des inégalités des acroissement finis :

$$(\forall (a, b) \in [0, x]^2) : |f_n(a) - f_n(b)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|a - b|$$

pour $a = 0$ et $b = x$ on aura :

$$\begin{aligned} &|f_n(x) - f_n(0)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x - 0| \\ &\Rightarrow |f_n(x) - 0| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x|. \text{ (car } f_n(0) = P_n(0) + f(0) = 0) \\ &\Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}x \text{ (car } 0 \leq x) \end{aligned}$$

Comme $0 \leq x \leq \alpha < 1$ alors $\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}x < \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

Par suite $|f_n(x)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

Finalemen $\boxed{(\forall x \in [0, \alpha])\,;\,(\forall n \geq 2) \quad |f_n(x)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}}$

**0,5 pt** **d)** Montrons que :$(\forall n \geq 2) \;\; |f(x_n) + 1| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$

On a d'après la question 3- c) $x_n \in [0, \alpha]$ et d'après la question 4- d) $|f(x_n)+1| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

Or

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &= f(x_n) + P_n(x_n) \\ &= f(x_n) + 1 \quad (\text{car } P_n(x_n) = 1) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\forall n \geq 2) \;\; |f(x_n) + 1| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}}$

**0,5 pt** **e)** Déduisons la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

D'une part, on a $n \geq 2$ : $|f(x_n) + 1| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$.

Et comme $0 < \alpha < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} = \dfrac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n = 0$

Par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = -1$

D'autre part, la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente et $(\forall n \geq 2) : \; 0 < x_n < \alpha$

Alors il existe $l \in [0, \alpha] / \lim_{n\to+\infty} x_n = l$

Et comme la fonction $f$ est continue sur $I = ]-\infty, 1[$ et $l \in I$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(l)$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -1 &\Rightarrow f(l) = -1\\ &\Rightarrow l = f^{-1}(-1)\\ &\Rightarrow l = 1 - e^{-1}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1 - e^{-1}}$

## Exercice 2 : (4 pts)

On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Déterminons le signe de $F(x)$ en fonction de $x$ :

Puisque la fonction $t \mapsto e^{t-\frac{t^2}{2}}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors,

soit $x \in \mathbb{R}$

- Si $x > 0$ : $F(x) > 0$.
- Si $x < 0$ : $F(x) < 0$.

Et comme $F(0) = \displaystyle\int_0^0 e^{t-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 0$

on en déduit le tableau de signe de $F$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

1 pt **b)** Montrons que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons sa dérivée première $F'(x)$ :

Comme la fonction $\phi : t \mapsto e^{t-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ ;

$F$ n'est autre que la primitive de $\phi$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Donc $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R})\ F'(x) = \phi(x) = e^{x-\frac{x^2}{2}}}$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrons que :

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Posons $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= F(x) \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) &= x \\ v'(x) &= F'(x) \end{cases}$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x &= [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 xF'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= F(1) - \int_0^1 xe^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 e^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 xe^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x}$.

**0,5 pt**

**b)** Calculons $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$ : On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (x-\frac{x^2}{2})'e^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[e^{x-\frac{x^2}{2}}\right]_0^1\\ &= e^{\frac{1}{2}} - e^0\\ &= \sqrt{e}-1\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{e}-1}$

**3 -** On considère la suite $(u_n)_{n\leq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)$$

**0,5 pt**

**a)** Vérifions que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in \{0; 2; ...; n-1\}$

On sait que $F$ est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{x-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right)-(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

D'où $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*)\, u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)}$

**0,5 pt** **b)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\, u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in \{0; 2; ...; n-1\}$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right) &= \sum_{k'=1}^{n}(n-(k'-1))F\left(\frac{k'}{n}\right) \quad \text{(en prenant } k'=k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)F\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{(en retournant à k)} \end{aligned}$$

D'après la question 3- a) on aura : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) :\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right)}$

**0,5 pt** **c)** Déduisons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminons sa limite :

$F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ; donc $F$ est continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier continue sur $[0,1]$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ est convergente.}}$ est sa limite est égale à $\boxed{\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{e}-1}$

## Exercice 3 : (4 pts)

$m$ est un nombre complexe différent de 2 et de $-i$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(E) : z^2 - (m-i)z - im = 0$$

**0,5 pt** **1 - a)** Vérifions que le discriminant de l'équation $(E)$ est $(m+i)^2$ :

On a

$$\begin{aligned}\Delta &= (m-i)^2 - 4\times 1\times(-im)\\ &= m^2 - 2im - 1 + 4im\\ &= m^2 + 2im - 1\\ &= (m+i)^2\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Delta = (m+i)^2}$.

**0,5 pt** **b)** Déterminons $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de $(E)$ :

Comme $\Delta > 0$, alors l'équation $(E)$ admet deux solution $z_1$ et $z_2$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{(m-i)+\sqrt{\Delta}}{2}\\ &= \frac{(m-i)+(m+i)}{2}\\ &= \frac{2m}{2}\\ &= m\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}z_2 &= \frac{(m-i)-\sqrt{\Delta}}{2}\\ &= \frac{(m-i)-(m+i)}{2}\\ &= \frac{-2i}{2}\\ &= -i\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = \{m; -i\}}$

**0,75 pt** **c)** Sachant que $m = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ; écrirons le nombre $z_1 + z_2$ sous forme exponentielle :

On sait que

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$$

Alors

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= m - i \\ &= e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &= e^{\frac{i}{2}(\frac{\pi}{8}+\frac{-\pi}{2})}\left(e^{\frac{i}{2}(\frac{\pi}{8}-\frac{-\pi}{2})} + e^{-\frac{i}{2}(\frac{\pi}{8}-\frac{-\pi}{2})}\right) \\ &= e^{\frac{i}{2}(\frac{\pi-4\pi}{8})}\left(e^{\frac{i}{2}(\frac{\pi+4\pi}{8})} + e^{\frac{-i}{2}(\frac{\pi+4\pi}{8})}\right) \\ &= e^{i(\frac{-3\pi}{16})}\left(e^{i(\frac{5\pi}{16})} + e^{-i(\frac{5\pi}{16})}\right) \\ &= e^{-i\frac{3\pi}{16}}\left(2\cos\frac{5\pi}{16}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{5\pi}{16}\right)e^{-i\frac{3\pi}{16}} \end{aligned}$$

Et comme $0 < \frac{5\pi}{16} < \frac{\pi}{2}$, alors $2\cos\left(\frac{5\pi}{16}\right) > 0$

D'où $\boxed{z_1 + z_2 = 2\cos\left(\frac{5\pi}{16}\right)e^{-i\frac{3\pi}{16}} \text{ est une forme exponentielle de } z_1 + z_2}$

**2 -** On considère les points $A$, $B$ et $M$ d'affixes respectives 2, $-i$ et $m$ et soit $M'$ le symétrique de $M$ par rapport à l'axe imaginaire.

**0,5 pt** **a)** Déterminons en fonction de $m$ l'affixe de $M'$ :

Si $M(x, y)$ (avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), alors $M'(-x, y)$.

par suite :

$$\begin{aligned} z_{M'} &= -x + iy \\ &= -(x - iy) \\ &= -(\overline{z_M}) \\ &= -\overline{m} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'affixe du point } M' \text{ est } z_{M'} = -\overline{m}}$

**0,75 pt** **b)** Déterminons en fonction de $m$ l'affixe du point $N$ tel que le quadrilatère $ANM'B$ soit un parallélogramme :

$ANM'B$ est un parallélogramme signifie que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM'}$. et on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM'} &\Leftrightarrow z_N - 2 = -\overline{m} - (-i) \\ &\Leftrightarrow z_N = 2 + i - \overline{m} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'affixe du point } N \text{ est } z_N = 2 + i - \overline{m}}$

**1 pt** **c)** Montrons que les deux droites $(AM)$ et $(BM')$ sont perpendiculaires si et seulement si

$Re((2-i)m) = Re(m^2)$ :

On $(AM)$ et $(BM')$ sont perpendiculaires signifie que $\dfrac{z'_M - z_B}{z_M - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

par suite :

$$\begin{aligned}
\frac{z'_M - z_B}{z_M - z_A} \in i\mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \frac{-\overline{m}+i}{m-2} \in i\mathbb{R}^* \\
&\Leftrightarrow \frac{-\overline{m}+i}{m-2} = -\left(\overline{\frac{-\overline{m}+i}{m-2}}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{-\overline{m}+i}{m-2} = \frac{m+i}{\overline{m}-2} \\
&\Leftrightarrow (-\overline{m}+i)(\overline{m}-2) = (m-2)(m+i) \\
&\Leftrightarrow -\overline{m}^2 + i\overline{m} + 2\overline{m} - 2i = m^2 + im - 2m - 2i \\
&\Leftrightarrow m^2 + \overline{m}^2 = (2-i)m + (2+i)\overline{m} \\
&\Leftrightarrow m^2 + \overline{m}^2 = (2-i)m + \overline{(2-i)m} \\
&\Leftrightarrow \frac{m^2 + \overline{m}^2}{2} = \frac{(2-i)m + \overline{(2-i)m}}{2} \\
&\Leftrightarrow Re(m^2) = Re((2-i)m)
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{(AM) \perp (BM') \Leftrightarrow Re((2-i)m) = Re(m^2)}$

## Exercice 4 : (4 pts)

Soit $a$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$.

Soit $p$ un nombre premier positif tel que : $p$ divide $A$.

1 pt **1 - a)** • Montrons que $a^7 \equiv 1[p]$ :

On a :

$$\begin{aligned}
a^7 - 1 &= (a-1)(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \\
&= (a-1)A
\end{aligned}$$

Comme $p/A$ alors $p/(a-1)A$ (car $(a-1) \in \mathbb{Z}$ )

D'où $p/a^7 - 1$ c-à-d $a^7 - 1 \equiv 0[p]$

D'où $\boxed{a^7 \equiv 1[p]}$

• Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}\,;\, a^{7n} \equiv 1[p]$ :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a^7 \equiv 1[p]$

Comme $(a^7, 1) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, alors $(a^7)^n \equiv 1^7[p]$

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : a^{7n} \equiv 1[p]}$

**1 pt** **b)** • Montrons que $a$ et $p$ sont premiers entre eux :

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \wedge p = d$

On a

$$\begin{aligned} a \wedge p = d &\Rightarrow d/a \text{ et } d/p \\ &\Rightarrow d/a^7 \text{ et } d/pk,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow d/(a^7 - pk),\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} a^7 \equiv 1[p] &\Rightarrow a^7 = 1 + pk,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow a^7 - pk = 1,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow d/1 \\ &\Rightarrow d = 1 \text{ car } d \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow a \wedge p = 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{a \text{ et } p \text{ sont premiers entre eux}}$

• Déduisons que $\forall m \in \mathbb{N}\,;\ a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$ :

Soit $m \in \mathbb{N}$

On a $a \wedge p = 1$ et $p$ un nombre premier, donc d'après le théorème de Fermat :

$$a^{p+1} \equiv 1[p]$$

et comme $(a^{p-1}; 1) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, alors $a^{(p-1)m} \equiv 1^m[p]$.

D'où $\boxed{a^{(p-1)m} \equiv 1[p]}$

**2 -** On suppose que 7 ne divse pas $p - 1$

**0,5 pt** **a)** Montrons que : $a \equiv 1[p]$ :

On a 7 ne divise pas $p-1$, donc $7 \wedge (p-1) = 1$ (car 7 un nombre premier).

Donc d'après le théorème de Bezout :

$$\exists (n,m) \in \mathbb{Z}^2 : \; 7n + (p-1)m = 1$$

$\bullet$ Si $n, m \in \mathbb{Z}^-$ :

Alors $7n \leq 0$ et $(p-1)m \leq 0$, donc $7n + (p+1)m \leq 0$.

Impossible. Car $7n + (p-1)m = 1 > 0$.

$\bullet$ Si $n, m \in \mathbb{N}^*$ :

Alors $7n \geq 7$ et $(p-1)m \geq 1$, car $p$ un nombre premier positif. Donc $7n+(p-1)m \geq 7+1$.

Impossible. Car $7n + (p-1)m = 1 < 7+1$.

$\bullet$ Si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}^-$ :

Alors

$$\begin{aligned} 7n + (p-1)m = 1 &\Rightarrow 7n = 1 - (p-1)m \\ &\Rightarrow 7n = 1 + (p-1)(-m) \end{aligned}$$

On aura donc : $a^{7n} = a^{1+(p-1)(-m)}$ c-à-d $a^{7n} = a \times a^{(p-1)(-m)}$

et comme $(n, -m) \in \mathbb{N}^2$, donc d'après la question 1- a) et 1-b) on a :

$1 \equiv a \times 1[p]$ donc $a \equiv 1[p]$

$\bullet$ Si $n \in \mathbb{Z}^-$ et $m \in \mathbb{N}$ :

Alors

$$\begin{aligned} 7n + (p-1)m = 1 &\Rightarrow (p-1)m = 1 - 7n \\ &\Rightarrow (p-1)m = 1 + 7(-n) \end{aligned}$$

On aura donc :$a^{(p-1)m} = a^{1+7(-n)}$ c-à-d $a^{(p-1)m} = a \times a^{7(-n)}$

et comme $(m, -n) \in \mathbb{N}^2$, donc d'après la question 1- a) et 1-b) on a :

$1 \equiv a \times 1[p]$ donc $a \equiv 1[p]$

Conclusion : $\boxed{a \equiv 1[p]}$

**0,5 pt** **b)** Déduisons que : $p = 7$

D'après la question précédente on a $a \equiv 1[p]$, alors $A \equiv 7[P]$

(car $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$)

Or $p$ divise $A$, par suite $p$ divise 7 et comme 7 et $P$ deux nombres premiers Donc $\boxed{p = 7}$

**1 pt** **3 -** Montrons que si $p$ un nombre premier positif tel que : $p$ divide $A$, alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$ :

• Si 7 ne divide pas $p - 1$ :

alors d'après la question 2) on a $p = 7$

• Si 7 divide $p - 1$ :

alors $p - 1 \equiv 0[7]$ c-à-d $p \equiv 1[7]$

Conclusion :

$\boxed{\text{si } p \text{ est un nombre premier positif tel que } p \text{ divise } A, \text{ alors } p = 7 \text{ ou } p \equiv 1[7]}$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2022

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Problème d'analyse** .......... **10 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .......... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .......... **3 points**
— Exercice 4 : **Structures algébriques** .......... **3.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : (10 pts)

**Partie A :**

0,25 pt **1 -** Vérifier que, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ; $0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$

0,25 pt **2 -** En déduire que, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ; $0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

**Partie B :** On considère la fonction $f$ définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de } ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

Et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonrmé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $f$ est continue à droite en 0

0,5 pt **b)** Montrer que $f$ est dérivable à droite en 0

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0,5 pt **2 - a)** Montrer que, $(\forall x \in ]0; +\infty[)$ ;, $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$

où : $g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$

0,5 pt **b)** Montrer que , $(\forall x \in I)$ ; $0 \leq g'(x) \leq x^2$

0,25 pt **c)** En déduire que, $(\forall x \in I)$ ; $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

0,25 pt **d)** Déterminer le sens de variations de $f$

0,25 pt **3 - a)** Dresser le tableau de variation de $f$

0,5 pt **b)** Représenter grahiquement la courbe $(C)$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

( On prendra $||\vec{\imath}|| = 2cm$ et $||\vec{\jmath}|| = 2cm$)

**Partie C :**

0,5 pt **1 -** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in ]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

**2 -** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et } \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $u_n \in [0; 1]$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right) |u_n - \alpha|$

0,5 pt **c)** Montrer par récurrence que, $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

0,25 pt **d)** En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$

**Partie D :** Pour tout $x \in I$ , on pose : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)dt$

0,5 pt **1 -** Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur $I$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad ; \quad F(x) = 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)$$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$, puis déduire que : $\int_0^1 f(t)dt = 2\ln 2 - 1$

0,5 pt **c)** Calculer en $cm^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

**Partie E :** On pose, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ , $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall k \in \mathbb{N})$ ; $0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ; $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone

0,25 pt **b)** En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

0,25 pt **c)** Montrer que la limite $\ell$ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

## Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m$ **un complexe non nul** donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

**Partie I :** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$, $(E_m) : z^2 + mj^2 z + m^2 j = 0$

0,5 pt **1 -** Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation $(E_m)$ est $\Delta = [m(1-j)]^2$

0,5 pt **b)** Déterminer $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation $(E_m)$

0,5 pt **3 -** Dans cette question, on suppose que, $m = 1 + i$

Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

**Partie II :** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Soit $\varphi$ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1+j)z$

0,25 pt **1 -** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\varphi$

**2 -** On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $m$, $mj$ et $mj^2$

Et on note $A'(a')$ , $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points $A$, $B$ et $C$ par l'application $\varphi$ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$

0,75 pt **a)** Montrer que : $a' = -mj^2$ , $b' = -m$ et $c' = -mj$

0,25 pt **b)** Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$

0,5 pt **c)** En déduire que le triangle $PQR$ est équilatéral.

## Exercice 3 : (3 pts)

Soit $n$ un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(E_n)$ : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit $(x, y)$ une solution de l'équation $(E_n)$ dans $\mathbb{N}^2$ et soit $p$ le plus petit diviseur premier de $n$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $(x+1)^n \equiv x^n \, [p]$

0,25 pt **b)** Montrer que $p$ est premier avec $x$ et avec $(x+1)$

0,25 pt **c)** En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\,[p]$

0,5 pt **2 -** Montrer que si $n$ est pair, alors l'équation $(E_n)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

**3 -** On suppose que $n$ est impair

0,5 pt **a)** Montrer qu'il existe un couple $(u, v)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$

( On rappelle que $p$ est le plus petit diviseur premier de $n$ )

0,25 pt **b)** Soient $q$ et $r$ respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de $u$ par $(p-1)$. Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$

0,5 pt **c)** On pose : $v' = -(v+nq)$. Montrer que : $v' \geq 0$

0,5 pt **d)** Montrer que l'équation $(E_n)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

## Exercice 4 : ( 3.5 pts )

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $E$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

0,25 pt **b)** Vérifier que pour tout $a$ , $b$ , $c$ et $d$ de $\mathbb{Z}$, on a :

$M(a,b) \times M(c,d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$

0,5 pt **c)** Montrer que : $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

**2 -** Soit $\varphi$ l'application définie de $E$ vers $\mathbb{Z}$ par :

$(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)\,;\ \varphi(M(a,b)) = \left|a^2 - 3b^2\right|$

0,5 pt Monter que $\varphi$ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$

**3 -** Soit $M(a,b) \in E$

0,25 pt **a)** Montrer que $M(a,b) \times M(a,-b) = \left(a^2 - 3b^2\right).I$

0,5 pt **b)** Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ alors $\varphi(M(a,b)) = 1$

0,5 pt **c)** On suppose que $\varphi(M(a,b)) = 1$

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et préciser son inverse

0,25 pt **4 - a)** Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2\,;\ \varphi(M(a,b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

0,25 pt **b)** En déduire que l'anneau $(E, +, \times)$ est intègre.

0,25 pt **c)** Est-ce que $(E, +, \times)$ est un corps ? justifier votre réponse.

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématique A & B

## Session : Normal juin 2022

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (10 pts)

### Partie A :

0,25 pt **1 -** Vérifions que, $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})$ ; $0 \leq 1-x+x^{2}-\frac{1}{x+1} \leq x^{3}$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})\,; 1-x+x^{2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1-x^{2}+x^{3}+x^{2}-1}{x+1}=\dfrac{x^{3}}{x+1}$

Et $x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow 0 \prec \dfrac{1}{x+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^{3}}{x+1} \leq x^{3}$ $(\text{car } x^{3} \geq 0)$

Donc $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^{+})\,; 0 \leq 1-x+x^{2}-\dfrac{1}{x+1} \leq x^{3}}$

0,25 pt **2 -** En déduire que, $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})$ ; $0 \leq x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\ln(1+x) \leq \frac{x^{4}}{4}$.

Daprès 1- On a $(\forall t \in \mathbb{R}^{+})\,; 0 \leq 1-t+t^{2}-\dfrac{1}{t+1} \leq t^{3}$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})\,; \int_{0}^{x} 0 dt \leq \int_{0}^{x}\left(1-t+t^{2}-\frac{1}{t+1}\right) dt \leq \int_{0}^{x} t^{3} dt$

On obtient $0 \leq \left[t-\dfrac{t^{2}}{2}+\dfrac{t^{3}}{3}-\ln(t+1)\right]_{0}^{x} \leq \left[\dfrac{t^{4}}{4}\right]_{0}^{x}$ D'où $0 \leq x-\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{3}-\ln(x+1) \leq \frac{x^{4}}{4}$

Finalement $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^{+})\,; 0 \leq x-\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{3}-\ln(x+1) \leq \dfrac{x^{4}}{4}}$

**Partie B :** Nous considèrerons la fonction $f$ définie sur $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=\tfrac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de } ]0;+\infty[ \,:\, f(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^{2}}$$

Et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,5 pt **1 - a)** Montrons que $f$ est continue à droite en 0.

On a $(\forall x \in \mathbb{R}_{*}^{+})$ ;

$$0 \leq x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\ln(x+1) \leq \frac{x^{4}}{4} \Rightarrow \frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{3} \leq x-\ln(x+1) \leq \frac{x^{4}}{4}+\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{x}{3} \leq \frac{x-\ln(x+1)}{x^{2}} \leq \frac{x^{2}}{4}+\frac{1}{2}-\frac{x}{3}$$

Or $\lim_{x \to 0^{+}} \frac{1}{2}-\frac{x}{3}=\lim_{x \to 0^{+}} \frac{x^{2}}{4}+\frac{1}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$. Donc d'après les propriétés des limites et de l'ordre on déduit que :

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} = \frac{1}{2}$. Et puisque $f(0) = \frac{1}{2}$ on obtient $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Donc la fonction $f$ est continue à droite en 0

**0,5 pt** **b)** Montrons que $f$ est dérivable à droite en 0

On a $(\forall x \in ]0, +\infty[)$; $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{2}}{x} = \dfrac{2x - 2\ln(x+1) - x^2}{2x^3}$

on sait que $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$ ; $0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(x+1) \leq \frac{x^4}{4}$

ce qui implique $-\frac{2x^3}{3} \leq 2x - x^2 - 2\ln(x+1) \leq \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3}$

Donc $\dfrac{-2}{3} \leq \dfrac{2x - x^2 - 2\ln(x+1)}{2x^3} \leq \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{3}$ ou encore $\dfrac{-2}{3} \leq \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \leq \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{3}$

Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} - \frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$. Donc d'après les propriétés des limites et de l'ordre on déduit que :

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{2}{3}$ Donc $f$ est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = \frac{-2}{3}$

**0,5 pt** **c)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interprétons graphiquement le résultat obtenu

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2} = 0$

et l'axe des abscisses est asymptote à $C_f$ au voisinage de $+\infty$

**0,5 pt** **2 - a)** Montrons que, $(\forall x \in ]0; +\infty[)$ , $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$ avec $g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$

$(\forall x \in ]0, +\infty[), f'(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right) - 2x(x-\ln(x+1))}{x^4}$

$$\begin{aligned} &= \frac{x\left(1-\frac{1}{x+1}\right) - 2(x-\ln(x+1))}{x^3} \\ &= \frac{-\left(x+\frac{x}{x+1}\right) + 2\ln(x+1)}{x^3} \\ &= \frac{-g(x)}{x^3}\end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in ]0, +\infty[), f'(x) = \frac{-g(x)}{x^3}$

**0,5 pt** **b)** Montrons que , $(\forall x \in I)$ ; $0 \leq g'(x) \leq x^2$ :

$(\forall x \in ]0, +\infty[), g'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} = \frac{(x+1)^2+1-2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

Et $(\forall x \in I); x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{(x+1)^2} \leq x^2$

Donc $(\forall x \in I); 0 \leq g'(x) \leq x^2$

**0,25 pt** **c)** Déduisons que, $(\forall x \in I)$ ; $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

D'après la question précédente $(\forall t \in I); 0 \leq g'(t) \leq t^2$

$$\begin{aligned}(\forall x \in I); 0 \leq g'(t) \leq t^2 &\Rightarrow 0 \leq \int_0^x g'(t)dt \leq \int_0^x t^2 dt \quad (\text{Car } x \geq 0)\\ &\Rightarrow 0 \leq [g(t)]_0^x \leq \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x\\ &\Rightarrow 0 \leq g(x) - g(0) \leq \frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

$g(0) = 0$ Donc $\boxed{(\forall x \in I); 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}}$

**0,25 pt** **d)** Déterminons le sens de variations de $f$

$(\forall x \in ]0, +\infty[), f'(x) = \frac{-g(x)}{x^3}$ et $0 \leq g(x)$

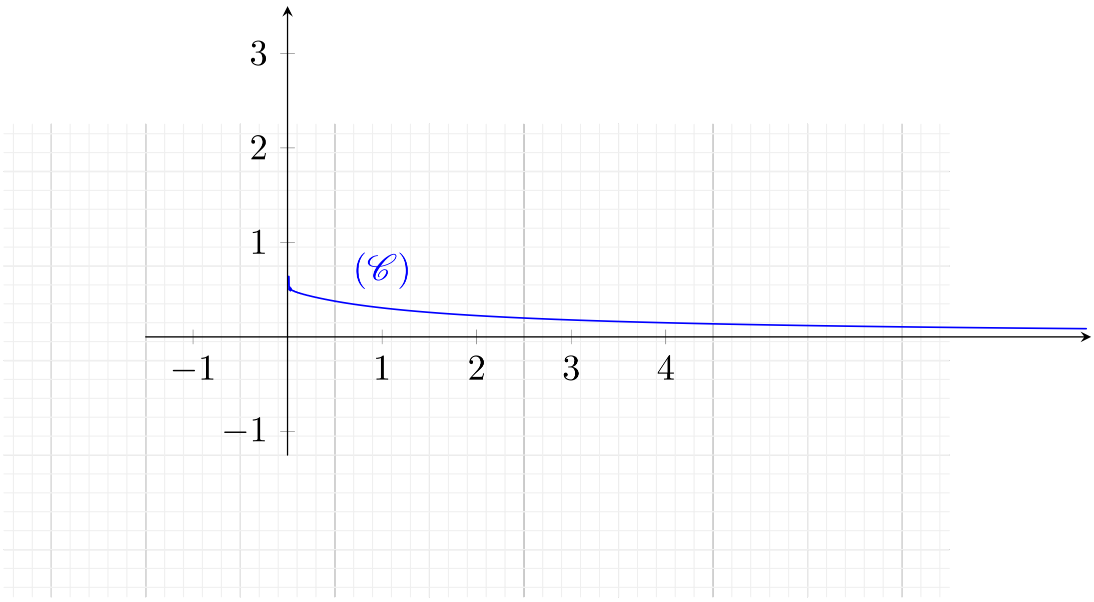
Donc $f'(x)$ est strictement négative sur $]0, +\infty[$

On déduit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } I}$

**0,25 pt** **3 - a)** Dressons le tableau de variation de $f$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{-2}{3}$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**0,5 pt** **b)** Représentons graphiquement la courbe $(C)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$




**Partie C :**

**0,5 pt** **1 -** Montrons qu'il existe un unique réel $\alpha \in ]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

Posons $\varphi(x) = f(x) - x$

$\varphi$ Est la somme de deux fonctions continues et strictement décroissantes sur $[0, 1]$ ( $f$ et $x \mapsto -x$ )

Donc $\varphi$ Est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$

De plus $\varphi(0)\times\varphi(1)=f(0)\times(f(1)-1)=\frac{1}{2}(-\ln 2)\prec 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists!\alpha\in]0,1[/\varphi(\alpha)=0$

Or $\varphi(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$

Donc $\boxed{\exists!\alpha\in]0,1[\ /\ f(\alpha)=\alpha}$

**2 -** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=\frac{1}{3} \text{ et } \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_n)$$

0,5 pt **a)** Montrons par récurrence que : $\quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad ; \quad u_n\in[0;1]$

$u_0=\frac{1}{3}\Rightarrow u_0\in[0,1]$

Soit $n\in\mathbb{N}; u_n\in[0,1]\Rightarrow f(u_n)\in f([0,1])$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow u_{n+1}\in[f(1),f(0)]\\&\Rightarrow u_{n+1}\in\left[1-\ln 2;\frac{1}{2}\right]\\&\Rightarrow u_{n+1}\in[0,1]\end{aligned}$$

Car $\left[1-\ln 2;\frac{1}{2}\right]\subset[0,1]$

Donc $\boxed{\text{d'après le principe de récurrence } (\forall n\in\mathbb{N}); u_n\in[0,1]}$

0,5 pt **b)** Montrons par I.A.F que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad ; \quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)|u_n-\alpha|$

la fonction $f$ étant continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$

Et on a $(\forall x\in]0,1[); 0\leq g(x)\leq\frac{x^3}{3}\Rightarrow 0\leq\frac{g(x)}{x^3}\leq\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\frac{-1}{3}\leq\frac{-g(x)}{x^3}\leq 0\\&\Rightarrow\frac{-1}{3}\leq f'(x)\leq 0\\&\Rightarrow|f'(x)|\leq\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Et comme $u_n$ et $\alpha$ sont deux éléments de $[0,1]$

On déduit, d'après l'inégalité des accroissements finis, que

$\forall(n\in\mathbb{N}); |f(u_n)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{3}|u_n-\alpha|$ Or $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(\alpha)=\alpha$

Donc $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}); |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{3}|u_n-\alpha|}$

0,5 pt **c)** Montrons par récurrence que, $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad ; \quad |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$

On a $0\prec\alpha\prec 1\Rightarrow -1\prec-\alpha\prec 0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow u_0-1\prec u_0-\alpha\prec u_0\\&\Rightarrow\frac{-2}{3}\prec u_0-\alpha\prec\frac{1}{3}\\&\Rightarrow|u_0-\alpha|\leq 1\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour $n=0$

Soit $n\in\mathbb{N}, |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n\Rightarrow\frac{1}{3}|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

Car$(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$

Donc d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

0,5 pt **d)** En déduisons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$

On a $-1 \leq \frac{1}{3} \leq 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Et puisque $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ on déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

**Partie D :** Pour tout $x \in I$ , on pose : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)dt$

0,5 pt **1 -** Montrons que la fonction $F$ est dérivable sur $I$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$.

La fonction $f$ est continue sur $I$ donc la fonction $h : x \to \int_1^x f(t)dt$ est une primitive de $f$ D'où h est dérivable sur $I$ et $(\forall x \in I); \quad h'(x) = f(x)$

On a $(\forall x \in I); F(x) = \int_x^1 f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt = -h(x)$

On déduit que $F$ est dérivable sur $I$ et que $(\forall x \in I); F'(x) = -h'(x) = -f(x)$

D'où $(\forall x \in I); F'(x) = -f(x)$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad ; \quad F(x) = 2\ln 2 - \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$

$(\forall x \in ]0, +\infty[); \mathrm{F}(x) = \int_x^1 f(t)dt$

$$= \int_x^1 \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}dt$$

$$= \left[-\frac{1}{t}(t - \ln(1+t))\right]_x^1 - \int_x^1 -\frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= -(1 - \ln 2) + \frac{1}{x}(x - \ln(1+x)) + \int_x^1 \frac{1}{t}\left(\frac{t}{1+t}\right)dt$$

$$= -(1 - \ln 2) + \frac{1}{x}(x - \ln(1+x)) + \int_x^1 \frac{1}{1+t}dt$$

$$= -(1 - \ln 2) + \frac{1}{x}(x - \ln(1+x)) + [\ln(1+t)]_x^1$$

$$= -(1 - \ln 2) + \frac{1}{x}(x - \ln(1+x)) + \ln 2 - \ln(1+x)$$

$$= -1 + \ln 2 + 1 - \frac{1}{x}\ln(1+x) + \ln 2 - \ln(1+x)$$

$$= 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$

Donc $(\forall x \in ]0, +\infty[); \mathrm{F}(x) = 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$

0,5 pt **b)** Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, puis déduire que : $\int_0^1 f(t)dt = 2\ln 2 - 1$

$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$

$$= \lim_{x\to 0^+} 2\ln 2 - \ln(1+x) - \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= 2\ln 2 - \ln 1 - 1$$

$$= 2\ln 2 - 1$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} F(x) = 2\ln 2 - 1}$

$F$ étant continue à droite en 0 (car dérivable à droite en 0 )

Donc $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$

On déduit que $F(0) = 2\ln 2 - 1$ et par suite $\boxed{\int_0^1 f(t)dt = 2\ln 2 - 1}$

**0,5 pt** **c)** Calculons en $cm^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ : laire demandée est égale à $\left(\int_0^1 f(t)dt\right) \times \|\overrightarrow{i}\| \times \|\overrightarrow{j}\|$

D'où cette aire est $\boxed{4(2\ln 2 - 1)\ \text{cm}^2}$

**Partie E :**

**1 -** On pose, pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ , $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k$

**0,25 pt** **a)** Vérifions que : $(\forall k \in \mathbb{N})$ ; $0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$.

$(\forall k \in \mathbb{N}); k \leq t \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt \\
&\Rightarrow f(k+1)[t]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)[t]_k^{k+1} \\
&\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \\
&\Rightarrow -f(k) \leq -\int_k^{k+1} f(t)dt \leq -f(k+1) \\
&\Rightarrow 0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) - f(k+1) \\
&\Rightarrow 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\forall k \in \mathbb{N}); 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)}$

**0,5 pt** **b)** En déduire que : $(\forall k \in \mathbb{N})$ ; $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

$(\forall k \in \mathbb{N}); (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ;

$$\begin{aligned}
0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1) &\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} f(k) - f(k+1) \\
&\Rightarrow 0 \leq S_n \leq (f(0) - f(1) + f(1) - f(2) + \ldots + f(n-1) - f(n)) \\
&\Rightarrow 0 \leq S_n \leq f(0) - f(n) \leq f(0) \text{ Car } f(n) \geq 0 \\
&\Rightarrow 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}}$

**0,25 pt** **2 - a)** Montrons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \Delta_k - \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k = \Delta_n \geq 0$ d'après 1- a

Donc $\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est monotone (croissante)}}$

**0,25 pt** **b)** Montrons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et est majorée donc $\boxed{\text{elle est convergente}}$

**0,25 pt** **c)** Montrons que la limite $\ell$ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante donc elle est minorée par son premier terme

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; u_1 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$ avec $u_1 = \sum_{k=0}^{k=01} \Delta_k = \Delta_0 = f(0) - \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} - (2\ln 2 - 1) = \frac{3}{2} - 2\ln 2$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; \frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$ et en passant à la limite on obtient $\boxed{\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}}$

## Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m$ **un complexe non nul** donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

**Partie I :** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$, $(E_m) : z^2 + mj^2 z + m^2 j = 0$

**0,5 pt** **1 -** Vérifions que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 1$

On a $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}\times 3} = e^{i2\pi} = 1$ Et $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$

Donc $\boxed{j^3 = 1 \quad \text{et} \quad 1 + j + j^2 = 0}$

**0,25 pt** **2 - a)** Montrons que le discriminant de l'équation $(E_m)$ est $\Delta = [m(1-j)]^2$

$$\text{2-a-On a } \Delta = \left(mj^2\right)^2 - 4m^2 j = m^2 j\left(j^3 - 4\right) = -3m^2 j$$

$$[m(1-j)]^2 = m^2\left(1 - 2j + j^2\right) = m(\underbrace{1 + j + j^2}_{0} - 3j) = -3m^2 j$$

Donc $\boxed{\Delta = [m(1-j)]^2}$

**0,5 pt** **b)** Déterminons $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation $(E_m)$

$\Delta \neq 0$ Donc $(E_m)$ admet deux solutions distinctes

$z_1 = \frac{-mj^2 - m(1-j)}{2} = \frac{-m\left(j^2+1-j\right)}{2} = \frac{-m(-j-j)}{2} = mj$ Car $(1 + j^2 = -j)$

$z_2 = \frac{-mj^2 + m(1-j)}{2} = \frac{m\left(-j^2+1-j\right)}{2} = \frac{m(1+j+1-j)}{2} = m$ Car $(-j^2 = 1 + j)$

D'où $\boxed{\text{les solutions de } (E_m) \text{ sont } z_1 = mj \quad \text{et} \quad z_2 = m}$

**0,5 pt** **3 -** Dans cette question, on suppose que, $m = 1 + i$.

Montrons que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

On a $z_1 + z_2 = m(1+j) = mj^2 = -(1+i)j^2 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{j} = -\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)} = -\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\pi}e^{-i\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Donc

$(z_1 + z_2)^{2022} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{2022} = (\sqrt{2})^{2022} \times \left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{2022} = 2^{1011}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}\times 6}\right)^{337} = 2^{1011}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2359} = 2^{1011}(i)\left(i^2\right)^{1179} = -2^{1011}i$

D'où $\boxed{(z_1 + z_2)^{2022} \text{ est imaginaire pur}}$

**Partie II :** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$
Soit $\varphi$ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1+j)z$

**0,25 pt** **1 -** Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\varphi$

On a $Z' = (1+j)z = -j^2 Z = e^{-i\pi} e^{i\frac{4\pi}{3}} Z = e^{i\frac{\pi}{3}} Z$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}}$

**2 -** On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $m$, $mj$ et $mj^2$
Et on note $A'(a')$ , $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points $A$, $B$ et $C$ par l'application $\varphi$ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$

**0,75 pt** **a)** Montrons que : $a' = -mj^2$ , $b' = -m$ et $c' = -mj$

On a $z' = -j^2 z$

Donc $\varphi(A) = A' \Rightarrow a' = -j^2 a = -j^2 m$

$\varphi(B) = B' \Rightarrow b' = -j^2 b = -j^2 mj = -m$

$\varphi(C) = C' \Rightarrow c' = -j^2 c = -j^2 mj^2 = -mj$

D'où $\boxed{a' = -j^2 m, b' = -m \text{ et } c' = -mj}$

**0,25 pt** **b)** Montrons que : $p + qj + rj^2 = 0$

On a $p = \frac{b+a'}{2} = \frac{mj-mj^2}{2}; q = \frac{c+b'}{2} = \frac{mj^2-m}{2}$ Et $r = \frac{a+c'}{2} = \frac{m-mj}{2}$ Donc $p+qj+rj^2 = \frac{mj-mj^2}{2} + \frac{mj^2-m}{2}j + \frac{m-mj}{2}j^2 = \frac{1}{2}\left(mj - mj^2 + mj^3 - mj + mj^2 - mj^3\right) = 0$

Doù $\boxed{p + qj + rj^2 = 0}$

**0,5 pt** **c)** En déduire que le triangle $PQR$ est équilatéral.

On a $p + qj + rj^2 = 0 \Rightarrow p + qj - r(1+j) = 0$

$$\Rightarrow p - r + j(q - r) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{p-r}{q-r} = -j$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{p-r}{q-r}\right| = |-j| = 1 \\ \arg\left(\frac{p-r}{q-r}\right) \equiv \arg(-j) \equiv \frac{2\pi}{3} - \pi[2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{RP}{RQ} = 1 \\ (\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RP}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

On déduit que $\boxed{\text{le triangle } PQR \text{ est équilatéral}}$

## Exercice 3 : (3 pts)

Soit $n$ un entier naturel strictement supérieur à 1
On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(E_n)$ : $(x+1)^n - x^n = ny$
Soit $(x, y)$ une solution de l'équation $(E_n)$ dans $\mathbb{N}^2$ et soit $p$ le plus petit diviseur premier de $n$

**0,25 pt** **1 - a)** Montrons que $(x+1)^n \equiv x^n\ [p]$

$$\begin{aligned} \text{1- a- On a : } (p \text{ Divise } n) &\Rightarrow n \equiv 0[p] \\ &\Rightarrow ny \equiv 0[p] \\ &\Rightarrow (x+1)^n - x^n \equiv 0[p] \\ &\Rightarrow (x+1)^n \equiv x^n[p] \end{aligned}$$

D'où $\boxed{(x+1)^n \equiv x^n[p]}$

**0,25 pt** **b)** Montrons que $p$ est premier avec $x$ et avec $(x+1)$

supposons p non premier avec $x$ donc $p$ divise $x$

$p$ Divise $x \Rightarrow x = 0[p]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x^n = 0[p] \\ &\Rightarrow (x+1)^n = 0[p] \,\text{Car}(x+1)^n = x^n[p] \\ &\Rightarrow x+1 = 0[p] \text{ Car } p \text{ premier} \\ &\Rightarrow 1 = 0[p] \quad \text{Absurde} \end{aligned}$$

Absurde Donc $\boxed{p \text{ premier avec } x}$

De même supposons $p$ non premier avec $x+1$ donc $p$ divise $x+1$ $p$ Divise $x+1 \Rightarrow x+1 = 0[p]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (x+1)^n = 0[p] \\ &\Rightarrow x^n = 0[p] \,\text{Car}(x+1)^n = x^n[p] \\ &\Rightarrow x = 0[p] \text{ Car } p \text{ premier} \\ &\Rightarrow x+1 = 1[p] \\ &\Rightarrow 0 = 1[p] \text{ Absurde} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{p \text{ premier avec } x+1}$

D'où $\boxed{p \text{ premier avec } x \text{ et avec } x+1}$

**0,25 pt** **c)** En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\ [p]$

$p$ premier et $p$ premier avec $x$ et avec $x+1$ Donc d'après le théorème de Fermat $(x+1)^{p-1} = 1[p]$ Et $x^{p-1} = 1[p]$

On déduit que $\boxed{(x+1)^{p-1} = x^p[p]}$

**0,5 pt** **2 -** Montrer que si $n$ est pair, alors l'équation $(E_n)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

$n$ Pair et $p$ le plus petit diviseur premier de $n$ donc $p = 2$ Le résultat de la question c- devient $x+1 = x[2]$c à d $1 = 0[2]$ ce qui est absurde Donc la supposition $(x, y)$ est solution de $(E_n)$ est fausse

Donc $\boxed{\text{si } n \text{ est pair l'équation } (E_s) \text{ n'a pas de solutions.}}$

**3 -** On suppose que $n$ est impair

**0,5 pt** **a)** Montrons qu'il existe un couple $(u, v)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$

Posons $n \wedge (p-1) = d$ et supposons $d \neq 1$ $d$ Admet donc un diviseur premier $q$ $q$ Divise n et $q$ divise $p-1$ $q$ Divise $p-1$ donc $q \leq p-1 \prec p$ On vient de trouver un diviseur premier de $n$ strictement inférieur à $p$ ce qui est absurde Donc $d = 1$ $n \wedge (p-1) = d = 1$ Donc d'après le théorème de Bézout $\boxed{\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / nu + (p-1)v = 1}$

**0,25 pt** **b)** Soient $q$ et $r$ respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de $u$ par $(p-1)$.

Vérifions que : $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

On a : $u = q(p-1) + r$ avec $0 \leq r \prec p-1$

$$\begin{aligned}
u = q(p-1) + r \Rightarrow nu &= nq(p-1) + nr \\
&\Rightarrow 1 - (p-1)v = nq(p-1) + nr \quad \text{Car}(nu = 1 - (p-1)v) \\
&\Rightarrow nr = 1 - (p-1)v - nq(p-1) \\
&\Rightarrow nr = 1 - (p-1)(v + nq)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{nr = 1 - (p-1)(v + nq)}$

**0,5 pt** **c)** On pose : $v' = -(v + nq)$. Montrons que : $v' \geq 0$

$n$ impair et $p$ divise $n$ Donc $p \geq 3$ $n \wedge (p-1) = 1$ Et $p-1 \neq 1$ Donc $p-1$ ne divise pas $n$ ce qui montre que $r \geq 1$ D'autre par $r \geq 1 \Rightarrow mr \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow nr - 1 \geq 0 \\
&\Rightarrow -(p-1)(v + nq) \geq 0 \\
&\Rightarrow -(v + nq) \geq 0 \\
&\Rightarrow v \geq 0
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{v' \geq 0}$

**0,5 pt** **d)** Montrons que l'équation $(E_n)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

On a $\begin{cases} (x+1)^n = x^n [p] \\ (x+1)^{p-1} = x^{p-1} [p] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^{n\pi} = x^{nv} [p] \\ (x+1)^{(p-1)r'} = x^{(p-1)r'} [p] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)^{1+(p-1)v'} = x^{1+(p-1)v'} [p] \\ (x+1)^{(p-1)v'} = x^{(p-1)r'} [p] \end{cases} \quad \text{Car } (nr' = 1 + (p-1)v')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1)^{(p-1)r'} = x \times x^{(p-1)v'}[p] \\ (x+1)^{(p-1)v'} = x^{(p-1)v'}[p] \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+1)x^{(p-1)r'} = x \times x^{(p-1)v'}[p]$$

$$\Rightarrow x+1 = x[p] \text{ car } \left(p \wedge x^{(p-1)v'} = 1\right)$$

$$\Rightarrow 1 = 0[p]$$

Absurde car $p$ premier

D'où $\boxed{\text{l'équation } (E_x) \text{ n'a donc pas de solutions dans } \mathbb{N}^2}$

## Exercice 4 : ( 3.5 pts )

**0,25 pt** **1 - a)** Montrons que $E$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

$E$ est une partie non vide de $M_2(\mathbb{R})$ ( par définition de $E$ )

$\forall (M(a,b), M(c,d)) \in E^2$

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & 3b-3d \\ b-d & a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & 3(b-d) \\ b-d & a-c \end{pmatrix} = M($$

$(a-c, b-d) \in \mathbb{Z}^2$ Donc $M(a,b) - M(c,d) \in E$

On déduit que $\boxed{E \text{ est un sous-groupe de } (M_2(\mathbb{R}), +)}$

**0,25 pt** **b)** Vérifions que pour tout $a$ , $b$ , $c$ et $d$ de $\mathbb{Z}$, on a : $M(a,b) \times M(c,d) = M(ac+3bd, ad+bc)$.

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 ; M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac+3bd & 3ad+3bc \\ bc+ad & 3bd+ac \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac+3bd & 3(bc+ad) \\ bc+ad & ac+3bd \end{pmatrix}$$

$$= M(ac+3bd, bc+ad)$$

$$(ac+3bd, bc+ad) \in \mathbb{Z}^2$$

Donc $\boxed{\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 ; M(a,b) \times M(c,d) = M(ac+3bd, bc+ad)}$

**0,5 pt** **c)** Montrons que : $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

On a $E$ est un sous-groupe du groupe commutatif $(M_2(\mathbb{R}), +)$ Donc $(E, +)$ groupe commutatif Dans la question b-on a montré que $E$ est stable dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ Et Puisque $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans $M_2(\mathbb{R})$, on déduit qu'elle est associative et e distributive par rapport à $+$ dans $E$ Donc $(E,+,x)$ Est un anneau

$$\begin{aligned}\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4; M(a,b)\times M(c,d) &= M(ac+3bd, bc+ad)\\ &= M(ca+3db, cb+da)\\ &= M(c,d)\times M(a,b)\end{aligned}$$

Donc $\times$ est commutative dans $E$ de plus $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=M(1,0)\in E$

D'où $\boxed{(E,+,\times)\text{ Est un anneau commutatif unitaire}}$

**0,5 pt** **2 -** Soit $\varphi$ l'application définie de $E$ vers $\mathbb{Z}$ par :
$(\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2)\,;\,\varphi\,(M(a,b))=\left|a^2-3b^2\right|$

Montons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

$$\begin{aligned}&\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4;\varphi(M(a,b)\times M(c,d))=\varphi(M(ac+3bd,bc+ad))\\ &=\left|(ac+3bd)^2-3(bc+ad)^2\right|\\ &=\left|a^2c^2+6acbd+9b^2d^2-3\left(b^2c^2+2bcad+a^2d^2\right)\right|\\ &=\left|a^2c^2-3b^2c^2-3a^2d^2+9b^2d^2\right|\\ &=\left|a^2\left(c^2-3d^2\right)-3b^2\left(c^2-3d^2\right)\right|\\ &=\left|\left(c^2-3d^2\right)\left(a^2-3b^2\right)\right|\\ &=\left|c^2-3d^2\right|\left|a^2-3b^2\right|\\ &=\varphi(M(a,b))\times\varphi(M(c,d))\\ &(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4;\varphi(M(a,b)\times M(c,d))=\varphi(M(a,b))\times\varphi(M(c,d))\end{aligned}$$

$$\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4;\varphi(M(a,b)\times M(c,d))=\varphi(M(a,b))\times\varphi(M(c,d))$$

Donc $\boxed{\varphi\text{ est un homomorphisme de }(E,\text{x})\text{ vers }(Z,x)}$

**0,25 pt** **3 - a)** Montrons que $M(a,b)\times M(a,-b)=\left(a^2-3b^2\right).I$

$$\begin{aligned}a-\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2;M(a,b)\times M(a,-b)&=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&-3b\\-b&a\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a^2-3b^2&0\\0&a^2-3b^2\end{pmatrix}\\ &=\left(a^2-3b^2\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ &=\left(a^2-3b^2\right)I\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall(a,b)\in Z^2;M(a,b)\times M(a,-b)=(a^2-3b^2)\,I}$

**0,5 pt** **b)** Montrons que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ alors $\varphi(M(a,b))=1$

$M(a,b)$ est inversible dans $(E,\mathrm{x})$ implique $\varphi(M(a,b))$ est inversible dans $(\varphi(E),\mathrm{x})$ Or $\varphi(E)=\{\varphi(M(a,b))/(a,b)\in\mathbb{Z}\}=\{|a^2-3b^2|/(a,b)\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{Z}^+$ Et Puisque le seul élément inversible de $(\mathbb{Z}^+,\mathrm{x})$ est 1

On déduit que $\boxed{M(a,b) \text{ est inversible dans } (E,x) \text{ implique } \varphi(M(a,b))=1}$

**0,5 pt** **c)** On suppose que $\varphi(M(a,b))=1$. Montrons que $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ et préciser son inverse

$$Supposons \varphi(M(a,b))=1$$

$$\varphi(M(a,b))=1\Rightarrow\left|a^2-3b^2\right|=1\Rightarrow\frac{1}{a^2-3b^2}\in\{-1,1\}$$

$$M(a,b)\times M(a,-b)=\left(a^2-3b^2\right)I\Leftrightarrow\frac{1}{a^2-3b^2}(M(a,b)\times M(a,-b))=I$$

$$\Leftrightarrow M(a,b)\times\left(\frac{1}{a^2-3b^2}M(a,-b)\right)=I$$

$$\Leftrightarrow M(a,b)\times M\left(\frac{a}{a^2-3b^2},\frac{-b}{a^2-3b^2}\right)=I$$

$$\left(\frac{a}{a^2-3b^2},\frac{-b}{a^2-3b^2}\right)\in\mathbb{Z}^2\Rightarrow M\left(\frac{a}{a^2-3b^2},\frac{-b}{a^2-3b^2}\right)\in E$$

$\times$ Est commutative dans $E$

Donc $\boxed{M(a,b) \text{ est inversible dans } (E,\mathrm{x}) \text{ et } (M(a,b))^{-1}=M\left(\frac{a}{a^2-3b^2},\frac{-b}{a^2-3b^2}\right)}$

**0,25 pt** **4 - a)** Montrons que : $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ ; $\varphi(M(a,b))=0\Leftrightarrow a=b=0$

On a : $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2;\mathrm{a}=\mathrm{b}=0\Rightarrow\varphi(M(a,b))=\varphi(M(0,0))=0$ Réciproquement supposons que $\varphi(M(a,b))=0$ est montrons que $a=b=0$ Par l'absurde supposons $b\neq0$

$$\begin{cases}\varphi(M(a,b))=0\\ b\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-3b^2=0\\ b\neq0\end{cases}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=3\Rightarrow\left|\frac{a}{b}\right|=\sqrt{3} \text{ Absurde car } \sqrt{3}\notin\mathbb{Q}\mathbb{E}\approx\left|\frac{a}{b}\right|\in\mathbb{Q}$$

Donc $b=0$ $b=0$ et $a^2-3b^2=0$ implique que $a=0$

On déduit que $\boxed{\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2;\varphi(M(a,b))=0\Leftrightarrow\mathrm{a}=\mathrm{b}=0}$

**0,25 pt** **b)** En déduire que l'anneau $(E,+,\times)$ est intègre.

$$\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$$

$$M(a,b)\times M(c,d)=M(0,0)\Rightarrow\varphi(M(a,b)\times M(c,d))=\varphi(M(0,0))$$

$$\Rightarrow\varphi(M(a,b))\times\varphi(M(c,d))=0$$

$$\Rightarrow\varphi(M(a,b))=0 \text{ Ou } \varphi(M(c,d))=0 \quad (\text{car}(\mathbb{Z},+,\times) \text{ est un anneau intègre })$$

$$\Rightarrow(a=b=0) \text{ Ou } (c=d=0)$$

$$\Rightarrow M(a,b)=M(0,0) \text{ Ou } M(c,d)=M(0,0)$$

On déduit que $\boxed{(E,+,\times) \text{ est un anneau intègre}}$

**0,25 pt** **c)** la matrice $M(2,0)$ n'est pas inversible car $\varphi(M(2,0)) = 4 \neq 1$

Donc $\boxed{(E,+,\mathrm{x}) \text{ n'est pas un corps}}$

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : rattrapage** juillet 2022

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Problème d'analyse** .......... **10 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .......... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** .......... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Arithmétique** .......... **3 points**

## Exercice 1 : (10 points)

### Partie A :

0.25 pt **1 -** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ 1 + x \leq e^{x}$

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})\,;\ 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})\,;\ 0 \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \dfrac{x^3}{6}$

0.5 pt **c)** Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

### Partie B :

On considère la fonction $f$ définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in ]0, +\infty[\ \ ; \quad f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

Et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $f$ est continue à droite en 0

0.25 pt **b)** Vérifier que : $(\forall x > 0)\,;\ \dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \dfrac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$

0.5 pt **c)** En déduire que $f$ est dérivable à droite en 0 et que la nombre dérivé à droite en 0 est $-\dfrac{3}{2}$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)\,;\ f'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x + 1 - e^{x}(1 + x)\right)$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)\,;\ f'(x) \leq -e^{-2x}$ (On pourra utiliser : $1 + x \leq e^{x}$)

0.25 pt **c)** En déduire le sens de variations de $f$ sur $I$

**3 -** On admet que : $(\forall x > 0)\,;\ f''(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}\left(-4x^2 - 4x - 2 + e^{x}(2 + 2x + x^2)\right)$

0.25 pt **a)** Montrer que : $(\forall x \geq 0)\,;\ 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^{x}$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x > 0)\,;\ f''(x) > 0$

**4 -** On admet que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$

0.5 pt **a)** Montrer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in I)\,;\ |f'(x)| \leq \dfrac{3}{2}$

0.5 pt **5 - a)** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de $f$

0.25 pt **c)** Déterminer la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à sa demi-tangente au point $T(0, 1)$

0.5 pt **d)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$

### Partie C :

**1 -** Pour tout $x$ de $[0, 1]$, on pose , $g(x) = f(x) - x$

0.5 pt **a)** Montrer que $g$ est une bijection de $[0, 1]$ vers un intervalle $J$ que l'on déterminera.

0.5 pt **b)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in ]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

**2 -** Pour tout entier naturel non nul $n$ et pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on considère les nombres réels $x_k = \dfrac{k\alpha}{n}$ et on pose , $I_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ et $J_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}\,;\ |J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)dt$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}\,;\ |J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2$

**3 -** On pose : $L = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\left|\dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^{\alpha} f(t)dt$

## Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m \in \mathbb{C}\backslash\{-1, 0, 1\}$

**Partie I :** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m)$ d'inconnue $z$. $(E_m) : mz^2 - (m-1)^2 z - (m-1)^2 = 0$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation $(E_m)$ est $\Delta = (m^2 - 1)^2$

0.5 pt **b)** Déterminer $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation $(E_m)$

0.5 pt **2 -** On prend uniquement dans cette question $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Écrire $z_1$ et $z_2$ sous forme exponentielle.

**Partie II :** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les deux points $A$ et $B$ d'affixes respectifs $m - 1$ et $\dfrac{1}{m} - 1$

0.5 pt **1 -** Montrer que les points $O$, $A$ et $B$ sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$.

**2 -** On suppose que $m$ n'est pas un nombre réel.
Soient $C$ l'image du piont $B$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et $D$ l'image du point $A$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$.

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe du point $C$ est : $c = m - 1 + \left(\dfrac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que l'affixe du point $D$ est : $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $2(p-r) = m - 1 + \left(\dfrac{1}{m} - m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)$ et $2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\dfrac{1}{m} - m\right)$

0.25 pt **c)** Montrer que : $q - r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p - r)$

0.5 pt **d)** Quelle est la nature du triangle $PQR$ ? (justifier votre réponse)

## Exercice 3 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (La loi $\times$ étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout réel $a$ on pose $M(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a+1&3&-1\\2a+3&6&-2\end{pmatrix}$ et soit $G=\{M(a)/a\in\mathbb{R}\}$

**1 -** Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall a\in\mathbb{R})\,;\,\varphi(a)=M(a)$

**0.5 pt** **a)** Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

**0.5 pt** **b)** Montrer que $\varphi(\mathbb{R})=G$, en déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif.

**0.5 pt** **c)** Déterminer $J$ l'élément neutre dans $(G,\times)$

**0.5 pt** **d)** Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G,\times)$

**0.5 pt** **e)** Résoudre dans $(G,\times)$ l'équation : $M(1)\times X=M(2)$

**0.25 pt** **2 - a)** Montrer que : $(\forall a\in\mathbb{R})\,;\,M(a)\times J=M(a)\times I$

**0.5 pt** **b)** En déduire que pour tout $a\in\mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

**0.25 pt** **c)** Vérifier que les matrices de la forme $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+2&3&0\\3x+5&6&1\end{pmatrix}$ avec $x\in\mathbb{R}$, sont solutions dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ de l'équation : $M(1)\times X=M(2)$

## Exercice 4 : ( 3 points )

**0.5 pt** **1 -** Montrer que 137 est un nombre premier.

**0.5 pt** **2 -** Déterminer un couple $(u,v)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $38u+136v=2$

**3 -** Soit $x\in\mathbb{Z}$ tel que : $x^{38}\equiv 1[137]$

**0.5 pt** **a)** Montrer que $x$ et 137 sont premiers entre eux.

**0.5 pt** **b)** Montrer que : $x^{136}\equiv 1[137]$

**0.5 pt** **c)** Montrer que : $x^2\equiv 1[137]$

**0.5 pt** **4 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)$ : $x^{19}\equiv 1[137]$

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : RATTRAPAGE 2022

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (10 pts)

### PARTIE A

0.25 pt **1 -** Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 + x \leq e^x$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u(x) = e^x - x - 1$ On vérifie que $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on dresse son tableau de variation.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On voit donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); u(x) \geq 0$ d'où : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}); 1 + x \leq e^x}$

0.25 pt **2 - a)** Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$

En remplaçant $x$ par $(-x)$ dans $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 + x \leq e^x$

On obtient : $1 - e^{-x} \leq x$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad &\Rightarrow -x \leq 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x}$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \dfrac{x^3}{6}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a : $0 \leq \displaystyle\int_0^x 1 - e^{-t} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \mathrm{t}dt$

Donc : $0 \leq [t+e^{-t}]_0^x \leq \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^x$ ce qui donne : $0 \leq x+e^{-x}-1 \leq \dfrac{x^2}{2}$

Ainsi : $0 \leq \displaystyle\int_0^x t+e^{-t}-1 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \dfrac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t$ et donc : $0 \leq \left[\dfrac{t^2}{2}-e^{-t}-t\right]_0^x \leq \left[\dfrac{t^3}{6}\right]_0^x$ qui donne : $\boxed{0 \leq \dfrac{x^2}{2}-e^{-x}-x+1 \leq \dfrac{x^3}{6}}$

**0.5 pt** **c)** Montrons que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-x-e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

A partir de la question précédente peut s'écrire : $-\dfrac{x^2}{2} \leq -e^{-x}-x+1 \leq \dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}$ Donc si $x>0, -\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1-x-e^{-x}}{x^2} \leq \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{1}{2}$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-x-e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}}$$

## Partie B

Soit $f$ la fonction définie par : $f(0)=1$ et pour $x>0 f(x) = \dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$

**0.5 pt** **1 - a)** Montrons que $f$ est continue à droite en 0

Pour $x>0$, on a : $f(x) = -\dfrac{e^{-x}-1}{-x} + 2\dfrac{e^{-2x}-1}{-2x}$

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-x}-1}{-x} + 2\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-2x}-1}{-2x} = -1+2 = 1 = f(0)$

$\boxed{f \text{ est donc continue à droite en } 0 \text{ .}}$

**0.25 pt** **b)** Vérifions que : $(\forall x>0); \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{1-2x-\mathrm{e}^{-2x}}{x^2} - \dfrac{1-x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$

Soit $x>0$. On a : $\dfrac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} - \dfrac{1-x-e^{-x}}{x^2} = \dfrac{1-2x-e^{-2x}-1+x+e^{-x}}{x^2} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}-1\right) = \dfrac{f(x)-1}{x}$

**0.5 pt** **c)** déduire que $f$ est dérivable à droite en 0 et que la nombre dérivé à droite en 0 est $-\dfrac{3}{2}$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} = 4\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-2x-e^{-2x}}{(2x)^2} = 4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-x-e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$ Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = -2+\dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$;

$\boxed{f \text{ est donc dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = \dfrac{3}{2}}$

**0.5 pt** **2 - a)** Montrons que : $(\forall x>0); f'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x+1-e^x(1+x)\right)$

Soit $x>0$. On a : $f'(x) = \dfrac{x\left(-e^{-x}+2e^{-2x}\right)-e^{-x}+e^{-2x}}{x^2}$ donc

$$\boxed{f'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(-xe^x+2x-e^x+1\right) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x+1-e^x(1+x)\right)}$$

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $(\forall x>0); f'(x) \leq -e^{-2x}$ (On pourra utiliser : $1+x \leq e^x$)

Soit $x>0$. On a : $1+x \leq e^x$ donc $-e^x \leq -(1+x)$ donc $-e^x(1+x) \leq -(1+x)^2$

Donc : $\dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x+1-e^x(1+x)\right) \leq \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x+1-(1+x)^2\right)$

Donc : $f'(x) \leq \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(-x^2\right)$ et par suite $\boxed{f'(x) \leq -e^{-2x}}$

**0.25 pt** **c)** déduire le sens de variations de $f$ sur $I$

On a : $f'(x) \leq -e^{-2x}$ pour tout $x > 0$, donc

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0, +\infty[}$$

**3 -** Pour tout $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}\left(-4x^2 - 4x - 2 + e^x\left(2 + 2x + x^2\right)\right)$

**0.25 pt** **a)** Montrons que : $(\forall x \geq 0); 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^x$

Soit $x > 0$. On a : $0 \leq \displaystyle\int_0^x 1 + t dt \leq \int_0^x e^t \, dt$ donc : $\left[t + \dfrac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \left[e^t\right]_0^x$

Donc $x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^x - 1$ ce qui donne

$$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x}$$

**0.5 pt** **b)** déduire que : $\forall x > 0); \ f''(x) > 0$

Soit $x > 0$. On a : $f''(x)$ est du signe de $-4x^2 - 4x - 2 + e^x\left(2 + 2x + x^2\right)$

$$-2\left(2x^2 + 2x + 1\right) + 2\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)e^x \geq 2\left(\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)^2 - \left(2x^2 + 2x + 1\right)\right)$$

Avec $2\left(\left(\dfrac{x^2}{2} + x + 1\right)^2 - \left(2x^2 + 2x + 1\right)\right) = \dfrac{1}{2}x^4 + x^3$

donc $\boxed{-4x^2 - 4x - 2 + e^x\left(2 + 2x + x^2\right) > 0}$ et

donc $\boxed{f''(x) > 0}$

**4 -** On admet que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$

**0.5 pt** **a)** Montrons que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

Pour $x > 0$ on a : $f'(x) = \dfrac{x\left(-e^{-x} + 2e^{-2x}\right) - e^{-x} + e^{-2x}}{x^2} = \dfrac{-xe^{-x} + 2xe^{-2x} - e^{-x} + e^{-2x}}{x^2}$

avec $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} + 2xe^{-2x} - e^{-x} + e^{-2x} = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0}$

**0.5 pt** **b)** déduire que : $(\forall x \in I); |f'(x)| \leq \dfrac{3}{2}$

$f'$ est dérivable sur $I = ]0, +\infty[$ avec $f'' > 0$ sur $I$

Donc $f'(]0, +\infty[) = ]\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f'(x), \lim_{x \to +\infty} f'(x)[ = ]-\frac{3}{2}, 0[$ Donc : $\boxed{(\forall x \in I); -\dfrac{3}{2} < f'(x) < 0}$

Par suite $\boxed{(\forall x \in I); |f'(x)| < \dfrac{3}{2}}$

**0.5 pt** **5 - a)** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x} - e^{-2x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ L'axe des abscisses est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

**0.25 pt** **b)** Dressons le tableau de variations de $f$

Tableau de variation de la fonction $f$

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\frac{-3}{2}$ $\searrow$ $+\infty$ |

0.25 pt **c)** Déterminons la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à sa demi-tangente au point $T(0,1)$

Position relative de $(\mathcal{C})$ avec sa demi-tangente en $T(1,0)$

— La demi-tangente à $(\mathcal{C})$ en $T$ est incluse dans la droite $(\mathcal{D})$ passant par $T(0,1)$ et de coefficient directeur $-\frac{3}{2}$

— Une équation réduite de $(\mathcal{D})$ est : $y-1=-\frac{3}{2}(x-0)$ Donc $(\mathcal{D}) : y=-\frac{3}{2}x+1$

— Pour $x>0$, $f$ est continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$.

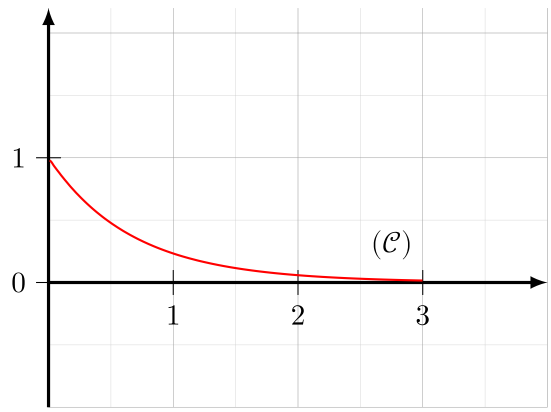
D'après le théorème des accroissements finis : $f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$ où $c\in]0,x[$

Or $-\frac{3}{2}<f'(c)$ donc $f(x)-1>-\frac{3}{2}x$ donc $\boxed{f(x)>-\frac{3}{2}x+1}$

Ainsi $(\mathcal{C})$ est au-dessus de sa demi-tangente en $T$.

0.5 pt **d)** Représentons la courbe $(\mathcal{C})$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction $f$




## Partie C

**1 -** Pour $x\in[0,1]$, $g(x)=f(x)-x$.

0.5 pt **a)** Montrons que $g$ est une bijection de $[0,1]$ vers un intervalle $J$ que l'on déterminera.

Pour $x\in]0,1[$, $g'(x)=f'(x)-1<0$ car $-\frac{3}{2}<f'(0)<0$

Donc $g$ est strictement décroissante sur $[0,1]$. En outre, $g$ est continue sur $[0,1]$, donc $g$ est une bijection de $[0,1]$ vers $J=g([0,1])=[g(1),g(0)]=\left[-\left(1-e^{-1}+e^{-2}\right),1\right]$

0.5 pt **b)** Montrons qu'il existe un unique réel $\alpha\in]0,1[$ tel que $f(a)=a$

On remarque que $0\in]g(1),g(0)[$, donc $0$ admet un antécédent unique $\alpha\in]0,1[$. Donc,

$\boxed{\exists!\alpha\in]0,1[/g(\alpha)=0 \text{ c'est-à-dire : } \exists!\alpha\in]0,1[/f(\alpha)=\alpha}$

**2 -** Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\{0,1,\dots,n\}$, $x_k=\frac{k\alpha}{n}$, $I_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)\mathrm{d}t$ et $J_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x_k)\,\mathrm{d}t$

**0.5 pt** **a)** Montronss que : $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}; |J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t-x_k)\,dt$

Soient $k \in \{0,1,\dots,n\}$ et $t \in [x_k, x_{k+1}]$. $f$ est continue sur $[x_k, t]$, dérivable sur $]x_k, t[$.
D'après le théorème des accroissements finis :

$(\exists c \in ]x_k, t[)/ f(x_k) - f(t) = f'(c)(x_k - t)$ ;

donc $(\exists c \in ]x_k, t[)/ |f(x_k) - f(t)| = |f'(c)|\,|(x_k - t)|$ avec $|f'(c)| < \dfrac{2}{3}$ ;

Donc $\boxed{|f(x_k) - f(t)| < \dfrac{3}{2}(t - x_k)}$.

Ainsi :

$$|J_k - I_k| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{3}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,\mathrm{d}t$$

**0.5 pt** **b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\left|\dfrac{\alpha^{k=n-1}}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \dfrac{3\alpha^2}{4}$

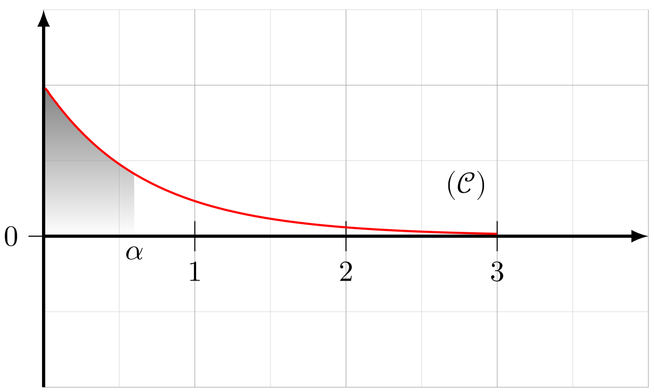
Soit $k \in \{0,1,\dots,n\}$.

On a : $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{k\alpha}{n}t\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{2}\left(x_{k+1}^2 - x_k^2\right) - \frac{k\alpha}{n}\left(x_{k+1} - x_k\right)$ avec :
$x_{k+1} - x_k = \dfrac{k\alpha}{n}; x_{k+1} + x_k = (2k+1)\dfrac{k\alpha}{n}$ donc :

$$\begin{aligned}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\left(x_{k+1}^2 - x_k^2\right) - \frac{k\alpha}{n}\left(x_{k+1} - x_k\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\alpha}{n}(2k+1)\frac{\alpha}{n} - k\frac{\alpha}{n}\frac{\alpha}{n}\\ &= \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\left(k + \frac{1}{2} - k\right)\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,\mathrm{d}t}$ et ainsi : $\boxed{|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2}$

**3 -** On pose : $L = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\mathrm{d}t$




**0.5 pt** **a)** Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\left|\dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$

On remarque que :

- pour $k \in \{0,1,\dots,n\}$ : $\dfrac{\alpha}{n} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}t$

- $L=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t$

Donc : $\left|\frac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right)-L\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(x_k\right)\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(J_k-I_k\right)\right|$

Or $\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(J_k-I_k\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|J_k-I_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{3}{4}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$ et $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3}{4}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 = n\times\frac{3}{4}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2=\frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{n}$

Donc : $\boxed{\left|\frac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right)-L\right| \leq \frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{n}}$

0.5 pt **b)** déduire que : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^k}{n}\sum_{k=0}^{k-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right)=\int_0^a f(t)dt$

On a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right)-L\right|=0$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right)=L}$

## Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m\in\mathbb{C}\backslash\{-1;0;1\}$

I

**1 -** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m)$ d'inconnue $z$,

$$(E_m):\quad mz^2-(m-1)^2z-(m-1)^2=0$$

0.25 pt **a)** Montrons que le discriminant de l'équation $(E_m)$ est $\Delta=\left(m^2-1\right)^2$

$\Delta=(m-1)^4+4m(m-1)^2=(m-1)^2\left[(m-1)^2+4m\right]=(m-1)^2(m+1)^2$

Donc : $\boxed{\Delta=\left(m^2-1\right)^2}$

0.5 pt **b)** Déterminons $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation $(E_n)$

Les solutions de l'équation $(E_m)$ sont :

$$\boxed{z_1=\frac{(m-1)^2+(m^2-1)}{2m}=m-1 \text{ et } z_2=\frac{(m-1)^2-(m^2-1)}{2m}=\frac{1-m}{m}}$$

**2 -** On prend uniquement dans cette question $m=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$.

0.5 pt Écrivons $z_1$ et $z_2$ sous forme exponentielle.

On a : $m=e^{i\theta}$ avec $\theta\in]0,\pi[$ donc $\sin\frac{\theta}{2}>0$

- $z_1=m-1=e^{i\pi}+e^{i\theta}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}$

- On a : $1-m=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\pi}{2}-\pi}=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}$

Donc : $z_2=\frac{1-m}{m}=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta-\pi}{2}-\theta}=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\theta+\pi}{2}}$

II $A(a)$ et $B(b)$ avec $a=m-1=z_1$ et $b=\frac{1}{m}-1=z_2$

0.5 pt **1 -** Montrons que les points $O, A$ et $B$ sont alignés si et seulement si $m\in\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}\text{Les points } O, A \text{ et } B \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \frac{a-0}{b-0} \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \frac{m-1}{\frac{1-m}{m}}\\ &\Leftrightarrow -m \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow m \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Les points } O, A \text{ et } B \text{ sont alignés signifie que } m \in \mathbb{R}}$

**2 -** Soit $m \notin \mathbb{R}, C = \mathcal{R}_A(B)$ et $D = \mathcal{R}_O(A)$ $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_O$ étant les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centres respectifs $A$ et $O$.

**a)** Montrons que l'affixe du point $C$ est : $c = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que l'affixe du point

**0.5 pt** $D$ est : $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

On a :

$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ donc $\boxed{c = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$d - 0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-0)$ donc $\boxed{d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}}$

**b)** Montrons que : $2(p-r) = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)$ et $2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} -$

**0.5 pt** $\left(\frac{1}{m}-m\right)$

$P(p), Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs de $[AC], [AD]$ et $[OB]$ donc :

$2p = a+c, 2r = b$ et $2q = a+d$. Ce qui donne :

$2(p-r) = a+c-b = m-1+m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{i}{3}} - \frac{1}{m}+1$, donc :

$2(p-r) = m-1-\left(\frac{1}{m}-m\right)+\left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}} = \boxed{m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)}$

$2(q-r) = a+d-b = m-1+(m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{m}+1 = \boxed{(m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m}-m\right)}$

**0.25 pt** **c)** Montrons que : $q - r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$

On a :

$$\begin{aligned}2(p-r)e^{i\frac{\pi}{3}} &= (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}+\left(\frac{1}{m}-m\right)\left(e^{ii\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\\ &= (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}+\left(\frac{1}{m}-m\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}-\left(\frac{1}{m}-m\right)\\ &= 2(q-r)\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{q-r = (p-r)e^{i\frac{\pi}{3}}}$

**0.5 pt** **d)** Quelle est la nature du triangle $PQR$ ? (justifier votre réponse)

D'après la question précédente $Q$ est l'image de $P$ par la rotation de centre $R$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ Donc $\boxed{\text{le triangle } PQR \text{ est équilatéral (direct).}}$

## Exercice 3 : (3.5 pts)

**Rappel :**

$(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre d' unité $I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Pour tout réel $a$, on pose : $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Et soit $G = \{M(a)/a \in \mathbb{R}\}$.

**1 -** Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi(a) = M(a).$$

**0.5 pt** **a)** Montrons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

$(\forall a \in \mathbb{R})$ ; $(\forall b \in \mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned}
\varphi(a) \times \varphi(b) &= M(a) \times M(b) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+1 & 3 & -1 \\ 2b+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (a+1)+3(b+1)-(2b+3) & 9-6 & -3+2 \\ (2a+3)+6(b+1)-2(2b+3) & 18-12 & -6+4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b+1 & 3 & -1 \\ 2a+2b+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (a+b)+1 & 3 & -1 \\ 2(a+b)+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \\
&= M(a+b) = \varphi(a+b).
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a+b) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \ ; \ (\forall b \in \mathbb{R})}$,

D'où : $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

**0.5 pt** **b)** Montrons que $\varphi(\mathbb{R}) = G$ et déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

On a $\varphi(a) = M(a)$ pour tout $a$ réel, d'où :

$$\boxed{\begin{gathered} \varphi(\mathbb{R}) = \{\varphi(a)/a \in \mathbb{R}\} = \{M(a)/a \in \mathbb{R}\} = G \\ \varphi(\mathbb{R}) = G \end{gathered}}$$

Et puisque $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$, $G$ non vide car $I \in G$ et $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif, ainsi que $\varphi(\mathbb{R}) = G$, alors :

$$(G, \times) \text{ est un groupe commutatif.}$$

**0.5 pt** **c)** Déterminons $J$ l'élément neutre de $(G, \times)$.

Comme 0 est l'élément neutre du groupe commutatif $(\mathbb{R}, +)$, et $\varphi$ homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R})\times)$, alors : pour tout $a$ réel on a :

$$M(a) \times M(0) = \varphi(a) \times \varphi(0) = \varphi(a+0) = \varphi(a) = M(a)$$

Donc : $M(0)$ est l'élément neutre de $(G, \times)$.

Conclusion :

$$J = M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0+1 & 3 & -1 \\ 2 \times 0 + 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \text{ est l'élément neutre de } (G, \times).}$$

**0.5 pt** **d)** Déterminons l'inverse de $M(a)$ dans $(G, \times)$.

Puisque $(-a)$ est le symétrique de tout élément de $(\mathbb{R}, +)$, et $\varphi$ homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$, et par la suite $\varphi(-a)$ est le symétrique de $\varphi(a)$.

D'où : pour tout $a$ réel :

$$\boxed{[M(a)]^{-1} = \varphi(-a) = M(-a)}$$

**0.5 pt** **e)** Résolvons dans $(G, \times)$ l'équation : $M(1) \times X = M(2)$.

$$M(1) \times X = M(2) \Longrightarrow X = [M(1)]^{-1} \times M(2)$$

D'où : $X = M(-1) \times M(2) = M(-1+2) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Finalement :

$$\boxed{S = \{M(1)\}}$$

**0.25 pt** **2 - a)** Montrons que : $(\forall a \in \mathbb{R}) \;\; ; \;\; M(a) \times J = M(a) \times I$. On a : $M(a) \times J = M(a)$ car $J$ est l'élément neutre de $(G, \times)$

Ainsi que :

$$M(a) \times I = M(a) \text{ car } I \text{ est l'élément neutre de } (M_3(\mathbb{R}), \times)$$

Donc :

$$\boxed{M(a) \times J = M(a) \times I = M(a).}$$

**0.5 pt** **b)** En déduire que pour tout $a$ de $\mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

On a d'après la question précédente :

$$M(a) \times J = M(a) \times I \quad (\forall a \in \mathbb{R})$$

Supposons que :

$(\forall a \in \mathbb{R})$ ; $M(a)$ est inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

donc : $[M(a)]^{-1} \times (M(a) \times J) = [M(a)]^{-1} \times (M(a) \times I)$

d'où : $([M(a)]^{-1} \times M(a)) \times J = ([M(a)]^{-1} \times M(a)) \times I$

ou encore : $I \times J = I \times I$

d'où : $J = I$ (absurde car $J \neq I$)

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{M(a) \text{ n'est pas inversible dans } (M_3(\mathbb{R}), \times) \quad (\forall a \in \mathbb{R}).}$$

0.25 pt **c)** Vérifions que les matrices de la forme : $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$, sont solutions dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ de l'équation : $M(1) \times X = M(2)$.

Il suffit juste de vérifier que : $M(1) \times X = M(2)$.

$$\begin{aligned} M(1) \times X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+3(x+2)-(3x+5) & 9-6 & -1 \\ 5+6(x+2)-2(3x+5) & 18-12 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+1 & 3 & -1 \\ 2 \times 2 + 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = M(2) \end{aligned}$$

Conclusion :

Les matrices de la forme : $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}}$

$$\boxed{\text{sont solutions dans } (M_3(\mathbb{R}), \times) \text{ de l'équation : } M(1) \times X = M(2)}$$

## Exercice 4 : (3 pts)

0.5 pt **1 -** Montrons que 137 est un nombre premier.

$11^2 < 137 < 12^2$, soit $11 < \sqrt{137} < 12$

$137 \equiv 5[11]$, $137 \equiv 4[7]$, $137 \equiv 2[5]$, $137 \equiv 2[3]$ et $137 \equiv 1[2]$.

Aucun des nombres premiers inférieurs à 11 ne divise 137.

Donc :

137 est un nombre premier.

**2 -** Déterminons un couple $(u, v)$ de $\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$38u + 136v = 2.$$

**0.5 pt**

Remarquons que $38u + 136v = 2 \iff 19u + 68v = 1$

19 est premier et 19 ne divise pas 68 donc $19 \wedge 68 = 1$.

D'après le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, tel que $(u, v)$ est solution de l'équation $19u + 68v = 1$.

Comme il n'y a pas de solution évidente, on va utiliser l'algorithme d'Euclide.

On pose : $\boxed{a = 19}$ et $\boxed{b = 68}$

$68 = 19 \times 3 + 11$ soit $11 = b - 3a$

$19 = 11 \times 1 + 8$ soit $8 = a - 11 = a - (b - 3a) = 4a - b$

$11 = 8 \times 1 + 3$ soit $3 = 11 - 8 = (b - 3a) - (4a - b) = -7a + 3b$

$8 = 3 \times 2 + 2$ soit $2 = 8 - 2 \times 3 = (4a - b) - 2(-7a + 2b) = 18a - 5b$

$3 = 2 \times 1 + \boxed{1}$ soit $1 = 3 - 2 = (-7a + 3b) - (18a - 5b) = -25a + 7b$

$2 = 2 \times 1 + 0 \qquad -25a + 7b = 1$

D'où : $(-25, 7)$ est une solution de l'équation $19u + 68v = 1$.

Et par la suite :

$$\boxed{(-25, 7) \text{ est une solution de l'équation diophantienne } 38u + 136v = 2.}$$

**3 -** Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{38} \equiv 1[137]$.

**0.5 pt**

**a)** Montrons que $x$ et 137 sont premiers entre eux.

Supposons que $x$ et 137 ne sont pas premiers entre eux.

Puisque 137 est premier,

Alors : $137 \mid x$ soit $x \equiv 0[137]$

$$x \equiv 0[137] \Longrightarrow x^{38} \equiv 0[137],$$

$$\text{Or } x^{38} \equiv 1[137] \iff 1 \equiv x^{38}[137] \quad \text{(symétrie).}$$

$$: \begin{cases} 1 \equiv x^{38}[137] \\ \\ x^{38} \equiv 0[137] \end{cases} \Longrightarrow 1 \equiv 0[137] \quad \text{(Transitivité)}$$

$$\Longrightarrow 137 \mid 1 \text{ absurde}$$

D'où $\boxed{x \text{ et } 137 \text{ sont premiers entre eux.}}$

**0.25 pt** **b)** Montrons que $x^{136} \equiv 1[137]$.

137 est un nombre premier, et $x \wedge 137 = 1$

D'après le petit théorème de Fermat : $x^{137-1} \equiv 1[137]$.

Donc : $\boxed{x^{136} \equiv 1[137]}$

**0.5 pt** **c)** Montrons que $x^2 \equiv 1[137]$.

On a : $x \wedge 137 = 1$

$(-25, 7)$ étant une solution particulière de l'équation diophantienne $38u+136v = 2$ donc :

$$38 \times (-25) + 136 \times 7 = 2 \Longrightarrow 38 \times 25 + 2 = 136 \times 7$$

Et comme : $x \wedge 137 = 1$

alors : $x^{38\times25+2} \equiv x^{136\times7}[137]$

soit $\left(x^{38}\right)^{25} \times x^2 \equiv \left(x^{136}\right)^7 [137]$

Or : $x^{38} \equiv 1[137]$ (Hypothèse question 3)

et $x^{136} \equiv 1[137]$ (Question3-b)

alors : $1^{25} \times x^2 \equiv 1^7[137]$

Finalement : $\boxed{x^2 \equiv 1[137]}$

**0.5 pt** **4 -** Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(E) : x^{19} \equiv 1[137]$.

$$\begin{cases} x^{19} \equiv 1[137] \\ \\ 1 \equiv x^2[137] \end{cases} \Longrightarrow x^{19} \equiv x^2[137]$$

On a :

$$\begin{aligned} x^{19} \equiv 1[137] &\Longrightarrow \left(x^{19}\right)^2 \equiv 1^2[137] \\ &\Longrightarrow x^{38} \equiv 1[137] \\ &\Longrightarrow x^2 \equiv 1[137] \quad \text{(Question précédente } 3c) \\ &\Longrightarrow x^2 - 1 \equiv 0[137] \\ &\Longrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0[137] \\ &\Longrightarrow x - 1 \equiv 0[137] \text{ ou } x + 1 \equiv 0[137] \\ &\Longrightarrow x \equiv 1[137] \text{ ou } x \equiv -1[137] \end{aligned}$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned} x \equiv 1[137] &\Longrightarrow x^{19} \equiv 1^{19}[137] \\ &\Longrightarrow x^{19} \equiv 1[137] \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{x \equiv 1[137] \text{ est solution de } (E).}$

$$\begin{aligned} x \equiv -1[137] &\Longrightarrow x^{19} \equiv (-1)^{19}[137] \\ &\Longrightarrow x^{19} \equiv -1[137] \end{aligned}$$

Or $(-1) \not\equiv 1[137]$ car $137 \nmid 2$

D'où : $x \equiv -1[137]$ n'est pas solution de $(E)$.

Conclusion : $\boxed{S = \{x \in \mathbb{Z} / x = 1 + 137k, k \in \mathbb{Z}\}}$

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2023

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ La durée de l'épreuve est de 4 heures ;

✓ L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé ;

✓ Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat ;

✓ L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

## COMPOSANTES DU SUJET

***L'épreuve comporte cinq exercices indépendants. :***

✓ L'EXERCICE 1 se rapporte à l'analyse ........................................(7.75 pts)
✓ L'EXERCICE 2 se rapporte à l'analyse ........................................ **(2.25pts)**
✓ L'EXERCICE 3 se rapporte aux nombres complexes ............................(3.5 pts)
✓ L'EXERCICE 4 se rapporte à l'arithmétique ....................................(3 pts)
✓ L'EXERCICE 5 se rapporte aux structures algébriques ......................... (**3.5** pts)

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$
♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : (7.75 points)

**Partie I** :

0.5 pt 0.5 pt

**1 - a)** Montrer que : $\forall t \in \left[0,+\infty\right[ ; \dfrac{4}{(2+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

**b)** En déduire que : $\forall x \in \left[0,+\infty\right[ ; \dfrac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+2x}{1+x}\right)$

**2 -** Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

0.5 pt Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{-1}{2}$

**Partie II** :

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in ]0,+\infty\left[ ; f(x) = g(x)e^{-x}\right.$$

On note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 pt **2 - a)** Montrer que $f$ est continue à droite en $0$

0.25 pt **b)** Vérifier que : $\forall x \in ]0,+\infty\left[ ; \dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right) g(x) + \left(\dfrac{g(x)-1}{x}\right)\right.$

0.5 pt **c)** En déduire que $f$ est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

0.75 pt **3 -** Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis que :

$$\forall x \in ]0,+\infty\left[ ; f'(x) = \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{-x}\right.$$

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $\forall x \in ]0,+\infty\left[ ; \quad -\dfrac{3}{2} < \dfrac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0\right.$

0.25 pt **b)** En déduire que : $\forall x \in ]0,+\infty\left[ ; \quad -\dfrac{3}{2} < f'(x) < 0\right.$

0.25 pt **5 - a)** Dresser le tableau de variations de $f$

0.75 pt **b)** Construire la courbe $(C)$ en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse $0$ . (On prendra $\|\vec{i}\| = 2$ cm )

**Partie III**

0.5 pt **1 -** Montrer que l'équation d'inconnue $x$ : $f(x) = 3x$, admet une unique solution $\alpha$ dans $]0,+\infty[$

**2 -** Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n)$$

0.5 pt a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 0$

0.5 pt b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0.5 pt c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

0.25 pt d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$

## Exercice 2 : (2.25 points)

On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit $(\Gamma)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$, on note $M_k$ le point de la courbe $(\Gamma)$ de coordonnées $\left(\dfrac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 pt **1 -** a) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \ldots; (n-1)\} \exists c_k \in \left]\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \dfrac{1}{n}e^{c_k}$

0.25 pt b) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \ldots; (n-1)\}; \quad M_kM_{k+1} = \dfrac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2c_k}}$

($M_kM_{k+1}$ désigne la distance de $M_k$ à $M_{k+1}$ )

0.5 pt c) En déduire que : $\forall k \in \{0; 1; \ldots; (n-1)\}; \quad \dfrac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leqslant M_kM_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1])}{n}}}$

**2 -** Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} M_kM_{k+1}$

0.5 pt a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$

0.5 pt b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}dx$

## Exercice 3 : (3.5 points)

On considère le nombre complexe : $u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

0.5 pt **1 -** a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$

0.25 pt b) Montrer que : $\dfrac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{1\frac{\pi}{12}}$

0.25 pt c) En déduire que : $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

0.5 pt d) Montrer que : $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{\frac{i\pi}{12}}$

**2 -** On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définics par :

$$x_0 = 1, y_0 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}); \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2-\sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

0.5 pt a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n + iy_n = u^n$

0.5 pt b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad x_n = \dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$

**3 -** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e_2})$ Pour tout entier naturel $n$, on note $A_n$ le point d'affixe $u^n$

0.5 pt **a)** Déterminer les entiers $n$ pour lesquels les points $O, A_0$ et $A_n$ sont alignés.

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout entier $n$, le triangle $OA_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_n$

## Exercice 4 : ( 3 points )

Soit $p$ un nombre premier impair. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^2 \equiv 2[p]$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$

0.25 pt **b)** En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

(On remarque que : $\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right) = 2^{p-1}-1$)

**2 -** Soit $x$ une solution de l'équation $(E)$

0.5 pt **a)** Montrer que $p$ et $x$ sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ (On pourra utiliser le théorème de Fermat)

0.25 pt **c)** Montrer que pour tout $k \in \{1,2,\ldots,p-1\}, p$ divise $C_p^k$

(On rappelle que : $(\forall k \in \{1,2,\ldots,p-1\}) \quad C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$)

0.25 pt **3 - a)** En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

( $i$ étant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$ )

0.5 pt **b)** On admet que : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k} + i\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}}(-1)^k C_p^{2k+1}$

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1[p]$ (on pourra utiliser la question3-)

0.5 pt **4 -** En déduire que si $p \equiv 5[8]$ alors l'équation $(E)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

## Exercice 5 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}_{\mathbf{R}}), +, x)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

**Partie I :**

0.5 pt **1 -** Montrer que $E$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

0.25 pt **2 -** Montrer que $E$ est un sous- espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que : $\forall\,(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4; M(x,y)\times M\,(x',y') = M\,(xx'+3yy', xy'+yx')$

0.5 pt **b)** En déduire que $(E,+,x)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 pt **4 - a)** Vérifier que : $M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1) = O$

0.25 pt **b)** En déduire que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps.

**Partie II :**

Soient $F = \left\{x+y\sqrt{3}/(x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$ et $G = \left\{M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

0.25 pt **1 -** Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2; x+y\sqrt{3}=0$ sietseulementsi $(x=0$ et $y=0)$

0.25 pt **2 -** Montrer que $F-\{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$

**3 -** Soit $\varphi$ l'application définie de $F-\{0\}$ vers $E$ par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2-\{(0,0)\}; \varphi(x+y\sqrt{3}) = M(x,y)$$

0.25 pt **a)** Vérifier que : $\varphi(F-\{0\}) = G-\{O\}$

0.25 pt **b)** Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(F-\{0\},\times)$ vers $(E,\times)$

0.25 pt **c)** En déduire que $(G-\{O\},\times)$ est un groupe commutatif.

0.25 pt **4 -** Montrer que $(G,+,\times)$ est un corps commutatif.

$\boxed{\text{FIN}}$

R O Y A U M E D U M A R O C

# Correction

**Baccalauréat Sciences Mathématiques A-B**

**Session : NORMAL 2023**

## MATHÉMATIQUES

### Exercice 1 : (7.75 pts)

### PARTIE I

0.5 pt

**1 - a) Montrons que** $\forall t \in [0,+\infty[ \; \dfrac{4}{(1+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

soit $t \in [0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t} - \frac{4}{(2+t)^2} &= \frac{(2+t)^2 - 4(1+t)}{(1+t)(2+t)^2} \\
&= \frac{4+4t+t^2-4-4t}{(1+t)(2+t)^2} \\
&= \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2}
\end{aligned}$$

et comme $t \in [0,+\infty[$ donc $\dfrac{t^2}{(1+t)(2+t)^2} \geq 0$

d'où $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{4}{(2+t)^2} \geq 0$

donc $\forall t \in [0,+\infty[ \; \dfrac{4}{(2+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t}$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right) - \frac{1}{1+t} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{2}{1+t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1+t)^2+1-2(1+t)}{(1+t)^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1+t-1)^2}{(1+t)^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{t^2}{(1+t)^2}
\end{aligned}$$

et comme $\forall t \in [0,+\infty[\ \frac{1}{2}\frac{t^2}{(1+t)^2} \geq 0$

alors $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right) - \frac{1}{1+t} \geq 0$

D'où $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$ pour tout $t \in [0,+\infty[$

$\boxed{\text{Finalement } \forall t \in [0,+\infty[\ \frac{4}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)}$

**0.5 pt**

**b) Déduisons que** $\forall x \geq 0 \quad \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

on a d'après la question précédente

$\forall t \in [0,+\infty[\ \frac{4}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$

donc $\forall x \in [0,+\infty[$

$$\int_0^x \frac{4}{(1+t)^2}dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}dt \leq \int_0^x \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$$

(les fonctions a intégrer sont continues)

cad

$$\left[-\frac{4}{2+t}\right]_0^x \leq \Big[\ln(1+t)\Big]_0^x \leq \frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{1+t}\right]_0^x$$

donc

$$-\frac{4}{2+x}+2 \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{1+x}+1\right)$$

D'où $\forall x \geq 0$

$$\frac{-4+2x+4}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+x-1+x+1}{1+x}\right)$$

$\boxed{\text{Finalement } \forall x \geq 0 \quad \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)}$

**0.5 pt**

**2 - Montrons que** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}$

on a $\frac{g(x)-1}{x} = \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}-1}{x} = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

d'après la question 1) b)

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$$

donc

$$\forall x \geq 0 \qquad -\frac{1}{2+x} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)}$$

et comme $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2+x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2(1+x)}\right) = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Alors } \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}}$

## Partie II

0.5 pt

**1 - Calculons la limite** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}(g(x).e^{-x})\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\frac{1}{e^x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x(1+\frac{1}{x}))}{x}\frac{1}{e^x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}\right)\frac{1}{e^x}\\ &= 0\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$.

Interprétation géométrique

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Donc $(C_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$

0.25 pt

**2 - a) Montrons que $f$ est continue à droite en** $0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}(g(x).e^{-x})\\ &= \lim_{x\to0^+}(\frac{\ln(x+1)}{x}.e^{-x})=1\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$ et $t\to e^t$ est continue en $0$.

donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

D'où $f$ est continue à droite en $0$.

0.25 pt

**b) vérifions que** $\forall x\in]0,+\infty[;\ \frac{f(x)-1}{x}=\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x)+\frac{g(x)-1}{x}$

soit $x\in]0,+\infty[$

Méthode 1

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x)+\frac{g(x)-1}{x} &= \frac{e^{-x}g(x)-g(x)+g(x)-1}{x}\\ &= \frac{e^{-x}g(x)-1}{x}=\frac{f(x)-1}{x}\end{aligned}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-1}{x} &= \frac{e^{-x}g(x)-1}{x}\\ &= \frac{e^{-x}g(x)-g(x)+g(x)-1}{x}\\ &= \frac{e^{-x}.g(x)-g(x)}{x}+\frac{g(x)-1}{x}\\ &= \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x)+\frac{g(x)-1}{x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in ]0,+\infty[;\ \frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x)+\frac{g(x)-1}{x}}$$

**0.5 pt**

**c) Déduisons que $f$ est dérivable à droite en $0$ et déterminons $f'_d(0)$**

on a d'après ce qui précède $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{g(x)-1}{x}) = -\frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

de plus

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{e^{-x}-1}{-x}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{t}-1}{t} = -1\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-x}-1}{x}g(x)+\frac{g(x)-1}{x}\right)\\ &= -1\times 1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{3}{2}$ $(f(0)=1)$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = -\frac{3}{2}}$$

**0.75 pt**

**3 - Montrons que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis que,**

$\forall x \in ]0,+\infty[;\ f'(x) = \frac{x-(x+1)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x}$

on a $x \mapsto x+1$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ donc $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

de plus $x \mapsto xe^{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (produit) et $\forall x \in ]0,+\infty[\ xe^{x} \neq 0$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable } ]0,+\infty[ \text{ ( comme quotient de deux fonctions dérivables)}}$$

de plus $\forall x \in ]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x)=\left(\frac{\ln(1+x)}{x}e^{-x}\right)' &= \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'.e^{-x}+\frac{\ln(1+x)}{x}.(e^{-x})' \\ &= \frac{\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2}.e^{-x}-\frac{\ln(1+x)}{x}.e^{-x} \\ &= \left(\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x}\right).e^{-x} \\ &= \frac{x-(1+x)\ln(1+x)-x(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x} \\ &= \frac{x-(x^2+2x+1)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x} \\ &= \frac{x-(x+1)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in ]0,+\infty[;\ f'(x)=\frac{x-(x+1)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x}}$$

0.5 pt

**4 - a) Montrons que** $\forall x \in ]0,+\infty[\ \frac{-3}{2}<\frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}<0$

on a d'après la partie I) 1b)

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{2x}{2+x}\leq \ln(1+x)\leq \frac{1}{2}\frac{x^2+2x}{1+x}$$

donc

$$\forall x > 0 \quad \frac{2x}{2+x}\leq \ln(1+x)\leq \frac{1}{2}\frac{x^2+2x}{1+x}$$

donc

$$\forall x>0 \quad -\frac{1}{2}(1+x)(x^2+2x)\leq -(1+x)^2\ln(1+x)\leq -\frac{2x(1+x)^2}{2+x}$$

$$\Rightarrow \forall x>0 \quad x-\frac{1}{2}(1+x)(x^2+2x)\leq x-(1+x)^2\ln(1+x)\leq x-\frac{2x(1+x)^2}{2+x}$$

$$\Rightarrow \forall x>0 \quad \frac{2x-x^2-2x-x^3-2x^2}{2}\leq x-(1+x)^2\ln(1+x)\leq \frac{2x+x^2-2x-4x^2-2x^3}{2+x}$$

$$\Rightarrow \forall x>0 \quad \frac{-x^3-3x^2}{2x^2(1+x)}\leq \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\leq \frac{-2x^3-3x^2}{(2+x)x^2(1+x)}$$

$$\Rightarrow \forall x>0 \quad \frac{-x-3}{2(1+x)}\leq \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\leq \frac{-2x-3}{(2+x)(1+x)}$$

on a $\forall x>0\ \frac{-2x-3}{(2+x)(1+x)}<0$

donc $\forall x>0\ \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}<0$

montrons maintenant que $\forall x>0\ \frac{-3}{2}<\frac{-x-2}{2(1+x)}$

soit $x > 0$

$$\frac{-x-3}{2(1+x)} + \frac{3}{2} = \frac{-x-3+3+3x}{2(1+x)} = \frac{x}{1+x} > 0$$

donc $\forall x > 0 \ \frac{-3}{2} < \frac{-x-2}{2(1+x)}$

D'où $\frac{-3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$ pour tout $x > 0$

$\boxed{\text{finalement } \forall x > 0\,;\ \frac{-3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0}$

0.25 pt **b) Déduisons que** $\forall x \in ]0,+\infty[ \ \frac{-3}{2} < f'(x) < 0$

on a $\forall x \in ]0,+\infty[ \ e^{-x} > 0$ et $x > 0$ donc $-x < 0$ d'où $e^{-x} < 1$

$\forall x \in ]0,+\infty[ \ 0 < e^{-x} < 1$

et on a d'après ce qui précéde

$\forall x \in ]0,+\infty[ \ \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

donc $\frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x} > \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} > \frac{-3}{2}$

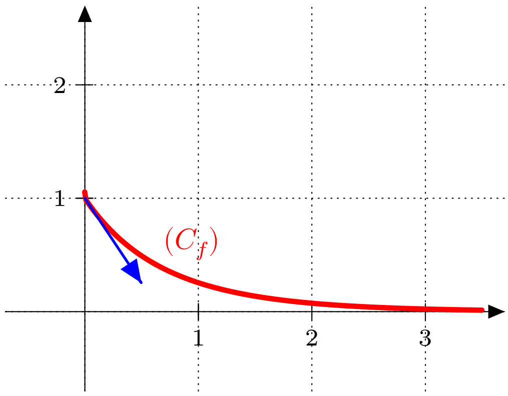
et $\frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.e^{-x} < 0$

$\boxed{\text{D'où } \forall x \in ]0,+\infty[ \ \frac{-3}{2} < f'(x) < 0}$

0.25 pt **5 - a)** $\forall x \in ]0,+\infty[ \ f'(x) < 0$ donc

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $1 \searrow 0$ |

0.75 pt




**b)**

## Partie III

0.5 pt **1 - Montrons que l'équation** $f(x) = 3x$ **admet une unique solution** $\alpha$ **dans** $]0,+\infty[$

Soit l'équation : $f(x) = 3x \iff f(x) - 3x = 0$

posons $h(x) = f(x) - 3x$ avec $x \in ]0,+\infty[$.

$h$ est continue sur $]0,+\infty[$ (comme somme de deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$).

de plus $h$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$).

Et on a : $\forall x \in ]0,+\infty[; \quad h'(x) = f'(x) - 3$

On a d'après la partie $II)4)b)$ $\forall x \in ]0,+\infty[; \quad f'(x) < 0$.

Donc $\forall x \in ]0,+\infty[; \quad h'(x) < 0$

D'où $h$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Donc $h$ réalise une bijection définie sur $J$ avec :

$$\begin{aligned} J &= h\left(]0,+\infty[\right) \\ &= \left]\lim_{x\to+\infty} h(x), \lim_{x\to+0^+} h(x)\right[ \\ &= ]-\infty, 1[ \end{aligned}$$

Et comme $0 \in ]-\infty, 1[$, alors $\exists! \alpha \in ]0,+\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$

D'où $\exists! \alpha \in ]0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 3\alpha$

Finalement l'équation $f(x) = 3x$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0,+\infty[$

**0.5 pt** **2 - a) Montrons que :** $\forall n \in \mathbb{N}$ **;** $u_n \geq 0$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \beta$ et $\beta \in \mathbb{R}^+$

Donc $u_0 \geq 0$

D'où la proposition est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$

On a $\forall x \in ]0,+\infty[; \quad f(x) \in ]0,1]$

Et puisque $u_n \in ]0,+\infty[$, alors on bien $f(u_n) \in ]0,1]$

Donc $f(u_n) > 0$, d'où $f(u_n) \geq 0$

Alors $u_{n+1} > 0$

Finalement d'après le principe de récurrence on a : $\forall n\mathbb{N}; \quad u_n \geq 0$

**0.5 pt** **b) Montrons que :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

On pose $R(x) = \dfrac{1}{3}f(x)$, alors $u_{n+1} = R(u_n)$

On a la fonction $R$ est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités $\alpha$ et $u_n$.

Et la fonction $R$ est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités $\alpha$ et $u_n$.

Donc d'après **Théorème des accroissement finis** il exist $c$ compris entre $\alpha$ et $u_n$ tel que :

$$\begin{aligned} |R(u_n) - R(\alpha)| &= |R'(c)(u_n - \alpha)| \\ &= |R'(c)| \times |u_n - \alpha| \end{aligned}$$

Et comme $u_{n+1} = R(u_n)$ et $R(\alpha) = \dfrac{1}{3}f(\alpha) = \alpha$ et $\forall x \in ]0,+\infty[; \quad |f'(x)| < \dfrac{3}{2}$, donc $\forall x \in ]0,+\infty[; \quad |R'(x)| < \dfrac{1}{2}$

Et on a $c \in ]0,+\infty[$ car $(\alpha, u_n) \in ]0,+\infty[$, donc $|R'(c)| < \dfrac{1}{2}$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

**Méthode : 2**

On $f$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et d'après la question $II)4)b)$

$\forall x \in ]0,+\infty[; \quad |f'(x)| < \dfrac{3}{2}.$

Donc d'après **Théorème l'inégalité des accroissements finis** on a : $(\forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2)$ , $|f(x)| -$
$\dfrac{3}{2}|u_n - \alpha|$

Et comme $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n > 0$ et $\alpha \in [0,+\infty[$, alors

$$\begin{aligned} |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{3}{2}\,|u_n - \alpha| &\implies |3u_{n+1} - 3\alpha| \leq \frac{3}{2\,|u_n - \alpha|} \\ &\implies |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha| \end{aligned}$$

**Donc** $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0.5 pt

**c) Montrons que :** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

Pour $n = 0$ on a $|u_0 - \alpha| = |\beta - \alpha|$ et $\dfrac{1}{2^0}|\beta - \alpha| = |\beta - \alpha|$

Donc $|u_0 - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^0}|\beta - \alpha|$

D'où la proposition est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que : $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

Et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}|\beta - \alpha|$

On a d'après l'hypothèse $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

Donc $\dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}|\beta - \alpha|$

Et comme $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|u_n - \alpha|$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}|\beta - \alpha|$

**D'où d'après le principe de récurrence on a :** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

0.25 pt

**d) Déduisons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$**

on a $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}|\beta - \alpha| = 0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - \alpha| = 0$

$\boxed{\text{finalement } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$

## Exercice 2 : (2.25 pts)

**Exercice 2 (Analyse)**

0.5 pt

**1 - a) Montrons que** $\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}\ \exists c_k \in ]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ **tel que** $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}e^{c_k}$

soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$

on a la fonction $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc $f$ est dérivable sur $]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ et continue sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$

D'où d'après T.A.F $\exists c_k \in ]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ tel que $f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n}) = (\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}).f'(c_k)$

càd $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}e^{c_k}$ (car $f'(x) = e^x$ et $\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$)

**0.25 pt**

**b) Montrons que** $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}$ $M_kM_{k+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

soit $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$

on a

$$\begin{aligned} M_kM_{k+1} &= \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + (y_{k+1}-y_k)^2} \\ &= \sqrt{(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n})^2 + (e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}})^2} = \sqrt{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n}e^{c_k})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2}(1+\frac{1}{n^2}e^{2c_k})} = \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}} \end{aligned}$$

**0.5 pt**

**c) Déduisons que** $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}$; $\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < M_kM_{k+1} < \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

on a

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} < c_k < \frac{k+1}{n} &\implies \frac{2k}{n} < 2c_k < \frac{2(k+1)}{n} \\ &\implies 1+e^{\frac{2k}{n}} < 1+e^{2c_k} < 1+e^{\frac{2(k+1)}{n}} \\ &\implies \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < \sqrt{1+e^{2c_k}} < \sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}} \\ &\implies \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}} < \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}} \\ &\implies \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < M_kM_{k+1} < \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}} \end{aligned}$$

**0.5 pt**

**2 - a) Vérifions que** $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < S_n < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

on a d'après 1) c) $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < M_kM_{k+1} < \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < \sum_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1} < \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < S_n < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

et comme

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2i)}{n}}} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$$

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} < S_n < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

**0.5 pt**

**b) Montrons que** $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}dx$

On a d'après ce qui précède $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

Et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} = \dfrac{1-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(0+\dfrac{(1-0)k}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ avec $f(x)=\sqrt{1+e^{2x}}$

d'autre part $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n-1}}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

Et comme $f$ est continue sur $[0,1]$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\\ &= \int_0^1 f(x)dx\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}dx}$$

## Exercice 3 : (3.5 pts)

0.5 pt **1 - a) Écrivant sous forme exponentielle les nombres complexes : $1-i$ et $1+\sqrt{3}i$**

On a :

$$\begin{aligned}1-i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}1+i\sqrt{3} &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

0.25 pt **b) Montrons que : $\dfrac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$**

On a :

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\times 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}\\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= e^{i\frac{\pi}{12}}\end{aligned}$$

**0.25 pt**

**c) Déduisons que :** $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} &= \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Et comme

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}\\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}}$

**0.5 pt**

**d) Montrons que :** $u = (\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

**Méthode : 1**

On a :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}} &= (\sqrt{6}-\sqrt{2}) \times \frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \times \frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} \\
&= (\sqrt{3}-1) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i(\sqrt{3}-1) \times \frac{(\sqrt{3}-1)\times}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}^2-1^2}{2} + i\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} \\
&= 1+(2-\sqrt{3})i \\
&= u
\end{aligned}$$

**Méthode ; 2**

On a :

$$\begin{aligned}
u &= 1+(2-\sqrt{3})i \\
&= 1+i\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
&= 1+i\frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} \\
&= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \times e^{i\frac{\pi}{12}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} \times e^{i\frac{\pi}{12}} \\
&= \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}
\end{aligned}$$

0.5 pt **2 - a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + iy_n = u^n$**

Pour $n = 0$ on a : $x_0 + iy_0 = 1 + i.0 = 1$ et $u^0 = \left(1+i(2-\sqrt{3})\right)^0 = 1$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $x_n + iy_n = u^n$ et montrons que $x_{n+1} + iy_{n+1} = u^{n+1}$

On a :

$$\begin{aligned}
x_{n+1}+iy_{n+1} &= x_n-(2-\sqrt{3})y_n+i\left((2-\sqrt{3})x_n+y_n\right)\\
&= x_n+iy_n+i(2-\sqrt{3})x_n+(2-\sqrt{3})i^2y_n\\
&= x_n+iy_n+i(2-\sqrt{3})(x_n+iy_n)\\
&= (x_n+iy_n)(1+i(2-\sqrt{3}))\\
&= u^n.u \quad \text{(d'aprés l'hypothèse } u^n=x_n+iy_n\text{)}\\
&= u^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc d'après le principe de récurrence on a : $(\forall n\in\mathbb{N});\ x_n+iy_n=u^n$

**0.5 pt** **b) Déduisons que pour tout** $n\in\mathbb{N}:\ x_n=\dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}$ **et** $y_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}$

On a :

$$\begin{aligned}
u &= 1+(2-\sqrt{3})i\\
&= 1+i\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\\
&= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}.e^{i\frac{\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
u^n &= \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}.e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^n\\
&= \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}.e^{i\frac{n\pi}{12}}\\
&= \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)\right)\\
&= x_n+iy_n
\end{aligned}$$

Alors $x_n=\dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}$ et $y_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n}$

**0.5 pt** **3 - a) Déterminons les entiers** $n$ **pour lesquels les points** $O, A_0$ **et** $A_n$ **sont alignés.**

$$\begin{aligned} O, A_0 \text{ et } A_n \text{ sont alignées} &\iff \frac{u^n - 0}{u^0 - 0} \in \mathbb{R} \\ &\iff u^n \in \mathbb{R} \\ &\iff Im(u^n) = 0 \\ &\iff \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^n} = 0 \\ &\iff n.\frac{\pi}{12} \equiv 0[\pi] \\ &\iff n.\frac{\pi}{12} = k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \\ &\iff n = 12.k \end{aligned}$$

0.5 pt **b) Montrons que pour tout entier $n$, le triangle $OA_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_n$**

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{0 - u^n} &= \frac{-u^n(1-u)}{-u^n} \\ &= 1 - u \\ &= (\sqrt{3} - 2)i \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{u^{n+1} - u^n}{0 - u^n} \in i\mathbb{R}$

$\boxed{\text{D'où le triangle } OA_nA_{n+1} \text{ est rectangle en } A_n}$

## Exercice 4 : (3 pts)

0.25 pt **1 - a) Montrons que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$**

On a $p$ un nombre premier impair.

Donc $p \neq 2$ et $p \geq 3$

D'où $p \wedge 2 = 1$

$\boxed{\text{Alors d'après } \textbf{le petit théorème de fermat } 2^{p-1} \equiv 1[p]}$

0.25 pt **b) Montrons que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$**

On a d'après la question précède $2^{p-1} \equiv 1[p]$

$$\begin{aligned} 2^{p-1} \equiv 1[p] &\implies 2^{p-1} - 1 \equiv 0[p] \\ &\implies \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0[p] \quad \text{(d'après la remarque)} \\ &\implies p / \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \end{aligned}$$

Et comme $p$ est premier, alors $p/\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$ ou $p/\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$

Donc $2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0[p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0[p]$

$\boxed{\text{D'où } 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p] \text{ ou } 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]}$

0.5 pt **2 - a) Montrons que $p$ et $x$ sont premiers entre eux**

Soit $d = p \wedge x$

Donc

$$\begin{aligned} d = p \wedge x &\implies d/p \text{ et } d/x \\ &\implies d/p \text{ et } d/x^2 - pk \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\implies d/p \text{ et } d/2 \quad \text{car : } x^2 \equiv 2[p] \text{ d'où } x^2 = 2 + pk \\ &\implies d/p \wedge 2 \\ &\implies d/1 \quad (\text{car } p \wedge 2 = 1) \end{aligned}$$

Et comme $d > 0$, alors d=1,

$\boxed{\text{Alors } p \wedge x = 1}$

0.5 pt **b) Montrons que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$**

On a : $p \wedge x = 1$, donc d'après **Théorème de Fermat**

$$x^{p-1} \equiv 1[p] \tag{1}$$

Et comme $x^2 \equiv 2[p]$

Alors $(x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}}[p]$ (car $\dfrac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$)

D'où

$$x^{p-1} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}}[p] \tag{2}$$

Finalement d'après (1) et (2) on a : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$

**0.25 pt**

**3 - Montrons que :** $\forall k \in \{1,2,3,...,p-1\}$ $p$ **divise** $C_n^k$

On a $\forall k \in \{1,2,3,...,p-1\} \quad C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$, donc $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$

D'où $p/kC_p^k$

Et comme $p \wedge k = 1$ (car $p$ est premier et $k < p$)

Donc d'après **Théorème de Gauss** $p/C_p^k$

**0.25 pt**

**4 - a) Montrons que :** $(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right)$

On a : $1+i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc

$$\begin{aligned}(1+i)^p &= \sqrt{2}^p\left(\cos\left(p.\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(p.\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p.\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p.\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Donc $(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right)$

**0.5 pt**

**b) Montrons que :** $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ **et** $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right) \equiv 1[p]$

On a $(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right)$

Et on admet que $(1+i)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k} + i\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k+1}$

Donc par identification on a : $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k}$ et $2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k+1}$

Et comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k}$ est une somme d'entiers relatifs,

Donc $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$

Et d'après la question (3) $\forall k \in \{1,2,..,p-1\},\ p/C_p^k$

Et on a,$0 \leq k \leq \dfrac{p-1}{2}$, donc $0 \leq 2k \leq p-1$

Donc $p/C_p^{2k}$ c-à-d $C_p^{2k} \equiv 0[p]$

Par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k} \equiv 0[p]$

D'où $(-1)^0C_p^0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k} \equiv (-1)^0C_p^0[p]$

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k} \equiv 1[P]$

Donc $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p.\dfrac{\pi}{4}\right) \equiv 1[p]$

0.5 pt **5 - Déduisons que si $p \equiv 5[8]$ alors l'équation (E) n'a pas de solution.**

On suppose que $p \equiv 5[8]$, donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 5 + 8k$

Alors

$$\begin{aligned}
2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p.\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1[p] &\Longrightarrow 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{(5+8k)\pi}{4}\right) \equiv 1[p] \\
&\Longrightarrow 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right) \equiv 1[p] \\
&\Longrightarrow 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \equiv 1[p] \\
&\Longrightarrow -2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1[p] \\
&\Longrightarrow 2^{\frac{p}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \equiv -1[p] \\
&\Longrightarrow 2^{\frac{p}{2}} \times \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \equiv -1[p] \\
&\Longrightarrow 2^{\frac{\pi-1}{2}} \equiv -1[p]
\end{aligned}$$

Et comme $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ (d'après la question (2)-b), donc $1 \equiv -1[p]$

Alors $2 \equiv 0[p]$ **absurde**

D'où l'équation (E) n'a pas de solution.

## Exercice 5 : (3.5 pts)

### Partie I

0.5 pt **1 - Montrons que $E$ est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$**

Soit $E = \{M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

On a bien $E \subset M_2(\mathbb{R})$ et $E \neq \emptyset$ car $M(0,0) = O_2 \in E$

Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux éléments de $E$.

On a :

$$\begin{aligned} M(a,b)-M(c,d) &= \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d & d \\ 2d & c-d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b-c-d & b-d \\ 2b-2d & a-b-c+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-c+b-d & b-d \\ 2(b-d) & a-c-(b-d) \end{pmatrix} \\ &= M(a-c,b-d) \end{aligned}$$

Et comme $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, on a $(a-c,b-d)\in\mathbb{R}^2$, Alors $M(a-c,b-d)\in E$

D'où $E$ est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 pt **2 - Montrons que $E$ est un sous espace vectoriel de** $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

On a $E\subset M_2(\mathbb{R})$ et $E\neq\emptyset$

Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux éléments de $E$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha M(a,b)+\beta M(c,d) &= \alpha\begin{pmatrix} a+b & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} c+d & d \\ 2d & c-d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a+\beta c+\alpha b+\beta d & \alpha b+\beta d \\ 2(\alpha b+\beta d) & \alpha a+\beta c-(\alpha b+\beta d) \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha a+\beta c,\alpha b+\beta d)\in E \\ &\quad \text{car } \forall(\alpha,\beta,a,b,c,d)\in\mathbb{R}^6 \text{ on a } (\alpha a+\beta c,\alpha b+\beta d)\in\mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Donc $E$ est un sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.25 pt **3 - a) Vérifions** $\forall(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4;\ M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'+3yy',xy'+x'y)$

Soient $(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4$.

$$
\begin{aligned}
M(x,y)\times M(x',y') &= \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y')+2yy' & (x+y)y'+y(x'-y') \\ 2y(x'+y')+(x-y)2y' & 2yy'+(x-y)(x'-y') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xx'+3yy'+xy'+x'y & xy'+x'y \\ 2(xy'+x'y) & xx'+3yy'-(xy'+x'y) \end{pmatrix} \\
&= M(xx'+3yy', xy'+x'y)
\end{aligned}
$$

Donc $\forall (x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4;\ M(x,y)\times M(x',y') = M(xx'+3yy', xy'+x'y)$

**0.5 pt**

**b) Déduisons que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.**

On a $(E,+)$ est un groupe commutatif.

De plus $E\subset M_2(\mathbb{R})$ et que les deux lois $+$ et $\times$ sont stables dans $E$

Et comme la loi $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans $E$.

Comme $M(1,0)=I$ est l'élément neutre de $(M_2(\mathbb{R},\times)$ et $M(1,0)\in E$, donc $I$ est l'élément neutre de $(E,\times)$

De plus $\forall (x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$

$$
\begin{aligned}
M(x,y)\times M(x',y') &= M(xx'+3yy', xy'+yx') \\
&= M(x'x+3y'y, x'y+y'x) \\
M(x',y')\times M(x,y)
\end{aligned}
$$

Donc la loi $\times$ est commutative dans $E$.

Finalement $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

**0.25 pt**

**4 - a) Vérifiant que :** $M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1)=O$

$$
\begin{aligned}
M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1) &= M(\sqrt{3}(-\sqrt{3})+3\times1\times1, \sqrt{3}\times1+1\times(-\sqrt{3})) \\
&= M(-3+3, \sqrt{3}-\sqrt{3}) \\
&= M(0,0)
\end{aligned}
$$

Donc $M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1)=O$

0.25 pt **b) Déduisons que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps.**

Comme $M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1)=O$ et que $M(\sqrt{3},1)\neq O$ et $M(-\sqrt{3},1)\neq O$

Alors l'anneau $(E,+,\times)$ n'est pas intègre.

D'où $(E,+,\times)$ n'est pas un corps. (car tous les anneaux intègres)

## Partie II

Soient $F=\{x+y\sqrt{3}/\ (x,y)\in\mathbb{Q}^2\}$ et $G=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y\end{pmatrix}/\ (x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

0.25 pt **1 - Montrons que :** $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2;\ x+y\sqrt{3}=0$ **si et seulement si** $(x=0,y=0)$

Si $x=0$ et $y=0$, donc $x+y\sqrt{3}=0$

Soit $(x,y)\in\mathbb{Q}^2$ tel que $x+y\sqrt{3}=0$

Supposons que : $y\neq 0$

Alors $\sqrt{3}=-\dfrac{x}{y}$

Et comme $x\in\mathbb{Q}$ et $y\in\mathbb{Q}^*$, alors $-\dfrac{x}{y}\in\mathbb{Q}$ c-à-d $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ **absurde**

Donc $y=0$ et par suite $x=0$

Finalement $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2\quad x+y\sqrt{3}=0\iff x=0$ et $y=0$

0.25 pt **2 - Montrons que $F-\{0\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$**

On a $F-\{0\}\subset\mathbb{R}^*$ et $F-\{0\}\neq\emptyset$ car $1\in F-\{0\}$

Soit $(x,y)\in F-\{0\}$

Donc $\exists(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ tel que $x=a+b\sqrt{3}$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ et $\exists(c,d)\in\mathbb{Q}^2$ tel que $y=c+d\sqrt{3}$

avec $(c,d)\neq(0,0)$

$$\begin{aligned}
x\times\frac{1}{y} &= \frac{x}{y}\\
&= \frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}}\\
&= \frac{(a+b\sqrt{3})(c-d\sqrt{3})}{c^2-3d^2}\\
&= \frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}+\sqrt{3}\times\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}
\end{aligned}$$

Et comme $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4$ on a $\left(\dfrac{ac-3bd}{c^2-3d^2},\dfrac{bc-ad}{c^2-3d^2}\right)\in\mathbb{Q}^2$

Donc $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$

De plus $x \neq 0$ et $y \neq 0$ donc $\dfrac{x}{y} \neq 0$

D'où $\dfrac{x}{y} \in F - \{0\}$

$\boxed{\text{Donc } F - \{0\} \text{ est un sous groupe de } (\mathbb{R}^*, \times)}$

**0.25 pt** **3 - a) Vérifions que** $\varphi\left(F - \{0\}, \times\right) = G - \{0\}$

Soit $\begin{array}{rcl} \varphi : F - \{0\} & \longrightarrow & G \\ x + y\sqrt{3} & \longmapsto & M(x, y) \end{array}$

Soit $M(x, y) \in G$

On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(a + b\sqrt{3}) = M(x, y) &\iff M(a, b) = M(x, y) \\
&= \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} a + b = x + y \\ 2y = 2b \\ y = b \\ a - b = x - y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\forall M(x, y) \in G$, $\exists!(a, b) \in F$ tel que $\varphi(a + b\sqrt{3}) = M(x, y)$

D'où $\varphi(F) = G$.

De plus $\varphi(a + b\sqrt{3}) = M(0, 0) \iff a + b\sqrt{3} = 0$

$\boxed{\text{Donc } \varphi(F - \{0\}) = G - \{0\}}$

**0.25 pt** **b) Montrons que $\varphi$ est un homomorphisme de $(F - \{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$**

Soit $(a+b\sqrt{3}, c+d\sqrt{3}) \in F-\{0\}$

$$\begin{aligned}
\varphi\left((a+b\sqrt{3})\times(c+d\sqrt{3})\right) &= \varphi(ac+3bd,(ad+bc)\sqrt{3})\\
&= M(ac+3bd, ad+bc)\\
&= M(a,b)\times M(c,d) \quad \text{d'après} I)3)a)\\
&= \varphi(a+b\sqrt{3})\times\varphi(c+d\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Donc $\varphi$ est un homomorphisme de $(F-\{0\},\times)$ vers $(E,\times)$

**0.25 pt** **c) Déduisons que $(G-\{0\},\times)$ est un groupe commutatif.**

D'après la question précédente $(F-\{0\},\times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$

Donc $(F-\{0\},\times)$ est un groupe commutatif (car $\times$ est commutatif)

D'où $(\varphi(F-\{0\}),\times)$ est aussi sous groupe commutatif.

Ainsi $(G-\{0\},\times)$ est un groupe commutatif.

**0.25 pt** **4 - Montrons que $(G,+,\times)$ est un corps commutatif.**

On a $(G,+)$ est un groupe commutatif, car G est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

De plus $(G-\{0\},\times)$ est sous groupe commutatif.

Et la loi $\times$ est distributive par rapport à $+$

D'où $(G,+,\times)$ est un corps commutatif.

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : rattrapage** juillet 2023

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 4 exercices :***

— Exercice 1 : **Problème d'analyse** ........ **10 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** ........ **3.5 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** ........ **3.5 points**
— Exercice 4 : **Arithmétique** ........ **3 points**

## Exercice 1 : (3.5 pts)

### Partie I

On considére la fonction $f_n$ définie sur $I = [0;+\infty[$ par :
$f_n(0) = 0$ et $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ ; $f_n(x) = \sqrt{x}\,(\ln x)^n$ ; avec $n$ un entier naturel **non nul**
Et soit $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0.5 **1 - a)** Vérifier que $(x \in ]0;+\infty[)$ ; $\sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$ ; et en déduire que $f_n$ est continue en 0

0.5 **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.75 **c)** Vérifier que $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ ; $\dfrac{f'_n x}{x} = (2n)^n\left[\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right]^n$ , et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0.5 **d)** Calculer, suivant la parité de $n$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0.75 **2 - a)** Montrer que $f_n$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ $f'_n(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)$

0.25 **b)** Vérifier que $(\forall n \geqslant 2)$ ; $f'_n(x) = 0$ si est seulement si $(x = 1$ ou $x = \mathrm{e}^{-2n})$

1 **c)** Étudier, suivant la parité de $n$, le sens de variation de $f_n$, et donner son tableau de variations

0.25 **d)** Montrer que si $n$ est impair, et $n \geqslant 3$, alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_n)$

### Partie II

On considére la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$ ; $u_n = f_n(\beta)$ avec $\beta \in ]1;\mathrm{e}[$

0.25 **1 - a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$ ; $0 < u_n < \sqrt{\mathrm{e}}$

0.25 **b)** Montrer que la suite : $(u_n)_{n\geqslant1}$ est décroissante

0.25 **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0.5 **2 - a)** Montrer que pour tout entier $n$ non nul, il existe un unique réel $x_n \in ]1;\mathrm{e}[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$

0.75 **b)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ainsi définie est croissante, en en déduire qu'elle est convergente

**3 -** On pose : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

0.5 **a)** Montrer que $1 < l \leqslant \mathrm{e}$

0.25 **b)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{l}}$

0.25 **c)** Montrer que si $l < \mathrm{e}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

0.25 **d)** En déduire la valeur de $l$

### Partie III

On pose pour tout $x \in I$ ; $F(x) = \int_x^1 \left(f_1(t)\right)^2 \mathrm{d}t$

0.25 **1 - a)** Montrer que la fonction $F$ est continue sur $I$

1 **b)** En utilisant une double intégration par partie, montrer que $(\forall x \in ]0; +\infty[)$ ; $F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}(1 - x^2)$

0.5 **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x)$

0.25 **b)** En déduire la valeur de $F(0)$

0.5 **c)** Calculer, en $cm^3$, le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ relative à l'intervalle $[0; 1]$ ($\left\|\vec{\mathrm{i}}\right\| = 1cm$)

## Exercice 2 : (3.5 pts)

### Partie I

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant, $(S)$ $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x+y}\right) \\ \sqrt{y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) \end{cases}$

**1 -** Soit $(x; y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution du système $(S)$. on pose : $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$
On note d'abore que l'ensemble de définition du système $(S)$ est : $D = \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\right) \setminus \{(0; 0)\}$

0.25 **a)** Montrer que $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$

0.75 **b)** Montrer que $z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$, et déduire les valeurs possibles de $z$

025 **c)** En déduire les valeurs du couple $(x; y)$

0.5 **2 -** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système $(S)$

### Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$
Soit $(U)$ le cercle de centre $O$ te de rayon 1 et $A(a)$ ; $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle $(U)$ deux à deux distincts

**1 -** Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C})$ ; $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

**2 - a)** La droite passant par $A$ et parallèle à $(BC)$ coupe le cercle $(U)$ au point $P(p)$
0.5 Montrer que $p = \frac{bc}{a}$

**b)** La droite passant par $A$ et perpendiculaire à $(BC)$ coupe le cercle $(U)$ au point $Q(q)$
0.5 Montrer que $q = -p$

**c)** La droite passant par $C$ et parallèle à $(AB)$ coupe le cercle $(U)$ au point $R(r)$
Montrer que les deux droites $(PR)$ et $(OB)$ sont perpendiculaires

## Exercice 3 : (3.5 pts)

$$E = \left\{ M(a;b;c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} / (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

**Rappel :** $(M_3(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0.25 **1 -** Montrer que $E$ est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}); +)$

**2 -** On munit l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi $\star$ tel que : $\forall\left((x;z);(x';z')\right) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{C}^2)$ ; $(x;z)\star(x';z') = (x+x';z+z')$

On considére l'application $\varphi$ définie de $E$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ tel que : $\forall(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ ; $\varphi\left(M(a;b;c)\right) = (a; b+ci)$

0.5 **a)** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $(E;+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$ et que $\varphi(E) = \mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0.25 **b)** En déduire que $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$ est un groupe commutatif

**3 -** On munit $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi de composition interne $T$ définie par :
$\forall\left((x;z);(x';z')\right) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2$ ; $(x;z)T(x';z') = \left(xRe(z') + x'Re(z); zz'\right)$
$(Re(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe $z)$

0.25 **a)** Montrer que $T$ est commutative

0.25 **b)** Vérifier que $(0;1)$ est l'élément neutre de $T$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0.5 **c)** Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}; (1;i)T(x;-i) = (0;1)$ ; et en déduire que $T$ est non associative dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

**4 -** Soit $G = \{(Im(z);z)\,/z \in \mathbb{C}\}$ $(Im(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe $z)$

0.25 **a)** Montrer que $G$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$

**b)** Soit $\psi$ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}^*; \psi(z) = (Im(z);z)$

0.25 Montrer que $\psi$ est un endomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};T)$

0.5 **c)** En déduire que $(G\backslash\{(0;0);T\})$ est un groupe commutatif

0.5 **5 -** Montrer que $(G;\star;T)$ est un corps commutatif

## Exercice 4 : (3 pts)

Soit $p$ un nombre impair, on pose : $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^{p-1}$

Soit $q$ un nombre premier *positif* qui divise $S$

0.5 **1 - a)** Montrer que $p$ et $q$ sont premiers entre eux

0.25 **b)** En déduire que : $p^{q-1} \equiv 1[q]$

0.5 **c)** Vérifier que : $p^{p-1} = (p-1)S$, et en déduire que : $p^p \equiv 1[q]$

**2 -** Supposant que $p$ et $q-1$ sont premiers entre eux

0.75 **a)** Montrer que : $p \equiv 1[q]$ en utilisant le théorème de **Bézout**

0.25 **b)** En déduire que $S \equiv 1[q]$

0.75 **3 -** Montrer que : $q \equiv 1[p]$

$\boxed{\text{FIN}}$

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématique A & B

## Session : Rattrapage 2023

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1 : (10 pts)

### PARTIE I

Considérons la fonction $f_n$ définie sur $I = [0; +\infty[$ par :
$f_n(0) = 0$ et $(\forall x \in ]0; +\infty[)$ ; $f_n(x) = \sqrt{x}\,(\ln x)^n$ ; avec $n$ un entier naturel **non nul**
Et soit $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0.5 **1 - a)** Vérifions que $(x \in ]0; +\infty[)$ ; $\sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$ ; et déduisons que $f_n$ est continue en 0

✸ Vérifions que $(x \in ]0; +\infty[)$ ; $\sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$

Soit $x \in ]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}
\text{On a } (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln x^{\frac{1}{2n}}\right)^n &= (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \times \frac{1}{2n} \ln x\right)^n \\
&= (2n)^n \times \left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^n \times \left(\frac{1}{2n}\right)^n \times (\ln x)^n \\
&= \cancel{(2n)^n} \times x^{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{\cancel{(2n)^n}} \times (\ln x)^n \\
&= \sqrt{x}(\ln x)^n
\end{aligned}$$

***Conclusion :*** $\boxed{(\forall x \in ]0; +\infty[) \;;\; \sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}$

✸ Déduisons que $f_n$ est continue en 0

$$\begin{aligned}
\text{On a } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n \\
&= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2n)^n \left(\sqrt[2n]{x} \ln\left(\sqrt[2n]{x}\right)\right)^n
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2n)^n \left(t\ln t\right)^n \quad \text{(en posant } t = \sqrt[2n]{x} \text{ et puisque } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt[2n]{x} = 0^+\text{)}$$

$$= (2n)^n \times 0^n$$

$$= (2n)^n \times 0$$

$$= 0$$

Et comme $f_n(0) = 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = f_n(0)$

D'où finalement $\boxed{f_n \text{ est continue à droite en } 0}$

0.5 **b)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^n = +\infty$

Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, on conclus que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(\ln x)^n = +\infty$

***Conclusion :*** $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$

0.75 **c)** Vérifions que $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ ; $\dfrac{f'_n x}{x} = (2n)^n \left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$, et déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interprétons graphiquement le résultat obtenu

✸ Vérifions que $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ ; $\dfrac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$

Soit $x \in ]0;+\infty[$

$$\text{On a } \frac{f_n(x)}{x} = \frac{(2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x}$$

$$= \frac{(2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n}$$

$$= (2n)^n \left(\frac{x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{n}}}\right)^n$$

$$= (2n)^n \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$$

***Conclusion :*** $\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[) \ ; \ \dfrac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n}$

✸ Déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$

$$\begin{aligned}\text{On a } \lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}(2n)^n\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n\\ &= \lim_{x\to+\infty}(2n)^n\left(\frac{\ln\left(\sqrt[2n]{x}\right)}{\sqrt[2n]{x}}\right)^n\\ &= \lim_{x\to+\infty}(2n)^n\left(\frac{\ln t}{t}\right)^n \quad (\text{On posant } t=\sqrt[2n]{x}, \text{ et puisque } \lim_{x\to+\infty}\sqrt[2n]{x}=+\infty)\\ &= (2n)^n\times 0^n\\ &= (2n)^n\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

***Conclusion :*** $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=0}$

✸ Interprétons graphiquement le résultat obtenu

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=0$

Alors $\boxed{(\mathcal{C}_n) \text{ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de } +\infty}$

0.5 **d)** Calculons, suivant la parité de $n$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interprétons graphiquement le résultat obtenu

✸ Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f_n(x)}{x}$

$$\begin{aligned}\text{On a } \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f_n(x)}{x} &= \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\sqrt{x}}{x}\times(\ln x)^n\\ &= \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}\times(\ln x)^n\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$

Donc, si $n$ est pair : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\ln x)^n=+\infty$ et par suite $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f_n(x)}{x}=+\infty$

Et si $n$ est impair : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\ln x)^n=-\infty$ et par suite $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f_n(x)}{x}=-\infty$

***Conclusion :*** Si $n$ est **pair** : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f_n(x)}{x}=+\infty$ Et si $n$ est **impair** : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f_n(x)}{x}=-\infty$

✸ Interprétons graphiquement le résultat obtenu

Comme $f_n(0)=0$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=-\infty$ selon que respectivement $n$ est pair ou impair

Et comme $+\infty\notin\mathbb{R}$ et $-\infty\notin\mathbb{R}$, alors $f_n$ n'est pas dérivable à droite en 0

Et $(\mathcal{C}_n)$ admet une demi-tangente verticale, à droite en 0 dirigée vers la haut si $n$ est pair, et dirigée vers le bas si $n$ est impair

0.75 **2 - a)** Montrons que $f_n$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f_n'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)$

✸ Montrons que $f_n$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^{\star}$, donc la fonction $x \mapsto (\ln x)^n$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, alors on coclus que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}(\ln x)^n$ est dérivable sur $]0;+\infty 2[$

***Conclusion :*** $\boxed{f_n \text{ est dérivable sur } ]0;+\infty[}$ ✸ Montrons que $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ ; $f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)$

Soit $x \in ]0;+\infty[$

✍ Si $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
\text{On a} f_n'(x) &= \left(\sqrt{x}\,(\ln x)^n\right)' \\
&= (\sqrt{x})' \times (\ln x)^n + \sqrt{x} \times \left((\ln x)^n\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^n + \sqrt{x} \times n \times \frac{1}{x}(\ln x)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^n + n \times \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}\left(\ln x + 2n\right)
\end{aligned}$$

D'où si $n \geqslant 2$ ; $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ $f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}\left(\ln x + 2n\right)$

✍ Si $n = 1$, alors $f_1(x) = \sqrt{x}\ln x$

$$\begin{aligned}
\text{On a} f_1'(x) &= \left(\sqrt{x}\ln x\right)' \\
&= (\sqrt{x})' \times \ln x + \sqrt{x} \times (\ln x)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x} \times \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)
\end{aligned}$$

***Conclusion :*** $\boxed{(\forall x \in ]0;_p in[) \begin{cases} f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}\left(\ln x + 2n\right) \\ f_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2) \end{cases}}$

0.25 **b)** Vérifions que $(\forall n \geqslant 2)$ ; $f_n'(x) = 0$ si est seulement si $(x = 1$ ou $x = \mathrm{e}^{-2n})$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et soit $x \in ]0;+\infty[$

comme $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$, alors, d'après la question 2)$a$), on a $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^{n-1} = 0$ ou $\ln x + 2n = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Or } (\ln x)^{n-1} = 0 &\Leftrightarrow \ln x = 0(\text{car}(n-1) \in \mathbb{N}^{\star}) \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

$$\text{Et } \ln x + 2n = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2n$$
$$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-2n}$$

D'où : $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 ou x = \mathrm{e}^{-2n})$

***Conclusion :*** $\boxed{(\forall n \geqslant 2)\ (\forall x \in \left]0;_p in\right[)\ f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 ou x = \mathrm{e}^{-2n})}$

1 **c)** Étudions, suivant la parité de $n$, le sens de variation de $f_n$, et donnons son tableau de variations

✷ Étudions, suivant la parité de $n$, le sens de variation de $f_n$

On a $f_n(1) = \sqrt{1}(\ln 1)^n = 1 \times 0^n = 1 \times 0 = 0$

Et $f_n(\mathrm{e}^{-2n}) = \sqrt{\mathrm{e}^{-2n}}\big(\ln(\mathrm{e}^{-2n})\big)^n = \mathrm{e}^{-n} - -2n^n$

On a sur $]0; +\infty[$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

Et si $n$ est pair, alors $n-1$ est impair, donc, le signe de $(\ln x)^n$ est celui de $\ln x$, c'est à dire celui de $x - 1$

Et le signe de $\ln x + 2n = \ln x - \ln \mathrm{e}^{-2n}$ est celui de $x = \mathrm{e}^{-2n}$

D'où, puisque $f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big(\ln x\Big)^{n-1}(2n + \mathrm{e}^{-2n})$, alors le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(x-1)(x - \mathrm{e}^{-2n})$ ✷ Le tableau de variations de $f_n$

Compte tenu des résultats précédents, on obtient le tableau de variations de $f_n$

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}^{-2n}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n$ | $0$ | ↗ | $\mathrm{e}^{-n}(-2n)^n$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

0.25 **d)** Montrons que si $n$ est impair, et $n \geqslant 3$, alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_n)$

Lorsque $n$ est impair et $n \geqslant 3$, on a d'après les questions précédentes : $f_n$ est dérivable en 1 et $f_n'$ s'annule en 1 en gardant le même signe

Puisque $(\forall x \in ]\mathrm{e}^{-2n}; 2[ \setminus \{1\})\ f_n'(x) > 0$

Donc $\boxed{\text{Le point d'abscisse 1 est un points d'inflexion de } (\mathcal{C}_n) \text{ lorsque } n \text{ est impair et } n \geqslant 3}$

## Partie II

Considérons la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$ ; $u_n = f_n(\beta)$ avec $\beta \in ]1; \mathrm{e}[$

0.25 **1 - a)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$ ; $0 < u_n < \sqrt{\mathrm{e}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

Comme $1 < \beta < \mathrm{e}$ et que $f_n$ est strictement croissante sur $[1; \mathrm{e}]$ (d'après la question 2)$c$)

Alors on déduis que $f_n(1) < f_n(\beta) < f_n(\mathrm{e})$

Or $f_n(1) = 0$ et $f_n(\beta) = u_n$ et $f_n(\mathrm{e}) = \sqrt{\mathrm{e}}(\ln \mathrm{e})^n = \sqrt{\mathrm{e}} \times 1^n = \sqrt{Exp}$

Donc $0 < u_n < \sqrt{\mathrm{e}}$

***Conclusion :*** $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^\star)\ ;\ 0 < u_n < \sqrt{\mathrm{e}}}$

0.25 **b)** Montrons que la suite : $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\text{On a } u_n \neq 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f_{n+1}(\beta)}{f_n(\beta)} = \frac{\sqrt{\beta}(\ln\beta)^{n+1}}{\sqrt{\beta}(\ln\beta)^n} = \ln\beta$$

Or $\beta < \mathrm{e}$ donc $\ln\beta < 1$, d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

Et puisque $u_n > 0$, alors $u_{n+1} < u_n$

Ainsi $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)\ u_{n+1} < u_n$

***Conclusion :*** $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante}}$

0.25 **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ ; $u_n = f_n(\beta) = \sqrt{\beta}(\ln\beta)^n$

Or $1\beta < \mathrm{e}$, et donc $-1 < 0 < \ln\beta < 1$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln\beta)^n = 0$, et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} = \sqrt{\beta} \times 0 = 0$

***Conclusion :*** $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

***Remarque :***La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $\ln\beta$ et de premier terme $\sqrt{\beta}\ln\beta$

0.5 **2 - a)** Montrons que pour tout entier $n$ non nul, il existe un unique réel $x_n \in ]1;\mathrm{e}[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

$f_n$ est continue sur $[1;\mathrm{e}]$ et $f_n(1) = 0 < 1$ et $f_n(\mathrm{e}) = \sqrt{\mathrm{e}} > 1$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.), $(\exists x_n \in ]1;\mathrm{e}[)\ f_n(x_n) = 1$

Et puisque $f_n$ est strictement monotone (strictement croissante) sur $]1;\mathrm{e}[$, alors on conclus que $\exists! x_n \in ]1;\mathrm{e}[\ \ f_n(x_n) = 1$

***Conclusion :*** $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^\star)(\exists! x_n \in ]1;\mathrm{e}[) f_n(x_n) = 1}$

0.75 **b)** Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ainsi définie est croissante, en déduisons qu'elle est convergente

✸ Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\begin{aligned}\text{On a } x_n > 0 \text{ et } f_{n+1}(x_n) &= \sqrt{x_n}\big(\ln(x_n)\big)^{n+1} \\ &= \sqrt{x_n}\big(\ln(x_n)\big)^{n} \times \ln(x_n) \\ &= f_n(x_n) \times \ln(x_n) \\ &= 1 \times \ln(x_n) (\text{car par définition de } x_n : f_n(x_n) = 1) \\ &= \ln(x_n) \leqslant 1 (\text{car } x_n \leqslant \mathrm{e})\end{aligned}$$

Donc $f_{n+1}(x_n) \leqslant 1$ d'où $f_{n+1}(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_{n+1})$ (car par définition de $x_{n+1}$ $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$)

Et comme $f_{n+1}$ est strictement croissante sur $]1;\mathrm{e}[$ et que $(x_n; x_{n+1}) \in ]1;\mathrm{e}[^2$, alors on obtient $x_n \leqslant x_{n+1}$

Ainsi donc $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)\ x_n \leqslant x_{n+1}$

***Conclusion :*** $\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est croissante}}$

✸ Déduisons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et majorée par e

Alors on déduis que $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est convergente}}$

**3 -** On pose : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

0.5 **a)** Montrons que $1 < l \leqslant \mathrm{e}$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

On a d'une part : $x_n \leqslant \mathrm{e}$, et d'autre part puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante : $x_n \geqslant x_1$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^\star) x_1 \leqslant x_n \leqslant \mathrm{e}$

Et par passage à la limite, on obtient : $x_1 \leqslant l \leqslant \mathrm{e}$

Or $x_1 > 1$, donc $1 < l \leqslant \mathrm{e}$

***Conclusion :*** $\boxed{1 < l \leqslant \mathrm{e}}$

0.25 **b)** Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{l}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

On a par définition de $x_n$ : $\sqrt{x_n}\big(\ln(x_n)\big)^n = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \lim\limits_{n\to_p in} \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{l}$ et $\sqrt{l \neq 0}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{l}}}$

0.25 **c)** Montrons que si $l < \mathrm{e}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente vers $l$ et que $l \in ]1;\mathrm{e}[$ et que la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est continue sur $]1;\mathrm{e}[$ (donc continue en $l$)

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln x_n) = \ln(\ln l)$

Et comme $\ln(\ln l) < \ln(\ln \mathrm{e}) = \ln 1 = 0$ alors $\ln(\ln l) < 0$

Et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduis que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

***Conclusion :*** $\boxed{\text{Si } l < \mathrm{e}, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty}$

0.25 **d)** Déduisons la valeur de $l$

On a d'après la question $3)b)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{l}}$ et comme la fonction ln est continue en $\dfrac{1}{\sqrt{l}}$, alors $\lim\limits_{n\to pin} \ln\left(\big(\ln x_n\big)^n\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{l}}\right)$

C'est à dire : $\lim\limits_{n\to pin} n\ln\left(\big(\ln x_n\big)\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{l}}\right)$

Et si on suppose que $1 < l < \mathrm{e}$ (1) ,on aura d'après la question $3)c)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\big(\ln x_n\big)\right) = -\infty$

Et on obtient $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{l}}\right) = -\infty$, ce qui est absurde (puisque $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{l}}\right) \in \mathbb{R}$)

Donc la supposition (1) est fausse, et puisque d'après la question $3)a)$ : $1 < l \leqslant \mathrm{e}$

Alors on déduis que $\boxed{l = \mathrm{e}}$

## Partie III

On pose pour tout $x \in I$ ; $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \Big(f_1(t)\Big)^2 \mathrm{d}t$

0.25 **1 - a)** Montrons que la fonction $F$ est continue sur $I$

On a $f_1$ est continue à droite en 0 ( d'après la question $I)1)a)$ )

Et $f_1$ est continue sue $]0;+\infty[$ ((puisque d'après la question $I)2)a)$ $f_1$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ )

Donc $f_1$ est continue sur $I$ (2)

Et par suite $g : t \mapsto (f_1(t))^2$ est continue sur $I$

Et puisque $1 \in I$, alors $x \mapsto \int_1^x (f_1(t))^2 \mathrm{d}t$ (qui est uen primitive de $g$ sur $I$) est dérivable sur $I$

D'où $x \mapsto -\int_1^x (f_1(t))^2 \mathrm{d}t$, c.à.d. $x \mapsto \int_x^1 (f_1(t))^2 \mathrm{d}t$ est dérivable sur $I$

***Conclusion :*** $\boxed{F \text{ est continue sur } I}$

1 **b)** En utilisant une double intégration par partie, montrons que $(\forall x \in ]0;+\infty[)$ ; $F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}(1-x^2)$

Soit $x \in ]0;+\infty[$

$$\begin{aligned}\text{On a } F(x) &= \int_x^1 (f_1(t))^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_x^1 (\sqrt{t}\ln t)^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_x^1 t\ln^2 t \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On pose $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln^2 t$

Et on a $u(t) = \frac{t^2}{2}$ et $v'(t) = \frac{2\ln t}{t}$

$$\begin{aligned}\text{D'où } F(x) &= \left[\frac{t^2}{2}\ln^2 t\right]_x^1 - \int_x^1 t\ln t \mathrm{d}t \\ &= 0 - \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int_x^1 t\ln t \mathrm{d}t \\ &= -\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int_x^1 t\ln t \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On pose $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$

Et on a $u(t) = \frac{t^2}{2}$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$

$$\begin{aligned}\text{On obtient } F(x) &= -\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_x^1 + \frac{1}{2}\int_x^1 t \mathrm{d}t \\ &= -\frac{x^2}{2}\ln^2 x - 0 + \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \\ &= -\frac{x^2}{2}\ln^2 x + \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}(1-x^2)\end{aligned}$$

***Conclusion :*** $\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[) \quad F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}(1-x^2)}$

0.5 **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F(x)$

On a d'après la question $III)1)b)$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left( -\frac{x^2}{2}\ln^2 x + \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}(1-x^2) \right) \\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left( -\frac{1}{2}(x\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}(1-x^2) \right) \\
&= -\frac{1}{2}\times 0^2 + \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4}(1-0^2) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

***Conclusion :*** $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \frac{1}{4}}$

0.25 **b)** Déduisons la valeur de $F(0)$

Puisque $F$ est dérivable sur $I$, alors $F$ est continue sur $I$, donc, en particulier, $F$ est continue à droite en 0

Autrement dit : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = F(0)$

Or, d'après la question $III)2)a)$ $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \frac{1}{4}$

D'où $\boxed{F(0) = \frac{1}{4}}$

0.5 **c)** Calculons, en $cm^3$, le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ relative à l'intervalle $[0;1]$ $(\|\vec{i}\| = 1cm)$

Puisque $f_1$ est continue sur $I$ (d'après la question 2)) et que $[0;1] \subset I$, alors $f1$ est continue sur $[0;1]$

Et par suite le volume cherché en $cm^3$ est : $V = \left( \int_0^1 \pi \left(f_1(t)\right)^2 \mathrm{d}t \right) \times 1^3$

$$\begin{aligned}
V &= \left( \int_0^1 \pi \left(f_1(t)\right)^2 \mathrm{d}t \right) \times 1^3 \\
&= \pi \left( \int_0^1 \left(f_1(t)\right)^2 \mathrm{d}t \right) \\
&= \pi F(0) \\
&= \pi \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

***Conclusion :*** $\boxed{\text{Le volume demandé est } V = \frac{\pi}{4} cm^3}$

## Exercice 2 : (3.5 pts)

### Partie I

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant, $(S)$ $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right) \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right) \end{cases}$

**1 -** Soit $(x;y)\in\mathbb{R}_+^2$ une solution du système $(S)$. on pose : $z=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

On note d'abore que l'ensemble de définition du système $(S)$ est : $D=(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)\setminus\{(0;0)\}$

0.25 **a)** Montrons que $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i$

Comme $(x;y)$ est une solution de $(S)$, alors

$(x;y)\in D$ et $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{12}{5} \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Et puisque $(x;y)\in D$, alors $z$ est non nul (et donc $\bar{z}$ est non nul)

Et on a alors : $z+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=z+\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}=\left(\sqrt{x}+i\sqrt{y}\right)+\dfrac{\sqrt{x}-i\sqrt{y}}{x+y}$

$=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+y}+i\sqrt{y}-i\dfrac{\sqrt{y}}{x+y}=\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)+i\sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i$

***Conclusion :*** $\boxed{z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i}$

0.75 **b)** Montrons que $z^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z+1=0$, et déduisons les valeurs possibles de $z$

① Montrons que $z^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z+1=0$

On a $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i$, donc $z^2+1=\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z$

***Conclusion :*** $\boxed{z^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z+1=0}$

② Déduisons les valeurs possibles de $z$

On a $z$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $t^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)t+1=0$

Le discriminant de cette équation est :

$\Delta=\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)^2-4=\dfrac{144}{25}-\dfrac{16}{25}+\dfrac{96}{25}i-4=\dfrac{28}{25}+\dfrac{96}{25}i=\dfrac{4}{25}\left(7+24i\right)$

Et puisque : $(4+3i)^2=16-9+24i=7+24i$, alors $\Delta=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\left(4+3i\right)^2=\left[\dfrac{2}{5}(4+3i)\right]^2$

Donc les solutions de l'équation sont :

$t_1=\dfrac{\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i-\dfrac{2}{5}(4+3i)}{2}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i$ et $t_2=\dfrac{\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i+\dfrac{2}{5}(4+3i)}{2}=2+i$

Donc, et puisque $Im(z)=\sqrt{y}\geqslant 0$ et $Im(t_1)=-\dfrac{1}{5}<0$

Alors $\boxed{\text{la seule valeur possible de } z \text{ est } 2+i}$

025 **c)** Déduisons les valeurs du couple $(x;y)$

D'après la question 1)$b$), si $(x;y)$ est une solution de $(S)$, alors $\sqrt{x}+i\sqrt{y}=2+i$

Donc : $\sqrt{x}=2$ et $\sqrt{y}=1$, d'où $x=4$ et $y=1$

***Conclusion :*** $\boxed{\text{Le seul couple possible solution de } (S) \text{ est le couple } (4;1)}$

0.5 **2 -** Résolvons dans $\mathbb{R}_+^2$ le système $(S)$

Soit $A$ l'ensemble des solutions du système $(Q)$

D'après la question 1), on a $A \subset \{(4;1)\}$

Et comme $\begin{cases} \sqrt{4}\left(1+\dfrac{1}{4+1}\right) = 2\left(1+\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{12}{5} \\ \sqrt{1}\left(11\dfrac{1}{4+1}\right) = 1-\dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Alors $(4;1)$ est une solution de $(S)$, d'où $\{(4;1)\} \subset A$

***Conclusion :*** L'ensemble des solutions du système $(S)$ est $A = \{(4;1)\}$

## Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

Soit $(U)$ le cercle de centre $O$ te de rayon 1 et $A(a)$ ; $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle $(U)$ deux à deux distincts

**1 -** Montrons que : $(\forall z \in \mathbb{C})$ ; $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$

On a $|z| = 1 \;\; |z|^2 = 1 \;\; z\bar{z} = 1 \;\; \bar{z} = \dfrac{1}{z}$

***Conclusion :*** $(\forall z \in \mathbb{C})$ ; $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$

**2 - a)** La droite passant par $A$ et parallèle à $(BC)$ coupe le cercle $(U)$ au point $P(p)$

0.5 Montrons que $p = \dfrac{bc}{a}$

On a $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires, et comme $B \neq C$, alors $\dfrac{p-a}{c-b} \in \mathbb{R}$

D'où : $\overline{\left(\dfrac{p-a}{c-b}\right)} = \dfrac{p-a}{c-b}$

c'est à dire : $\dfrac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{b}} = \dfrac{p-a}{c-b}$ (1)

Or $(A;B;C;P) \in (U)^4$, donc $OA = OB = OC = OP = 1$

C'est à dire : $|a| = |b| = |c| = |p| = 1$

D'où, d'après la question 1) : $\bar{a} = \dfrac{1}{a}$ et $\bar{b} = \dfrac{1}{b}$ et $\bar{c} = \dfrac{1}{c}$ et $\bar{p} = \dfrac{1}{p}$

Et par suite (1) s'écrit : $\dfrac{\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}} = \dfrac{p-a}{c-b}$

Donc $\dfrac{cb(a-p)}{pa(b-c)} = \dfrac{p-a}{c-b}$

D'où, après simplification $\dfrac{cb}{pa} = 1$, c.à.d. $cb = pa$

D'où finalement $\boxed{p = \dfrac{bc}{a}}$

**b)** La droite passant par $A$ et perpendiculaire à $(BC)$ coupe le cercle $(U)$ au point $Q(qp)$

0.5 Montrons que $q = -p$

On a $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont orthogonaux, et comme $B \neq C$, alors $\dfrac{q-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$

Donc $\overline{\left(\dfrac{q-a}{c-b}\right)} = -\dfrac{q-a}{c-b}$

C'est à dire $\dfrac{\bar{q}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{B}} = -\dfrac{q-a}{c-b}$

Et per suite $\dfrac{\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}} = -\dfrac{q-a}{c-b}$ (car $Q(q) \in (U)$)

Donc $\dfrac{cb(a-q)}{qa(b-c)} = -\dfrac{q-a}{c-b}$

D'où, après simplification $\dfrac{cb}{qa} = -1$, c.à.d. $cb = -qa$, d'où $q = -\dfrac{bc}{a}$

Et d'après la question 2)$a$), on en déduit que $\boxed{q = -p}$

**c)** La droite passant par $C$ et parallèle à $(AB)$ coupe le cercle $(U)$ au point $R(r)$

**0.5** Montrons que les deux droites $(PR)$ et $(OB)$ sont perpendiculaires

En échangeant les rôles des points $A$ ; $B$ ; $C$ et $P$ respectivement avec les points $C$ ; $A$ ; $B$ et $R$, on obtient d'après la question 1)$a$) : $r = \dfrac{ab}{c}$

Et puisque $\dfrac{p-r}{b-0} = \dfrac{\dfrac{bc}{a}-\dfrac{ab}{c}}{b} = \dfrac{c}{a}-\dfrac{a}{c}$

Alors $\overline{\left(\dfrac{p-r}{b-0}\right)} = \overline{\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{a}{c}\right)} = \dfrac{\bar{c}}{\bar{a}}-\dfrac{\bar{a}}{\bar{c}} = \dfrac{\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{a}}-\dfrac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{c}} = \dfrac{a}{c}-\dfrac{c}{a} = -\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{a}{c}\right) = -\dfrac{p-r}{b-0}$

Et comme $p \neq r$ (puisque $a \neq c$ et $a \neq -c$)

Alors $\boxed{\text{les droites } (PR) \text{ et } (OB) \text{ sont perpendiculaires}}$

## Exercice 3 : (3.5 pts)

$$E = \left\{ M(a;b;c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} / (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

**Rappel :** $(M_3(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**0.25** **1 -** Montrons que $E$ est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}); +)$

On a :

✸ $(M_3(\mathbb{R}); +)$ est un groupe

✸ $E \subset M_3(\mathbb{R})$ (car : $\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}^3$) $(a;b;c;-c;0) \in \mathbb{R}^5$

✸ $E \neq \emptyset$ (car par exemple $M(0;0;0) \in E; puisque (0;0;0) \in \mathbb{R}^3$ )

Soit $(M;N) \in E^2$

Il existe donc $(a;b;c;x;y;z) \in \mathbb{R}^6$ tel que : $M = M(a;b;c)$ et $N = M(x;y;z)$

$$\text{Et j'ai :} \quad M+(-N) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -(-z) \\ 0 & -z & -y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-x & 0 & 0 \\ 0 & b-y & -c+z \\ 0 & c-z & b-y \end{pmatrix}$$
$$= M(a-x; b-y; c-z)$$

Et puisque: : $(a-x; b-y; c-z) \in \mathbb{R}^3$, alors $M(a-x; b-y; c-z) \in E$

Ainsi $(\forall (M;N) \in E^2)$ $M+(-N) \in E$

***Conclusion :*** $\boxed{E \text{ est un sous-groupe de } (M_3(\mathbb{R});+)}$

**2 -** On munit l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi $\star$ tel que : $\forall\,((x;z);(x';z')) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{C}^2)$ ; $(x;z)\star(x';z') = (x+x';z+z')$

Considérons l'application $\varphi$ définie de $E$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ tel que : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ ; $\varphi\left(M(a;b;c)\right) = (a;b+ci)$

0.5 **a)** Montrons que $\varphi$ est un endomorphisme de $(E;+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$ et que $\varphi(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

❶ Montrons que $\varphi$ est un endomorphisme de $(E;+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$

Soit $(M;N)\in E^2$

En gardant les notation de la question 1), on a : $M+N = M(a+x;b+y;c+z)$

Donc : $\varphi(M+N) = (a+x;b+y+(c+z)i) = (a+x;b+y+ci+zi) = (a+x;b+ci+(y+zi)) = (a;b+ci)\star(x;y+zi) = \varphi(M)\star\varphi(N)$

Donc : $(\forall(M;N)\in E^2)\ \ \varphi(M+N)=\varphi(M)\star\varphi(N)$

***Conclusion :*** $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } (E;+) \text{ vers } (\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)}$

❷ Montrons que $\varphi(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

Soit $(a;z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$, donc $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $z=x+yi$

D'où $\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $(a;z)=(a;x+yi)=\varphi(M(a;x;y))$

Et comme $M\in E$ j'en déduis donc que $(\forall(a;z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C})(\exists M\in E)/\varphi(M)=(a;z)$

D'où $\varphi$ est surjective

***Conclusion :*** $\boxed{\varphi(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{C}}$

0.25 **b)** Déduisons que $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$ est un groupe commutatif

Puisque, d'après la question 1), $E$ est un sous-groupe du groupe commutatif $(M_3(\mathbb{R});+)$, et que $\varphi$ est un endomorphisme de $(E;+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$

Alors $(\varphi(E);\star)$ est un groupe commutatif, or $\varphi(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

On conclue donc que $\boxed{(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star) \text{ est un groupe commutatif}}$

**3 -** On munit $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi de composition interne $T$ définie par :

$\forall\,((x;z);(x';z'))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2$ ; $(x;z)T(x';z') = (xRe(z')+x'Re(z);zz')$

($Re(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe $z$)

0.25 **a)** Montrons que $T$ est commutative

Soit $(a;z)$ et $(b;t)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

On a $(a;z)T(b;t) = (aRe(t)+bRe(z);zt) = (bRe(z)+aRe(t);tz) = (b;t)T(a;z)$

Ainsi $(\forall(a;z);(b;t))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2\ \ (a;z)T(b;t)=(b;t)T(a;z)$

***Conclusion :*** $\boxed{T \text{ est commutative dans } \mathbb{R}\times\mathbb{C}}$

0.25 **b)** Vérifions que $(0;1)$ est l'élément neutre de $T$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

On a $0\in\mathbb{R}$ et $1\in\mathbb{C}$, donc $(0;1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

Et pour tout $(a;z)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

On a : $(a;z)T(0;1) = (aRe(1)+0\times Re(z);z\times1) = (a\times1+0;z) = (a;z)$

Et d'après la question 3)$a$)

En déduis que : $(\forall(a;z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C})\ \ (a;z)T(0;1) = (0;1)T(a;z) = (a:z)$

***Conclusion :*** $\boxed{(0;1) \text{ est l'élément neutre de } \mathbb{R}\times\mathbb{C} \text{ pour la loi } T}$

0.5 **c)** Vérifions que $\forall x\in\mathbb{R};(1;i)T(x;-i)=(0;1)$ ; et déduisons que $T$ est non associative dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

❶ Vérifions que $\forall x\in\mathbb{R};(1;i)T(x;-i)=(0;1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } \quad (1;i)T(x;-i) = (1\times Re(-i) + x\times Re(i); i\times(-i)) = (1\times 0 + x\times 0; -i^2) = (0+0;-(-1)) = (0;1)$$

***Conclusion :*** $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}; (1;i)T(x;-i) = (0;1)}$

❷ Déduisons que $T$ est non associative dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

On a : $(0;-i) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ et $(1;-i) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$

Et d'après la question précédente : $(1;i)T(1;-i) = (0;1)$ et $(1;i)T(0;-i) = (0;1)$

Et comme $T$ est commutative dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ et que $(0;1)$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ pour la loi $T$

On en déduis que l'élément $(1;i)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ admet deux éléments symétriques distincts (à savoir $(0;-i)$ et $(1;-i)$)

***Conclusion :*** $\boxed{T \text{ n'est pas associative dans } \mathbb{R}\times\mathbb{C}}$

**4 -** Soit $G = \{(Im(z);z)\,/z \in \mathbb{C}\}$ ($Im(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe $z$)

**0.25** **a)** Montrons que $G$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$

On a :

✸ $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$ est un groupe (d'après la question $2)b)$)

✸ $G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ (car $(\forall z \in \mathbb{C})\ Im(z) \in \mathbb{R}$)

✸ $G \neq \emptyset$ (car $Im(0);0) \in G$ puisque $0 \in \mathbb{C}$

Soit $(U;V) \in G^2$

Donc, il existe $(z;t) \in \mathbb{C}^2$ tel que $U = (Im(z);z)$ et $V = (Im(t);t)$

Or comme le symétrique de $V$ dans $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$ est $V' = (-Im(t);-t)$

En effet ; l'élément neutre de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$ est $\varphi(0) = \varphi(M(0;0;0)) = (0;0+0\times i) = (0;0)$ car $0$ est l'élément neutre du sous-groupe $(E;+)$ de $(M_3(\mathbb{R});+)$ et $\varphi$ est un endomorphisme de $(E;+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$

Et on a $V' \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ et $V\star V' = V'\star V = (-Im(t)+Im(t);-t+t) = (0;0)$

Donc le symétrique de $V$ dans $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$ est $V' = (-Im(t);-t)$

Puis on a : $U\star V' = (Im(z)-Im(t);z-t) = (Im(z-t);z-t)$

Et puisque $z-t \in \mathbb{C}$, alors $U\star V' \in G$, ainsi donc $(\forall (U;V) \in G^2)\ U\star V' \in G$

***Conclusion :*** $\boxed{G \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)}$

**b)** Soit $\psi$ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}^*; \psi(z) = (Im(z);z)$

**0.25** Montrons que $\psi$ est un endomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};T)$

**0.5** **c)** Déduisons que $(G\setminus\{(0;0);T\})$ est un groupe commutatif

Comme $\psi$ est un endomorphisme de $(\mathbb{C}^\star;\times)$ dans $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};T)$ et comme $(\mathbb{C};\times)$ est un groupe commutatif (d'après le cours), alors $(\psi(\mathbb{C}^\star);T)$ est un groupe commutatif

Or : $\psi(\mathbb{C}^\star) = \{\psi(z)/z \in \mathbb{C}^\star\} = \{(Im(z);z)/z \in \mathbb{C}^\star\} = \{(Im(z);z/z \in \mathbb{C} etz \neq 0)\}$

Et puisque $(\forall z \in \mathbb{C})\ z = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ et } Im(z) = 0) \Leftrightarrow (Im(z);z) = (0;0)$

$$\text{Alors : } \quad \psi(\mathbb{C}^\star) = \{(Im(z);z)/z \in \mathbb{C} \text{ et } (Im(z);z) \neq (0;0)\} = \{(Im(z);z)/z \in \mathbb{C}\}\setminus\{(0;0)\} = G\setminus\{(0;0)\}$$

D'où $\boxed{G\setminus\{(0;0)\} \text{ est un groupe commutatif}}$

**0.5** **5 -** Montrons que $(G;\star;T)$ est un corps commutatif

On a $(G;\star)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $(0;0)$ (d'après la question $4)a)$), puisque $G$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$

Et on a $(G\setminus\{(0;0)\};T)$ est un groupe

Et on a $T$ est une de loi de composition interne dans $G$

En effet, pour tout $U$ de $G$, il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que $U=(Im(z);z)$

et $UT(0;0)=(Im(z);z)T(0;0)=(Im(z)\times Re(0)+0\times Re(z);z\times 0)=(0;0)$

Et $(0;0)TU=(0;0)T(Im(z);z)=(0\times Re(z)+Im(z)\times Re(0);0\times z)=(0;0)$

Et $(0;0)\in G$

Donc d'après la question $4)c)$, on conclus que $(\forall(U;V)\in G^2)\ UTV\in G$

Donc $T$ est bien une loi de composition interne dans $G$

Et on a $T$ est commutative dans $G$ (d'après la question 3) et la question $3)a)$)

Et on a $T$ est distributive par rapport à $\star$ dans $G$

En effet : Soit $(U;V;W)\in G^3$, il existe donc $(a;b;c)\in\mathbb{C}^3$ tel que $U=(Im(a);a)$ et $V=(Im(b);b)$ et $W=(Im(c);c)$

Et on a

$$\begin{aligned}
UT(V\star W) &= (Im(a);a)T(((Im(b);b)\star(Im(c);c)))\\
&= (Im(a);a)T(Im(b)+Im(c);b+c)\\
&= (Im(a)\times Re(b+c)+(Im(b)+Im(c))\times Re(a);a\times(b+c))\\
&= (Im(a)\times(Re(b)+Re(c))+(Im(b)+Im(c))\times Re(a);a\times(b+c))\\
&= (Im(a)\times Re(b)+Im(a)\times Re(c)+Im(b)\times Re(a)+Im(c)\times Re(a);ab+ac)\\
&= (Im(a)\times Re(b)+Im(b)\times Re(a);ab)\star(Im(a)\times Re(c)+Im(c)\times Re(a);ac)\\
&= [(Im(a);a)T(Im(b);b)]\star[(Im(a);a)T(Im(c);c)]\\
&= (UTV)\star(UTW)
\end{aligned}$$

Ainsi $(\forall(U;V;W)\in G^3)\ \ UT(V\star W)=(UTV)\star(UTW)$

Et puisque $T$ est commutative dans $G$, alors ceci suffit pour déduire que $T$ est distributive par rapport à $\star$ dans $G$

***Conclusion :*** $\boxed{(G;\star;T) \text{ est un corps commutatif}}$

## Exercice 4 : (3 pts)

Soit $p$ un nombre impair, on pose : $S=1+p+p^2+p^3+...+p^{p-1}$

Soit $q$ un nombre premier *positif* qui divise $S$

0.5 **1 - a)** Montrons que $p$ et $q$ sont premiers entre eux

D'une part, on a $(p;q)\in(\mathbb{Z}^\star)^2$ (car $p$ et $q$ sont des nombres premiers positifs)

D'autre part, comme $q$ divise $S$, alors il existe $k$ dans $\mathbb{Z}$ tel que : $S=kq$

C.à.d. tel que : $qk+p(-1-p-...-p^{p-2})=1$

Et puisque : $(-1-p-...-p^{p-2})\in\mathbb{Z}$ (car $p\in\mathbb{N}$ et $p\geqslant 3$)

Alors, en posant $u=k$ et $v=-1-p-...-p^{p-2}$, on a : $qu+pv=1$ avec $(u;v)\in\mathbb{Z}^2$

Donc, d'après le théorème de **Bézout** $\boxed{p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux}}$

0.25 **b)** Déduisons que : $p^{q-1}\equiv 1[q]$

Comme $p\wedge q=1$ et comme $q$ est un nombre premier *positif*

Alors, d'après le petit théorème de **Fermat** : $\boxed{p^{q-1}\equiv 1[q]}$

0.5 **c)** Vérifions que : $p^{p-1}=(p-1)S$, et déduisons que : $p^p\equiv 1[q]$

On a : $p^p - 1 = (p-1)(1+p+...+p^{p-1})$, donc : $p^p - 1 = (p-1)S$

Puisque $q$ divise $S$ et $(p-1) \in \mathbb{Z}$, alors $q$ divise $(p-1)S$

Donc, d'après le résultat précédent : $q$ divise $p^p - 1$

Autrement dit : $\boxed{p^p \equiv 1[q]}$

**2 -** Supposant que $p$ et $q-1$ sont premiers entre eux

0.75 **a)** Montrons que : $p \equiv 1[q]$ en utilisant le théorème de **Bézout**

Puisque $p \wedge (q-1) = 1$, alors il existe $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $pa + (q-1)b = 1$

☆ **Dans le cas** $a \geqslant 1$ **et** $b \geqslant 0$, on aura $pa + (q-1)b \geqslant 3 \times 1 + 0 = 3$

Et on aura donc $1 \geqslant 3$, ce cas est donc impossible

☆ **Dans le cas** $a \geqslant 1$ **et** $b \leqslant -1$, on a $pa = 1 + (q-1)(-b)$, donc $p^{pa} = p^{1+(q-1)(-b)}$

D'où : $(p^p)^p = p \times \left[p^{q-1}\right]^{(-b)}$

Or $a \in \mathbb{N}^\star$ et $-b \in \mathbb{N}^\star$, donc, d'après les questions 1)$b$) et 1)$c$), on obtient : $1 \equiv p \times 1^{(-b)}[q]$

C.à.d. : $1 \equiv p[q]$

☆ **Dans le cas** $a \leqslant 0$ **et** $b \leqslant 0$, on aura $(q-1)b = 1 + p(-a)$ , donc $p^{(q-1)b} = p^{1+p(-a)}$

D'où : $[p^{(q-1)}]^b = p \times (p^p)^{(-a)}$

Or $b \in \mathbb{N}^\star$ et $(-a) \in \mathbb{N}^\star$, donc d'après les questions 1)$b$) et 1)$c$) : $1^b \equiv p \times 1^{[-a]}[q]$

C.à.d. : $1 \equiv p[q]$

Ainsi, dans tous les cas possibles : $\boxed{1 \equiv p[q]}$

0.25 **b)** Déduisons que $S \equiv 1[q]$

Puisque $p \equiv 1[q]$, alors pour tout entier naturel $m$, on a $p^m \equiv 1[q]$

C.à.àd. $p^m \equiv 1[q]$, et par suite $\displaystyle\sum_{m=0}^{p-1} p^m \equiv \sum_{m=0}^{p-1} 1[q]$

Et par conséquence $\boxed{S \equiv 1[q]}$

0.75 **3 -** Montrons que : $q \equiv 1[p]$

Dans la question 2), nous avons supposé que $p \wedge (q-1) = 1$, ce qui nous a conduit dans la question 2)$b$) à $S \equiv 1[q]$

Or $q$ divise $S$, donc $S \equiv 0[q]$, et par suite $0 \equiv 1[q]$

C'est à dire : $q$ divise 1, ce qui est absurde

Donc la supposition est fausse

Et par conséquence $p \wedge (q-1) \neq 1$

Et puisque $p$ est premier, on en déduite que $p/(q-1)$

Autrement dit $\boxed{q \equiv 1[p]}$

FIN

ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Normal** juin 2024

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ La durée de l'épreuve est de 4 heures ;

✓ L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé ;

✓ Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat ;

✓ L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

## COMPOSANTES DU SUJET

***L'épreuve comporte cinq exercices indépendants. :***

✓ L'EXERCICE 1 se rapporte à l'analyse ........................................(7.5 pts)
✓ L'EXERCICE 2 se rapporte à l'analyse ........................................(2.5 pts)
✓ L'EXERCICE 3 se rapporte aux nombres complexes ...........................(3.5 pts)
✓ L'EXERCICE 4 se rapporte aux structures algébriques........................(3.5 pts)
✓ L'EXERCICE 5 se rapporte à l'arithmétique ....................................(3 pts)

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$
♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 : (7.5 points)

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par

$$f(1)=\frac{1}{2} \quad \text{et pour tout } x\in\left]1,+\infty\right[, \quad f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 **1 -** Montrer que $f$ est continue à droite en 1 .

0.5 **2 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 **3 - a)** Soit $x\in]1,+\infty[$. En posant $t=(x-1)^2$, vérifier que :

$$\frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$$

0.5 **b)** Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[$, on a :

$$-\frac{1}{2}<\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}<\frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0;t]$ )

0.25 **c)** En déduire que :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=-\frac{1}{2}$$

0.5 **4 - a)** Montrer que :

$$\forall x\in]1,+\infty\left[, \quad \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=-\frac{\ln(x)}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}\right.$$

0.5 **b)** En déduire que $f$ est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**5 -** Pour tout $x\in[1,+\infty[$, on pose

$$I(x)=\int_1^x\frac{t^2-1}{t^3}dt \quad \text{et} \quad J(x)=\int_1^x\frac{t^2-1}{t^2}dt$$

0.5 **a)** Montrer que :

$$\forall x\in[1,+\infty[,\quad 0\le I(x)\le J(x)$$

0.5 **b)** Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a :

$$I(x)=\ln(x)-\frac{x^2-1}{2x^2} \quad \text{et} \quad J(x)=\frac{(x-1)^2}{x}$$

0.5 **c)** Montrer que :

$$\forall x \in ]1, +\infty\left[, \quad f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}\right.$$

0.5 d) En déduire que :

$$\forall x \in ]1, +\infty\left[, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0\right.$$

0.25 **6 -** a) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

0.5 b) Tracer la courbe $(C)$. (On prendra $\|\vec{i}\| = 1$ **cm** et $\|\vec{j}\| = 2$ **cm** )

0.5 **7 -** Montrer que l'équation $f(x) = x - 1$ admet une unique solution $a$ dans $]1, 2[$.

**8 -** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$a_0 \in [1, +\infty[ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 1 + f(a_n)$$

0.5 a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|a_n - a|$$

0.5 b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$$

0.25 c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

## Exercice 2 : (2.5 points)

Soit $F$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

0.5 **1 -** a) Montrer que $F$ est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$.

0.5 b) En déduire que $F$ est une bijection de $[0; 1]$ vers $[0; \beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2} dt$.

**2 -** On note $F^{-1}$ la bijection réciproque de $F$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$$

0.5 a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)dt$.

0.5 b) Montrer que $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^1 ue^{u^2} du$.

(On pourra effectuer le changement de variable $u = F^{-1}(t)$ )

0.5 **c)** En déduire que :

$$\ell = \frac{e-1}{2\beta}$$

## Exercice 3 : (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2iz + \alpha = 0 \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

### Partie I

0.25 **1 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation $(E_\alpha)$ est $\Delta = -4(1+\alpha)$.

0.25 **b)** Déterminer l'ensemble des valeurs $\alpha$ pour lesquelles l'équation $(E_\alpha)$ admet dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

0.5 **2 -** On note $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation $(E_\alpha)$.

Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

### Partie II

Soient $\Omega, M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectivement $\alpha, z_1$ et $z_2$.

**1 -** On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$.

0.5 **a)** Déterminer $z_1$ et $z_2$ en fonction de $m$.

0.25 **b)** En déduire que les points $O, M_1$ et $M_2$ sont alignés.

**2 -** On suppose que les points $O, M_1$ et $M_2$ ne sont pas alignés.

0.25 **a)** Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\mathbf{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = 0$.

0.5 **b)** Montrer que :

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4\,\mathbf{Re}\,(z_1\overline{z_2})$$

0.25 **c)** En déduire que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$.

0.25 **3 - a)** Montrer que :

$$(z_1 - z_2)^2 = \Delta$$

0.5 **b)** Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $\Omega$ pour que le triangle $OM_1M_2$ soit rectangle en $O$.

## Exercice 4 : ( 3.5 points )

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif dont le zéro est la matrice $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et l'unité est la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

On considère dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ la loi de composition interne $T$ définie par :

$$\forall((a,b),(c,d))\in(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*)^2\,;\quad (a,b)T(c,d)=(a\bar{d}+c,bd)$$

( $\bar{d}$ étant le conjugué du nombre complexe $d$ ).

0.5 **1 - a)** Vérifier que $(i,2)T(1,i)=(2,2i)$, puis calculer $(1,i)T(i,2)$.

0.25 **b)** En déduire que la loi $T$ n'est pas commutative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

0.5 **2 -** Montrer que la loi $T$ est associative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

0.25 **3 -** Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre pour $T$ dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

0.5 **4 - a)** Vérifier que $\forall(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*,(a,b)T\left(-\frac{a}{\bar{b}},\frac{1}{b}\right)=(0,1)$.

0.5 **b)** Montrer que $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*,T\ )$ est un groupe non commutatif.

0.5 **5 - a)** Montrer que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne $T$.

0.5 **b)** Montrer que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*,T)$.

## Exercice 5 : (3 points)

Soient $p$ et $q$ deux nombres premiers distincts et $r$ un entier naturel premier avec $p$ et avec $q$.

1 **1 - a)** Montrer que $p$ divise $r^{p-1}-1$ et que $q$ divise $r^{q-1}-1$.

0.5 **b)** En déduire que $p$ et $q$ divisent $r^{(p-1)(q-1)}-1$.

0.5 **c)** Montrer que $pq$ divise $r^{(p-1)(q-1)}-1$.

1 **2 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x\equiv 3(\bmod 221)$. (On donne : $221=13\times17$).

FIN

ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : NORMALE 2024

## MATHÉMATIQUES

**Exercice 1 Session : NORMALE 2024** **7.5 Pts**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par

$$f(1)=\frac{1}{2} \quad \text{et pour tout } x\in\left]1,+\infty\right[, \quad f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 pt **1 - Montrons que $f$ est continue à droite en 1 .** Comme :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x)}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\\ &= 1\times\frac{1}{2} \quad \text{Car : } \lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x)}{x-1}=1\\ &= \frac{1}{2}=f(1)\end{aligned}$$

**Donc $f$ est continue à droite en 1**

0.5 pt **2 - Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis interprétons graphiquement le résultat obtenu.**

- **Calculons** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{x^2-1}\\ &= 0 \quad \text{Car : } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

- **Interprétation graphique**

Comme : $x+\infty f(x) = 0$

Alors $(C)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

0.25 pt **3 -** **a)** Soit $x \in ]1, +\infty[$. En posant $t = (x-1)^2$, vérifions que : $\frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$

Soit $x > 0$ on pose $(x-1)^2 = t$

Donc : $\sqrt{t} = |x-1| = x-1$ ; car $x-1 > 0$

Alors : $\sqrt{t}+1 = x$ et $1-x = -\sqrt{t}$

Finalement : $\frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$

0.5 pt **b)** Montrons que $(\forall t \in ]0, +\infty[$, on a : $-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0; t]$ )

Soient $t > 0$ fixé, et $g$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, t]$ par : $g(x) = -\sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x})$

- On a $x \to 1\sqrt{x}$ est continue sur $[0, t]$ et $(\forall x \in [0, t])$ $1+\sqrt{x} > 0$ donc la fonction $x \ln(1+\sqrt{x})$ est continue sur $[0, t]$

  Et puisque $x \to -\sqrt{x}$ est continue sur $[0, t]$

  Alors la fonction $g$ est continue sur $[0, t]$ comme la somme de deux fonctions continue sur $[0, t]$

- On sait que la fonction $x \to -\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, t[$

  Et que la fonction $x \ln(1+\sqrt{x})$ est dérivable sur $]0, t[$ (car : $x \to 1\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, t[$ et $(\forall x \in ]0, t[)$ $1+\sqrt{x} > 0$)

Donc la fonction $g$ est dérivable sur $]0,t[$ Comme la somme de deux fonctions dérivables sur $]0,t[$

D'après **Théorème des accroissements finis finis (T.A.F)** il existe $c \in ]0,t[$ tel que :

$g(t)-g(0)=tg'(c)$

Et puisque $\forall x \in ]0,t[$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \\ &= \frac{-1}{2\,(1+\sqrt{x})} \end{aligned}$$

D'où $(\exists c \in ]0,t[)\ /\ -\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right) = t\left(\frac{-1}{2\,(1+\sqrt{c})}\right)$

Donc : $\exists c \in ]0,t[\ /\ \dfrac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t} = \dfrac{-1}{2\,(1+\sqrt{c})}$

On a : $c \in ]0,t[ \Rightarrow 0<\sqrt{c}<\sqrt{t}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 < 1+\sqrt{c} < 1+\sqrt{t} \\ &\Rightarrow 2 < 2\,(1+\sqrt{c}) < 2\left(1+\sqrt{t}\right) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2\,(1+\sqrt{c})} < -\frac{1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} < -\frac{1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall t \in ]0,+\infty[$, on a : $-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$

**0.25 pt** **c)** Déduisons que : $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$

On a $(\forall t \in ]0,+\infty[$, on a : $-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})} = -\frac{1}{2}$

Donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t} = -\frac{1}{2}$

D'où : $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})} = -\frac{1}{2}$ ; **(question 3-a)**

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$

**0.5 pt** **4 - a)** Montrons que : $\forall x \in ]1,+\infty\Big[,\quad \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$ On a $(\forall x>1)$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} &= \frac{\frac{\ln(x)}{x^2-1}-\frac{1}{2}}{x-1} \\
&= \frac{2\ln(x)-(x^2-1)}{2(x-1)(x^2-1)} \\
&= \frac{(x+1+1-x)\ln(x)+(1-x)(1+x)}{2(x-1)(x^2-1)} \\
&= \frac{(1-x)\ln(x)+(1+x)\ln(x)+(1-x)(1+x)}{2(x-1)(x^2-1)} \\
&= -\frac{(1-x)\ln(x)}{2(1-x)(x-1)(x+1)}+\frac{(1+x)(\ln(x)-x+1)}{2(x+1)(x-1)^2} \\
&= -\frac{\ln(x)}{(x-1)}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{(\ln(x)-x+1)}{2(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in ]1,+\infty\left[,\quad \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{\ln(x)}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}\right.$

0.5 pt **b)** Déduisons que $f$ est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Comme :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to1^+} -\frac{\ln(x)}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2} \\
&= -1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2} = f'_d(1)
\end{aligned}$$

Car : $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{4}$ et $\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$

Donc : $f$ est dérivable à droite en 1

**Interprétation géométrique :**

$f$ est dérivable à droite en 1, la courbe de la fonction f $(C)$ admet une demi tangente en $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ d'équation : $(T_d) \quad : \quad y = f'(1)(x-1)+f(1)$

D'où : $(T_d) \quad : \quad y = -\frac{f1}{2}x+1$

**5 -** Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on pose $I(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}dt$

0.5 pt **a)** Montrons que : $\forall x \in [1,+\infty[,\quad 0 \leq I(x) \leq J(x)$

Soit $x \in [1,+\infty[$

On a : $1 \leq t \leq x \Rightarrow 0 \leq t^2-1 \leq x^2-1$

Donc $t^2-1 \geq 0$ et que $t^3 \geq 1 > 0$

D'où $(\forall t \in [1;x])$ ; $\frac{t^2-1}{t^3} \neq 0$

Et puisque $x \mapsto \frac{t^2-1}{t^3}$ est continue sur $[1;+\infty[$

Alors : $(\forall t \in [1;x])$ ; $\displaystyle\int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}\mathrm{d}t \geq 0$

**D'où :** $(\forall t \in [1;x])$ **;** $\displaystyle\int_1^x I(x)\mathrm{d}t \geq 0$ **(1)**

Comme :

$(\forall t \in [1;x]) \quad t \neq 1 \Rightarrow t^3 \geq t^2$

$$\Rightarrow \frac{t^2-1}{t^3} \leq \frac{t^2-1}{t^2} \quad \text{Car : } t^2-1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}\mathrm{d}t \quad \text{Car : } x \to \frac{t^2-1}{t^2} \text{ est continue sur } [1,x]$$

**Donc** $(\forall x \in [1;x])$ **;** $I(x) \leq J(x)$ **(2)**

$\boxed{\text{D'après (1) et (2) } (\forall x \in [1;+\infty[)\ ;\ 0 \leq I(x) \leq J(x)}$

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a : $I(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}$ et $J(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$

Soit $x \in [1;+\infty[$ :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^x \left(\ln|t| + \frac{1}{2t^2}\right)'\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln(t) + \frac{1}{2t^2}\right]_1^x \quad \text{Car : } \quad t \geq 1 > 0 \\
&= \ln(x) + \frac{1}{2x^2} - \left(\ln(1) - \frac{1}{2}\right) \\
I(x) &= \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } I(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}}$$

$$
\begin{aligned}
J(x) &= \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^x 1-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^x \left(t+\frac{1}{t}\right)'\mathrm{d}t \\
&= \left[t+\frac{1}{t}\right]_1^x \\
&= x+\frac{1}{x}-2 \\
J(x) &= \frac{x^2+1-2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}
\end{aligned}
$$

Donc : pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a : $I(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}$ et $J(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$Soit $x \in [1;+\infty[$

0.5 pt

**c)** Montrer que : $\forall x \in ]1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$

On a $f$ est dérivables sur $]1,+\infty[$

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in ]1;+\infty[) \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\times(x^2-1)-2x\ln(x)}{\left(x^2-1\right)^2} \\
&= \frac{x^2-1-2x^2\ln(x)}{x\left(x-1\right)^2\times(x+1)^2} \\
&= \frac{-2x^2\left(\ln(x)-\frac{x^2-1}{2x^2}\right)}{x^2\left(x-1\right)^2\times\frac{(x+1)^2}{x}} \\
f'(x) &= \frac{-2}{(x+1)^2}\times\frac{I(x)}{J(x)}
\end{aligned}
$$

Donc : $\forall x \in ]1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$

0.5 pt

**d)** En déduire que : $\forall x \in ]1,+\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

On a $(\forall x \in ]1,+\infty[) \quad f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$

Puisque :

$$
\begin{aligned}
\forall x \in ]1,+\infty[ \quad ; \quad 0 \leq I(x) \leq J(x) &\Rightarrow 0 < \frac{I(x)}{J(x)} < 1 \quad \text{Car : } J(x) > 0 \\
&\Rightarrow -\frac{2}{(x+1)^2} < -\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{I(x)}{J(x)} < 0 \quad \left(-\frac{2}{(x+1)^2} < 0\right) \\
&\Rightarrow -\frac{2}{(x+1)^2} < f'(x) < 0
\end{aligned}
$$

Or :

$$x > 1 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow -\frac{2}{(x+1)^2} > -\frac{1}{2}$$

Donc : $\forall x \in ]1,+\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

0.25 pt **6 - a)** Dressons le tableau de variations de la fonction $f$.

On a : $\forall x \in ]1,+\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

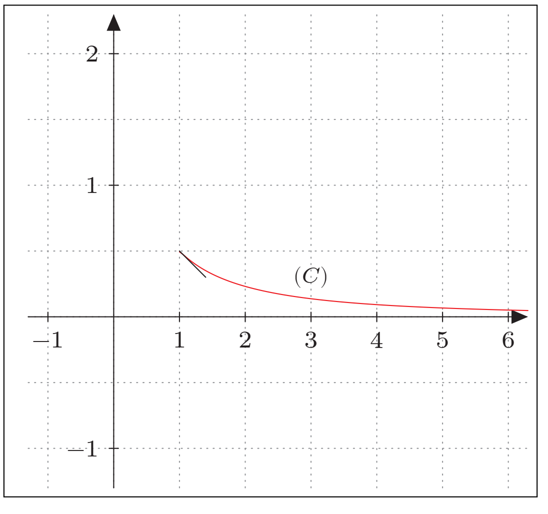
Donc $f$ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$

$f$ est continue + dérivable à droite en 1

Donc $f$ est strictement décroissant sur $[1,+\infty[$

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

0.5 pt **b)** Traçons la courbe $(C)$. (On prendra $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 2$ cm )




**7 -** Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x)-x+1$. On a $h$ est dérivable sur $]1;2[$ comme étant somme de deux fonctions dérivables et $(\forall x \in ]1;2[)$ ; $h'(x) = f'(x) - 1 \leq -1 < 0$ donc $h$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]1;2[$, donc elle réalise une bijection de $]1;2[$ vers $h(]1;2[) = \left]\lim_{x\to 2^-} h(x); \lim_{x\to 1^+} h(x)\right[ = ]h(2);h(1)[$. Comme $h(2) = f(2)-1 < 0$ et $h(1) = f(1) > 0$

donc d'après le T.V.I $(\exists! \alpha \in ]1;2[)\,;\, h(\alpha)=\alpha$. $\boxed{\text{D'où } (\exists! \alpha \in ]1;2[)\,;\, f(\alpha)=\alpha-1.}$

**8 -** On a $a_0 \in [1,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 + f(a_n)$.

**a)** On pose $a_{n+1} = \varphi(a_n)$ où $\varphi$ est la fonction définie par : $\varphi(x) = f(x) + 1$.

On a $\varphi$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ et d'après la question **5-** $(\forall x \in [1;+\infty[), |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et comme $f'_d(1) = \frac{-1}{2}$, donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis $(\forall (a,b) \in [1;+\infty[^2), |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$.

Comme $\alpha \in [1;+\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$, $a_n \in [1;+\infty[$ car $\varphi([1;+\infty[) = \left[1;\frac{2}{3}\right[ \subset [1;+\infty[$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, |\varphi(a_n) - \varphi(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$ ce qui donne : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, |a_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|.}$

**b)** Pour $n = 0$, on a $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - \alpha| = |a_0 - \alpha|$ donc $|a_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - \alpha|$.

Supposons que $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$ et montrons que $|a_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - \alpha|$.

D'après la question précédente on a $|a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$ et d'après l'hypothèse de récurrence on a $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$ donc $|a_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - \alpha|$.

D'où d'après le principe de raisonnement par récurrence : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}), |a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|.}$

**c)** D'après la question précédente on a $(\forall n \in \mathbb{N})$, $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$. Donc la suite $(a_n)$ est convergente et on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha.}$

## Exercice 2 Session : NORMALE 2024 — 2.5 Pts

Soit $F$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

0.5 pt **1 -** **a)** Montrons que $F$ est continue et strictement croissante sur $[0;1]$. Exercice 2 (L'Analyse2)

On a la fonction : $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$, en particulier sur $[0;1]$

Et on a $0 \in [0,1]$ alors la fonction $F$ est dérivable sur $[0;1]$

Donc continue sur $[0;1]$ et on a : $(\forall x \in [0;1])$ : $F'(x) = e^{x^2} \rangle\, 0$,

$\boxed{\text{donc } F \text{ est strictement croissante sur } [0;1].}$

0.5 pt **b)** En déduire que $F$ est une bijection de $[0;1]$ vers $[0;\beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2}\,dt$.

On a $F$ est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ alors elle réalise une bijection de $[0,1]$ vers $F([0,1]) = [F(0), F(1)] = [0, \beta]$, avec $F(0) = 0$ et $F(1) = \int_0^1 e^{t^2} dt = \beta$.

$\boxed{\text{D'où } F \text{ est une bijection de } [0;1] \text{ vers } [0;\beta]}$

**2 -** On note $F^{-1}$ la bijection réciproque de $F$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$$

0.5 pt **a)** Montrons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)dt$.

On a : $F^{-1}$ est continue sur $[0, \beta]$ (car $F$ est continue sur $[0,1]$ ) alors la suite $(\beta S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Et on a : $\lim_{n\to\infty} \beta S_n = \int_0^\beta F^{-1}(x)dx$.

Donc $\beta \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^\beta F^{-1}(x)dx$

Donc $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(x)dx$

$\boxed{\text{D'où la suite } (S_n)_{n\geq 1} \text{ est convergente et on a : } \lim_{n\to+\infty} S_n = l = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(x)dx.}$

0.5 pt **b)** Montrons que $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^1 ue^{u^2}du$.

Considérons l'intégrale $\int_0^B F^{-1}(x)dx$ et posons $u = F^{-1}(x)$.

On a $(\forall x \in [0, \beta])(\forall u \in [0,1]) : u = F^{-1}(x) \Leftrightarrow x = F(u)$

Donc on a : $dx = F'(u)du = e^{u^2}du$.

De même on a : $x = 0 \Leftrightarrow u = 0$ et $x = \beta \Leftrightarrow u = 1$

Donc : $\int_0^\beta F^{-1}(x)dx = \int_0^1 ue^{u^2}du$.

$\boxed{\text{D'où } l = \frac{1}{\beta}\int_0^1 ue^{u^2}du.}$

0.5 pt **c)** En déduire que :

$$\ell = \frac{e-1}{2\beta}$$

Considérons l'intégrale $\int_0^1 ue^{u^2}du$

On a : $\int_0^1 ue^{u^2}du = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2)^1 e^{u^2}du = \frac{1}{2}\left[e^{u^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$.

D'où on a : $l = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2}(e-1)\right) = \frac{e-1}{2\beta}$.

## Exercice 3 Session : NORMALE 2024 3.5 Pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2iz + \alpha = 0 \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

### PARTIE I

0.25 pt **1 -** **a)** Montrons que le discriminant de l'équation $(E_\alpha)$ est $\Delta = -4(1+\alpha)$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4 \times 1 \times \alpha = -4 - 4\alpha = -4(1+\alpha)$

Donc $\boxed{\Delta = -4(1+\alpha)}$

0.25 pt **b)** Déterminons l'ensemble des valeurs $\alpha$ pour lesquelles l'équation $(E_\alpha)$ admet dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

On a pour que l'équation $(E_\alpha)$ admet dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes il faut et il suffit que $\Delta \neq 0$ c'est-à-dire que $\alpha \neq -1$

Donc l'ensemble des valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $(E_\alpha)$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ est $\mathbb{C} \backslash \{-1\}$

0.5 pt **2 -** On note $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation $(E_\alpha)$. Déterminons $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

On sait que $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$ avec $(E_\alpha) : az^2 + bz + c = 0$

Donc $\boxed{z_1 + z_2 = \dfrac{2i}{1} = 2i}$ et $\boxed{z_1 z_2 = \dfrac{\alpha}{1} = \alpha}$

### PARTIE II

Soient $\Omega, M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectivement $\alpha, z_1$ et $z_2$.

**1 -** On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$.

0.5 pt **a)** Déterminons $z_1$ et $z_2$ en fonction de $m$.

On a $\Delta = -4(1+\alpha)$ avec $\alpha = m^2 - 2m$ donc $\Delta = -4(m+1)^2 = (2i(m+1))^2$

Alors $z_1 = \dfrac{2i - 2i(m+1)}{2}$ Et $z_2 = \dfrac{2i + 2i(m+1)}{2}$

D'où : $\boxed{z_1 = (2-m)i}$ Et $\boxed{z_2 = mi}$

**0.25 pt** **b)** Déduisons que les points $O, M_1$ et $M_2$ sont alignés.

On a $z_1 = (2-m)i \in i\mathbb{R}$ Et $z_2 = mi \in i\mathbb{R}$ (De plus $0 \in i\mathbb{R}$ )

Donc $\boxed{\text{les points } O, M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont alignés.}}$

**2 -** On suppose que les points $O, M_1$ et $M_2$ ne sont pas alignés.

**0.25 pt** **a)** Montrons que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = 0$.

On a

$$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\bar{z_2}} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \in i\mathbb{R} \iff z_1\overline{z_2} \in i\mathbb{R} \iff Re\,(z_1\overline{z_2}) = 0$$

**0.5 pt** **b)** Montrons que : $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$

On a $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} - z_2\overline{z_2}$

$= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$

$= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 - 4\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$

**0.25 pt** **c)** Déduisons que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$.

On a $\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \iff \; Re\,(z_1\bar{z_2}) = 0$ (D'aprés la question 2)a

Et d'aprés la question 2)b $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$

Donc $\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \iff |z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$

$\iff |z_1 - z_2| = |z_1 + z_2| = |2i| = 2$ (Partie I Q2 $z_1 + z_2 = 2i$)

Donc $\boxed{\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \text{ si et seulement si } |z_1 - z_2| = 2.}$

**0.25 pt** **3 -** **a)** Montrons que :$(z_1 - z_2)^2 = \Delta$

On a $z_1 = \dfrac{2i - \Theta}{2}$ Et $z_2 = \dfrac{2i + \Theta}{2}$ Avec $\Theta^2 = \Delta$

Donc $z_1 - z_2 = \dfrac{2i + \Theta}{2} - \dfrac{2i - \Theta}{2} = \Theta$

Alors $\boxed{(z_1 - z_2)^2 = \Theta^2 = \Delta}$

0.5 pt **b)** Déterminons l'ensemble $\Gamma$ des points $\Omega$ pour que le triangle $OM_1M_2$ soit rectangle en $O$.

Pour que le triangle $OM_1M_2$ soit rectangle en $O$ il faut et il suffit que : $\frac{z_{M_1}-z_O}{z_{M_2}-z_O} \in i\mathbb{R}$

$\iff \frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R}$

$\iff |z_1 - z_2| = 2$ (Qestion 2)c)

$\iff |z_1 - z_2|^2 = 4$

$\iff |-4(1+\alpha)|^2 = 4$ (Qestion 3)a)

$\iff |\alpha + 1|^2 = 1$

Donc l'ensemble $\Gamma$ des points $\Omega$ pour que le triangle $OM_1M_2$ soit rectangle en $O$ est le cercle de centre $I(-1)$ et de rayon 1 sauf le point $O$ pour que les points $O, M_1$ et $M_2$ ne sont pas alignés (D'aprés Q2)

Finalement $\boxed{\Gamma = \mathcal{C}(I(-1);1)\backslash\{O\}}$

## Exercice 4 Session : NORMALE 2024 3.5 Pts

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif dont le zéro est la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'unité est la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ la loi de composition interne $T$ définie par :

$$\forall((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2 ; \quad (a,b)T(c,d) = (a\bar{d} + c, bd)$$

( $\bar{d}$ étant le conjugué du nombre complexe $d$ ).

0.5 pt **1 - a)** Vérifions que $(i,2)T(1,i) = (2,2i)$, puis calculer $(1,i)T(i,2)$.

$$\begin{aligned} (i,2)T(1,i) &= (i\bar{i} + 1, 2i) \\ &= (-i^2 + 1, 2i) \\ &= (1 + 1, 2i) \\ &= (2, 2i) \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{(i,2)T(1,i)=(2,2i)}$

$$\begin{aligned}(1,i)T(i,2)&=(1\times\bar{2}+i,2i)\\&=(2+i,2i)\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{(1,i)T(i,2)=(2+i,2i)}$

0.25 pt **b)** Déduisons que la loi $T$ n'est pas commutative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

On a $(i,2)T(1,i)=(2,2i)$ et $(1,i)T(i,2)=(2+i,2i)$

Et comme $(2,2i)\neq(2+i,2i)$, donc $(1,i)T(i,2)\neq(i,2)T(1,i)$

D'où $\boxed{T \text{ n'est pas commutative dans } \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*}$

0.5 pt **2 -** Montrons que la loi $T$ est associative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

Soit $(a,b)$, $(c,d)$ et $(e,f)$ trois éléments de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

On a

$$\begin{aligned}\Big[(a,b)T(c,d)\Big]T(e,f)&=(a\bar{d}+c,bd)T(e,f)\\&=((a\bar{d}+c)\bar{f}+e,bdf)\\&=(a\bar{d}\bar{f}+c\bar{f}+e,bdf)\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}(a,b)T\Big[(c,d)T(e,f)\Big]&=(a,b)T(c\bar{f}+e,df)\\&=(a\bar{d}\bar{f}+c\bar{f}+e,bdf)\end{aligned}$$

Donc $\Big[(a,b)T(c,d)\Big]T(e,f)=(a,b)T\Big[(c,d)T(e,f)\Big]$

D'où $\boxed{\text{la loi } T \text{ est associative dans } \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*}$

0.25 pt **3 -** Vérifions que $(0,1)$ est l'élément neutre pour $T$ dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

Soit $(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

On a bien $(0,1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $(a,b)T(0,1) = (a \times \bar{1} + 0, b \times 1) = (a,b)$

De plus $(0,1)T(a,b) = (0 \times \bar{b} + a, 1 \times b) = (a,b)$

Donc $\boxed{(0,1) \text{ est l'élément neutre pour } T \text{ dans } \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*}$

**0.5 pt** **4 -** **a)** Vérifions que $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, (a,b)T\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = (0,1)$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned}(a,b)T(-\tfrac{a}{b}, \frac{1}{b}) &= (a \times (\overline{\frac{1}{b}}) + (-\frac{a}{\bar{b}}), b \times \frac{1}{b}) \\ &= (\frac{a}{\bar{b}} - \frac{a}{\bar{b}}, 1) \\ &= (0,1)\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, (a,b)T\left(-\frac{a}{\bar{b}}, \frac{1}{b}\right) = (0,1)}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif.

On a bien la loi $T$ est une loi de composition interne

- $T$ est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*/$
- $T$ possède un élément neutre $(0,1) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)$

De plus $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, (a,b)T\left(-\frac{a}{\bar{b}}, \frac{1}{b}\right) = (0,1)$

Et $\left(-\frac{a}{\bar{b}}, \frac{1}{b}\right) T(a,b) = (-\frac{a}{\bar{b}} \times \bar{b} + a, \frac{1}{b} \times b) = (0,1)$

Et comme $\left(-\frac{a}{\bar{b}}, \frac{1}{b}\right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, donc tout élément de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ est symétrisable

De plus $T$ est non commutative, d'où $\boxed{(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T) \text{ est un groupe non commutatif}}$

**0.5 pt** **5 -** **a)** Montrons que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne $T$.

Soit $(a,b),(c,d) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ $\quad (a,b \in \mathbb{R}$ et $c,d \in \mathbb{R}^*$ )

$(a,b)T(c,d) = (a\bar{d} + c, bd) = (ad + c, bd)$ $\quad$ (car $\bar{d} = d$ ; $d \in \mathbb{R}^*$)

Et comme $ad + c \in \mathbb{R}$ et $bd \in \mathbb{R}^*$ $\quad$ (car $b,d \in \mathbb{R}^*$)

donc $(ad+c, bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, d'où $(a,b)T(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

Donc $\boxed{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \text{ est stable par la loi de composition interne } T}$

**0.5 pt** **b)** Montrons que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$.

On a bien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

De plus $(0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, donc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \neq \emptyset$

Soient $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et montrons que : $(a,b)T(c,d)^{-1} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ $\quad ((c,d)^{-1} = (-\frac{c}{d}, \frac{1}{d})$ est le symétrique de $(c,d)$ dans $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T))$

On a $(c,d)^{-1} = (-\frac{c}{d}, \frac{1}{d}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ $\quad$ (car $\bar{d} = d$ et $\frac{1}{d} \in \mathbb{R}^*$)

Et comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi $T$, donc $(a,b)T(c,d)^{-1} = (a,b)T(-\frac{c}{d}, \frac{1}{d}) = (\frac{a-c}{d}, \frac{b}{d}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

Finalement $\boxed{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \text{ est un sous-groupe du groupe } (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)}$

## Exercice 5 — Session : Normale 2024 — 3 Pts

Soient $p$ et $q$ deux nombres premiers distincts et $r$ un entier naturel premier avec $p$ et avec $q$.

1 pt **1 - a)** Montrons que $p$ divise $r^{p-1} - 1$ et que $q$ divise $r^{q-1} - 1$.

Comme $p$ et $q$ sont premiers et comme $p \wedge r = 1$ et $q \wedge r = 1$

Alors, d'après le théorème de Fermat, on a : $r^{p-1} \equiv 1[p]$ et $r^{q-1} \equiv 1[q]$

Donc $r^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$ et $r^{q-1} - 1 \equiv 0[q]$

$\boxed{\text{D'où : } p/r^{p-1} - 1 \text{ et } q/r^{q-1} - 1}$

0.5 pt **b)** Déduisons que $p$ et $q$ divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

On a $r^{p-1} \equiv 1[p]$ et $q - 1 \in \mathbb{N}$ (puisque $q \geq 2$), alors : $(r^{p-1})^{q-1} \equiv 1^{q-1}[p]$ et $q/r^{q-1} - 1$

Donc $r^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$

D'où : $\boxed{p/r^{(p-1)(q-1)} - 1}$

Et comme $p$ et $q$ jouent deux rôles symétriques, alors on démontre de la même manière que $\boxed{q/r^{(q-1)(p-1)} - 1}$

0.5 pt **c)** Montrons que $pq$ divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

Comme $p/r^{(p-1)(q-1)} - 1$ et $q/r^{(p-1)(q-1)} - 1$ et comme $p \wedge q = 1$ (puisqu'ils sont premiers et distincts)

Alors $\boxed{pq/r^{(p-1)(q-1)} - 1}$

1 pt **2 -** Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3(\text{mod} 221)$. (On donne : $221 = 13 \times 17$).

Dans ce qui précède, prenons $p = 13$ et $q = 17$ et $r = 2024$

On a 13 et 17 sont deux entiers naturels premiers et distincts

Et on a $(13-1)(17-1) = 12 \times 16 = 192$

E Et comme $2024 = 13 \times 155 + 9$ et $2024 = 17 \times 119 + 1$, alors 13 ne divise pas 2024, de même pour 17

Et comme ils sont premiers, alors on a : $13 \wedge 2024 = 1$ et $17 \wedge 2024 = 1$

De la question 1) on en déduit que : $13 \times 17 / 2024^{192} - 1$, c.à.d $221/2024^{192} - 1$

Donc, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} 2024^{192}x \equiv 3[221] &\Leftrightarrow x \equiv 3[221] \\ &\Leftrightarrow x = 3 + 221k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de notre équation est $\boxed{S = \{3 + 221k / k \in \mathbb{Z}\}}$

$\boxed{\text{FIN}}$

★ R O Y A U M E ★ D U ★ M A R O C ★

# Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session : RATTRAPAGE 2024

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

- ❖ Exercice 1 : **Analyse** .................................................... **6.5 points**
- ❖ Exercice 2 : **Analyse** .................................................... **3.5 points**
- ❖ Exercice 3 : **Nombres complexes** ...................................... **3.5 points**
- ❖ Exercice 4 : **Structures algébriques** ................................. **3.5 points**
- ❖ Exercice 5 : **Arithmétique** ............................................. **3 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien

## Exercice 1 **Session :** Rattrapage 2024 **6.5** *Pts*

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction numérique $f_n$ définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$f_n(0) = 0$ et $\forall x \in ]0; +\infty[ \ ; \ f_n(x) = x - x^n \ln x$

Et on note $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

**0.25 pt** **1 - a)** Montrer que $f_n$ est continue à droite en 0

**0.75 pt** **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

**0.5 pt** **c)** Montrer que $f_n$ est dérivable à droite en 0 et que son nombre dérivé à droite en 0 est égal à 1

**0.5 pt** **d)** Montrer que $f_n$ est dérivable sur$]0; +\infty[$ et que

$\forall x \in ]0; +\infty[ \ ; \ f_n'(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$

**0.5 pt** **e)** Montrer que $f_n$ est strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

**0.5 pt** **2 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $\forall x \in [0; +\infty[ \ ; \ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

**0.25 pt** **b)** En déduire la position relative des deux courbe $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$

**0.5 pt** **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n \in ]1; 2[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

(On prendra $\ln 2 \approx 0.7$)

**0.25 pt** **b)** Vérifier que $(\forall n \geq 2) \quad \alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1$

**0.25 pt** **c)** En déduire que pour tout $n \geq 2 \ , \ f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$

**0.5 pt** **d)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante

**0.25 pt** **e)** En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente

**4 -** On pose $l = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

**0.25 pt** **a)** Montrer que $1 \leq l \leq 2$

**0.5 pt** **b)** Montrer que pour tout $n \geq 2 \ , \ n - 1 = -\dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

**0.25 pt** **c)** On suppose que $l > 1$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ en fonction de $l$

**0.5 pt** **d)** En déduire que la valeur de la limite $l$

## Exercice 2 — Session : Rattrapage 2024 — 3.5 Pts

0.25 pt **1 - a)** Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

0.5 pt **b)** Pour tout entier $n \geq 1$ ; on pose $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite

0.25 pt **2 -** Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \leq 1$

0.5 pt **3 - a)** Montrer que $(\forall x \in [0;1])$ ; $0 \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq \mathrm{e}x$

0.25 pt **b)** En déduire que $(\forall x \in [0;1])$ ; $0 \leq \mathrm{e}^x - 1 - x \leq \frac{\mathrm{e}}{2}x^2$

**4 -** Pour tout $n \geq 1$, on pose $w_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\mathrm{e}^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1\right)$

0.25 pt **a)** Montrer que : pour tout entier $n \geq 1$ ; $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

0.25 pt **b)** Montrer que la fonction : $x \mapsto (1+x^2)^{-2}$ est strictement décroissante sur $[0;1]$

0.25 pt **c)** En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$, on a

$$\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2}\mathrm{d}x$$

0.5 pt **5 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{2n}$

0.5 pt **b)** En déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite

## Exercice 3 — Session : Rattrapage 2024 — 3.5 Pts

Soit $m \in \mathbb{C}^*$

### Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ ; $(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que le descriminant de l'équation $(E)$ est $\Delta = (im)^2$

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$

**2 -** Soient $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de $(E)$

0.5 pt Mettre sous la forme exponentielle $z_1 z_2$ dans le cas où $m = re^{i\theta}$ $(r \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \theta \in \mathbb{R})$

### Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\text{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

On pose $z_1 = m$ et $z_2 = m(1+i)$

Soit $M_1$ le point d'affixe $z_1$ et $M_2$ le point d'affixe $z_2$ et $M_3(z_3)$ l'image du point $O$ par la rotation de centre $M_2$ et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $M_4(z_4)$ l'image du point $M_1$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ $\left(k \in \mathbb{R}^* - \{1\}\right)$

**0.75 pt** **1 -** Calculer $z_3$ en fonction de $m$ et $z_4$ en fonction de $m$ et $k$

**0.75 pt** **2 -** Donner la forme algèbrique de $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

**0.75 pt** **3 -** En déduire que les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ sont cocycliques si et seulement si $k = -2$

## Exercice 4 Session : Rattrapage 2024 — 3.5 Pts

On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de la loi de composition interne $*$ définie par :

$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4 \;;\; (x+iy)*(x'+iy') = (xy' + y^5 x') + iyy'$

### Partie I

**0.25 pt** **1 - a)** Vérifier que $1 * 2i = 2$

**0.25 pt** **b)** Montrer que la loi de composition interne $*$ n'est pas commutative

**0.5 pt** **2 -** Montrer que la loi $*$ est associative

**0.25 pt** **3 - a)** Vérifier que : $1 * (1+2i) = 2$

**0.25 pt** **b)** En déduire que : $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe

**4 -** Soit $E$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $E = \left\{x + yi / x \in \mathbb{R} \text{et} y \in \mathbb{R}^*\right\}$

**0.25 pt** **a)** Montrer que $E$ est stable dans $(\mathbb{C}, *)$

**0.25 pt** **b)** Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif

### Partie II

On considère les sous-ensembles de $E$ définies par $F = \left\{yi / y \in \mathbb{R}^*\right\}$ et $G = \left\{x + i / x \in \mathbb{R}\right\}$

**0.5 pt** **1 -** Montrer que $F$ est un sous-groupe de $(E, *)$

**2 -** On considère l'application $\varphi$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\; \varphi(x) = x + i$

**0.25 pt** **a)** Montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = G$

0.25 pt **b)** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vares $(\mathbb{C},*)$

0.25 pt **c)** En déduire que $(G,*)$ est un groupe commutatif

## Exercice 5 Session : Rattrapage 2024 3 Pts

0.5 pt **1 -** En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1,2,\ldots\ldots,22\}$ tel que $10u \equiv 1[23]$

**2 -** Soient $m$ un entier naturel et $q$ et $r$, respectivement, le quotient et le reste de la dicision euclidienne de $m$ par 10

0.5 pt **a)** Montrer que $m \equiv 10(q+ur)[23]$

0.75 pt **b)** Montrer que : 23 divise $m \quad \Leftrightarrow \quad$ 23 divise $(q+ur)$

**3 -** On considère dans $\mathbb{N}$ le système $(S)$ : $\begin{cases} x \equiv 1[23] \\ x \equiv 2[10] \end{cases}$

0.75 pt **a)** Montrer que si $x$ est une solution du système $(S)$ alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 10q+2$ et 23 divise $(q+7)$

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système $(S)$

$\boxed{\text{FIN}}$

Correction Examen ESIT Juillet 2024 Rattrapage

## EX ① (6,5pts)  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$f_n(0)=0$ et $\forall x \in ]0,+\infty[\ f_n(x) = x - x^n \ln x$

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0} x - x^n \ln x = 0 = f(0)$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

donc $f$ est continue à droite en $0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \ln x\right)$
$= -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0.$   $n-1 \geq 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x^{n-1} \times \ln x = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-1} \ln x = +\infty$ ; $n-1 \geq 1$

donc $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $(Oy)$ au $V(+\infty)$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - x^{n-1}\ln x$
$= 1+0 = 1$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1} \ln x = 0$

donc $1$ est le nombre dérivé de $f$ à droite en $0$

d) $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $x \mapsto x^n \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

comme le produit de deux fcts dérivables

donc $x \overset{f}{\mapsto} x - x^n \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

comme la somme de deux fcts dérivables

$f'(x) = 1 - (x^n)' \ln x - x^n (\ln x)'$
$= 1 - n x^{n-1} \ln x - x^n \times \frac{1}{x}$
$= 1 - n x^{n-1} \ln x - x^{n-1}$

e) On a : $\forall x > 0$  $f'(x) = 1 - x^{n-1} - n x^{n-1} \ln x$

si $x \in ]0,1]$ ; $0 < x \leq 1$  et  $\ln x \leq 0$

$\Rightarrow 0 < x^{n-1} \leq 1$  et $x^{n-1} \ln x \leq 0$

$\Rightarrow 1 - x^{n-1} \geq 0$ et $-n x^{n-1} \ln x \geq 0$

d'où $\forall x \in ]0,1]$  $f'(x) \geq 0$

et $f'$ s'annule seulement en 1
donc $f$ est strictement $\nearrow$ sur $[0;1]$

- si $x\in[1,+\infty[$ ; $x\geq 1$ et $\ln x\geq 0$

$\Rightarrow x^{n-1}\geq 1$ et $x^{n-1}\ln x\geq 0$

$\Rightarrow 1-x^{n-1}\leq 0$ et $-nx^{n-1}\ln x\leq 0$

donc $\forall x\geq 1$ $f'(x)\leq 0$ et $f'$ s'annule seulement en 1
donc $f$ est strictement $\searrow$ sur $[1,+\infty[$

2)a) - soit $x>0$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=x-x^{n+1}\ln x-(x-x^n\ln x)$

$=x^n\ln(x)(1-x)$

le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ est le signe de $(1-x)\ln x$ car $x>0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\ln x$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(1-x)\ln x$ | \|\| | $-$ | $0$ | $-$ | |

donc $\forall x>0$ $f_{n+1}(x)-f_n(x)\leq 0$

et pour $x=0$ $f_{n+1}(0)-f_n(0)=0$

3

donc $\forall x\in[0,+\infty[$ $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$

b) Puisque $\forall x\in[0,+\infty[$ $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$
alors $(\mathcal{C}_{n+1})$ est au dessous de $(\mathcal{C}_n)$

3)a) - $f_n$ est continue sur $[1,+\infty[$

- $f_n$ est strictement $\searrow$ sur $[1,2]$
- $f_n(1)=1-1^n\ln(1)=1>0$

$f_n(2)=2-2^n\ln 2$

$=2-0{,}7\times 2^n<0$

car : $2^n\geq 2^2$ car $n\geq 2$

$0{,}7\times 2^n\geq 2{,}8$

$-0{,}7\times 2^n\leq -2{,}8$

$2-0{,}7\times 2^n\leq 2-2{,}8<0$

donc $f_n(1)\times f_n(2)<0$
d'où d'après th. V.I $\exists!\,\alpha_n\in]1,2[$
tq $f_n(\alpha_n)=0$

— 2024 R —

4

3) b/ soit $n \geq 2$ $\quad f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1} - (\alpha_{n+1})^{n+1} \ln(\alpha_{n+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1}\left(1 - (\alpha_{n+1})^{n} \ln(\alpha_{n+1})\right) = 0$$

et puisque $1 < \alpha_{n+1} < 2$ alors

$$1 - (\alpha_{n+1})^{n} \ln(\alpha_{n+1}) = 0$$

d'où $\forall n \geq 2$ $\quad \alpha_{n+1}^{n} \ln(\alpha_{n+1}) = 1$

c) on a : $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - (\alpha_{n+1})^{n} \ln(\alpha_{n+1})$

et on a : $(\alpha_{n+1})^{n} \ln(\alpha_{n+1}) = 1$

donc

$$f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$$

d) d'après c) $\forall n \geq 2$ : $\quad f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$

et $\quad \alpha_{n+1} \in ]1, 2[$

donc $\quad f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

et $\quad f_n(\alpha_n) = 0$

donc $\quad f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$

et $f_n$ est strictement $\searrow$ sur $[1, 2]$ 5

d'où $\forall n \geq 2$ $\quad \alpha_{n+1} < \alpha_n$

donc $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante

e) la suite $(\alpha_n)$ est décroissante et minorée par 1 donc $(\alpha_n)$ est CV

4) on pose $\ell = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n$

a) on a : $\forall n \geq 2$ $\quad 1 < \alpha_n < 2$

donc $\quad 1 \leq \lim \alpha_n \leq 2$

d'où $\quad 1 \leq \ell \leq 2$

b) on a : $\forall n \geq 2$ $\quad f_n(\alpha_n) = 0$

$$\Rightarrow \alpha_n - \alpha_n^{n} \ln(\alpha_n) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_n^{n} \ln(\alpha_n) = \alpha_n$$

$$\Rightarrow \alpha^{n-1} \ln(\alpha_n) = 1 \quad \text{car } \alpha_n \neq 0$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha_n^{n-1} \ln(\alpha_n)) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha_n^{n-1}) + \ln(\ln(\alpha_n)) = 0$$

$$\Rightarrow (n-1)\ln(\alpha_n) = -\ln(\ln(\alpha_n))$$

$$\Rightarrow n - 1 = -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} \quad \text{car}$$ 6

SALHI

car $\alpha_n > 1$ donc $\ln(\alpha_n) > 0$

c) on suppose $\ell > 1$

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell > 1$ et $\ln$ est continue en $\ell$

alors $\lim \ln(\alpha_n) = \ln(\ell) > 0$

et $\ln$ est continue en $\ln(\ell)$

alors $\lim \ln(\ln(\alpha_n)) = \ln(\ln(\ell))$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = \frac{\ln(\ln(\ell))}{\ln(\ell)} \in \mathbb{R}$

d) d'après b) $n-1 = -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

et d'après c) si on suppose $\ell \cancel{\neq} 1$ et $\ell \leq 2$
alors $\ell > 1$
alors $\lim_{n\to+\infty} -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = -\frac{\ln(\ln(\ell))}{\ln(\ell)} \in \mathbb{R}$

et $\lim_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$

absurde

7

donc $\ell = 1$

# EXERCICE 2 (3,5pts)

1) a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

b) $n \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ ; $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k^2}$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{n^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^n}$$

on prend $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $[0,$

$$U_n = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{(1-0)}{n}k\right)$$

et puisque $f$ est continue sur $[0, 1]$

alors $(U_n)$ est convergente

et converge vers $\int_0^1 f(x)\,dx$

8

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$

2) Mq : $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx \leq 1$

$\forall x\in[0,1]$ $\quad 1+x^2 \geq 1$

$(1+x^2)^2 \geq 1$

$\frac{1}{(1+x^2)^2} \leq 1$

et puisque $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx \leq \int_0^1 1\,dx$

$\leq [x]_0^1$

$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx \leq 1$

3) a) Mq $\forall x\in[0,1]$ $\quad 0 \leq e^x - 1 \leq e x$

- puisque $0 \leq x$
  alors $1 \leq e^x$
  donc $\forall x\in[0,1]$ $0 \leq e^x - 1$
- on pose $g(x) = e.x - e^x + 1$
  g est dérivable sur $[0,1]$

(9)

et $g'(x) = e - e^x$

$g'(x) \geq 0 \iff e \geq e^x$

$\iff 1 \geq x$

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

SALHI

donc g est croissante sur $[0,1]$ alors

si $0 \leq x \leq 1$ alors $g(0) \leq g(x)$.

donc $\forall x\in[0,1]$ $\quad 0 \leq g(x)$

d'où $\forall x\in[0,1]$ $\quad e^x - 1 \leq e x$

Conclusion: $\forall x\in[0,1]$ $\quad 0 \leq e^x - 1 \leq e x$

b) on a: $\forall t\in[0,1]$ $\quad 0 \leq e^t - 1 \leq e.t$

et $t \mapsto e^t - 1$ et $t \mapsto e t$ sont deux fcts continues sur $[0,1]$

par suite : soit $x \in [0,1]$

$\int_0^x 0\,dt \leq \int_0^x e^t - 1\,dt \leq \int_0^x e.t\,dt$

$0 \leq [e^t - t]_0^x \leq [\frac{e}{2} t^2]_0^x$

(10)

donc $\forall x\in[0,1]$ ; $0 \leqslant e^{x}-1-x \leqslant \frac{e}{2}x^2$

4) $n\geqslant 1$ on pose : $W_n = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}}-1\right)$

a) Mq $\forall n\geqslant 1$, $0\leqslant W_n - U_n \leqslant \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

on a : $\forall x\in[0,1]$ $0\leqslant e^{x}-1-x\leqslant \frac{e}{2}x\,x$ ⊛

et puisque $n\geqslant 1$ alors $n^2\geqslant n$

et $k^2\geqslant 0$ donc $n^2+k^2\geqslant n$

$0\leqslant \frac{n}{n^2+k^2}\leqslant 1$

on remplace $x$ pour $\frac{n}{n^2+k^2}$ ds ⊛

$0\leqslant e^{\frac{n}{n^2+k^2}}-1-\frac{n}{n^2+k^2}\leqslant \frac{e}{2}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

$\sum_{k=1}^{n} 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{n}{n^2+k^2}}-1-\frac{n}{n^2+k^2}\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{e}{2}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

$0\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}}-1\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\leqslant \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

$0\leqslant W_n - U_n \leqslant \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$



b) $x \xrightarrow{h} (1+x^2)^{-2}$

$h(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ ; $x\in[0,1]$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,1]$

$h'(x) = -\frac{2\,(1+x^2)\times(1+x^2)'}{((1+x^2)^2)^2} = \frac{-4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\leqslant 0$

$h'$ s'annule en 0 (seulement)

donc h est strictement ↘ sur $[0,1]$

c) soit $k\in\{1,2,\dots,n\}$ donc

$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\subset[0,1]$

soit $\frac{k-1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{k}{n}$ et h est strict ↘ sur $[0,1]$

alors $h\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant h(x)\leqslant h\left(\frac{k-1}{n}\right)$ et h est continue sur $[0,1]$

$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h\left(\frac{k}{n}\right)dx \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(x)\,dx$

$h\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(1+x^2)^{-2}dx$

$h(k/n)\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)\leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n}(1+x^2)^{-2}dx$

$$\frac{1}{n} \times \left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2}\,dx$$

5) a) Mq $\forall n \geqslant 1$ $\quad 0 \leqslant W_n - U_n \leqslant \frac{e}{2n}$

on a $\forall n \geqslant 1$

$$\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} (1+x^2)^{-2}\,dx$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} (1+x^2)^{-2}\,dx$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{n^2+k^2}{n^2}\right)^{-2} \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=} \left(\frac{n^2}{n^2+k^2}\right)^2 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\frac{n^2}{n}\sum \left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2 \leqslant 1 \text{ car } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx \leqslant 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}$$

$$\frac{e}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2 \leqslant \frac{e}{2n}$$

et d'après 4) a)

on a : $0 \leqslant W_n - U_n \leqslant \frac{e}{2n}$

b) on a : $\forall n \geqslant 1$ $\quad 0 \leqslant W_n - U_n \leqslant \frac{e}{2n}$

$$U_n \leqslant W_n \leqslant \frac{e}{2n} + U_n$$

et $\lim U_n = \frac{\pi}{4}$ et $\lim \frac{e}{2n} + U_n = \frac{\pi}{4}$

donc $\lim W_n = \frac{\pi}{4}$

d'où $(W_n)$ est convergente

# EXERCICE 03 (3,5pts)

Partie I $\quad m \in \mathbb{C}^*$

$(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$

1) a) $\Delta = (2+i)^2 m^2 - 4m^2(1+i)$

$= (4-1+4i)m^2 - m^2(4+4i)$

$= m^2(4-1+4i-4-4i)$

$= -m^2 = i^2 m^2 = (im)^2$

b) puisque $m \in \mathbb{C}^*$ alors $\Delta \neq 0$ donc $(E)$ admet deux solutions ds $\mathbb{C}$

$z_1 = \dfrac{(2+i)m + im}{2}$ ; $z_2 = \dfrac{(2+i)m - im}{2}$

$z_1 = m + im$ ; $z_2 = m$

$S = \{z_1, z_2\}$

2) $z_1 \times z_2 = m^2(1+i)$ et $m = re^{i\theta}$

$= (re^{i\theta})^2(1+i)$

$= r^2 e^{i2\theta} \times \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

car $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(15)

$z_1 \times z_2 = \sqrt{2} \times r^2\, e^{i\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$

**Partie II** $\quad z_1 = m$ et $z_2 = m(1+i)$

$M_1(z_1)$ ; $M_2(z_2)$

$M_3(z_3) = R_{(M_2, -\frac{\pi}{2})}(O)$

$M_4(z_4) = h_{(O,k)}(M_1) \qquad k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

1) $z_3$ en fct de $m$ :

$M_3 = R_{(M_2, -\frac{\pi}{2})}(O) \Leftrightarrow z_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_2) + z_2$

$\Leftrightarrow z_3 = -i(-m(1+i)) + m(1+i)$

$= m\,i(1+i) + m(1+i)$

$= m(i - 1 + 1 + i)$

$= 2im$

• $z_4$ en fct de $m$ et $k$ :

$M_4 = h_{(O,k)}(M_1) \Leftrightarrow z_4 = k(z_1 - 0) + 0$

$\Leftrightarrow z_4 = k(m) = km$

— 2024 R. —

SALHI

(16)

2) $\frac{z_4-z_2}{z_4-z_1}\times\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=$

$=\frac{km-m(1+i)}{km-m}\times\frac{2im-m}{2im-m(1+i)}$

$=\frac{k-1-i}{k-1}\times\frac{2i-1}{2i-1-i}$ car $m\neq 0$

$=\frac{k-1-i}{k-1}\times\frac{-1+2i}{-1+i}$

$=\frac{(k-1-i)(-1+2i)(-1-i)}{2(k-1)}$

$\frac{(k-1-i)(3-i)}{2(k-1)}$

$=\frac{3k-4}{2(k-1)}+\frac{(-k-2)i}{2(k-1)}$

3) $\frac{z_4-z_2}{z_4-z_1}=\frac{k-1}{k-1}-\frac{i}{k-1}\notin\mathbb{R}$

donc $M_1, M_2$ et $M_4$ ne sont pas alignés



et par suite les pts $M_1, M_2, M_3$ et $M_4$ ne sont pas alignés.

- $M_1, M_2, M_3$ et $M_4$ sont cocyclique $\Leftrightarrow$ $\frac{z_4-z_2}{z_4-z_1}\times\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{3k-4}{2(k+1)}+\frac{-k-2}{2(k-1)}i\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -k-2=0$

$\Leftrightarrow k=-2$

## EXERCICE 04 (3,5pts)

$\forall(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4$

$(x+iy)*(x'+iy')=(xy'+y^5x')+iyy'$

**Partie I :**

1) a) $1*2i=(1+0i)*(0+2i)$

$=(1\times 2+0^5\times 0)+i(0\times 2)$

$=2+0i$

$=2$

$\forall (x+iy) * (x'+iy') =$

$\forall (x,y)$

b) Mq $*$ n'est pas commutative

on a : $1 * 2i = 2$

et $2i * 1 = (0+2i) * (1+0i)$

$= 0\times 0 + 2^5 \times 1 + i(2\times 0)$

$= 2^5 + 0i$

$= 2^5$

donc $2i * 1 \neq 1 * 2i$

d'où $*$ n'est pas commutative

2) $*$ est associative

$((x+iy) * (x'+iy')) * (x''+iy'')$

$= ((xy' + y^5 x') + iyy') * (x''+iy'')$

$= xy'y'' + y^5 x'y'' + y^5 y'^5 x'' + i\, yy'y''$ $\cancel{(*)}$

d'autre part :

$(x+iy) * ((x'+iy') * (x''+iy''))$

$= (x+iy) * (x'y'' + y'^5 x'' + i\, y'y'')$ 19

$= x y'y'' + y^5 y'' x' + y^5 y'^5 x'' + i\, yy'y''$ $\cancel{(**)}$

de $(*)$ et $(**)$ on a :

$(x+iy) * ((x'+iy') * (x''+iy'')) = ((x+iy) * (x'+iy')) * (x''+iy'')$

donc $*$ est associative.

3) a) $1 * (1+2i) = (1+0i) * (1+2i)$

$= 1\times 2 + 0^5 \times 1 + i(0\times 2)$

$= 2 + 0i$

$= 2$

b) En déduire que $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe

Par l'absurde : supposons que $(\mathbb{C}, *)$ est un groupe alors tout les éléments de $(\mathbb{C}, *)$ st régulier

$1 * 2i = 2$ et $1 * (1+2i) = 2$

$\Rightarrow 1 * 2i = 1 * (1+2i)$

$\Rightarrow 2i = 1+2i$ car 1 est régulier

absurde

donc $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe

— 2024 R —

20

SALHI

4) $E = \{x+iy \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^*\}$

a) Mq $E$ est stable ds $(\mathbb{C}, *)$

soit $x+iy$ et $x'+iy'$ des éléments de $E$

cad $(x,x') \in \mathbb{R}^2$ et $(y,y') \in \mathbb{R}^{*2}$

$(x+iy)*(x'+iy') = (xy'+y^5x') + i(yy') \in E$

car $xy'+y^5x' \in \mathbb{R}$ et $yy' \in \mathbb{R}^*$

d'où $E$ est stable ds $(\mathbb{C}, *)$

b) Mq $(E, *)$ est un groupe.

on a: $*$ est associative ds $\mathbb{C}$.

et $E$ est stable ds $(\mathbb{C}, *)$

donc $*$ est associative ds $(E, *)$

supp $x+yi$ est l'élément neutre de $(E, *)$

$\forall x'+iy' \in E$

$(x+iy)*(x'+iy') = x'+iy'$

$\Leftrightarrow (xy'+y^5x') + iyy' = x'+iy'$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy'+y^5x' = x' \\ yy' = y' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy' = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ car $y' \neq 0$

21

~~inversement~~

on vérifie facilement : $(x'+iy')*(0+1i) = x'+iy'$

donc $0+1i = i$ est l'élément neutre de $(E, *)$

• soit $x+iy \in E$ Mq $x+iy$ est inversible ds $(E, *)$

$(x+iy)*(x'+iy') = 0+1i$

$\Leftrightarrow xy'+y^5x' + iyy' = 0+1i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy'+y^5x' = 0 \\ yy' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'y^5 = -xy' \\ y' = \frac{1}{y} \end{cases}$ car $y \neq$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \times \frac{1}{y} \times \frac{1}{y^5} \\ y' = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-x}{y^6} \\ y' = \frac{1}{y} \end{cases}$

de même $\left(\frac{-x}{y^6} + i\frac{1}{y}\right) * (x+iy) = 0+1i$

donc $x+iy$ est inversible pour $*$ ds $E$

d'où $(E, *)$ est un groupe

Mq $*$ n'est pas commutative ds $E$ 22

— 2024R —

$(1+i) * (0+2i) = 2 + 1^5 \times 0 + i \times 1 \times 2$
$= 2 + 2i$
$(0+2i) * (1+i) = 0 + 2^5 \times 1 + 2i$
$= 2^5 + 2i$
$\neq 2 + 2i$

donc $2i * (1+i) \neq (1+i) * 2i$
d'ou $(E, *)$ est un groupe non commu

Partie II : $F = \{ yi \,/\, y \in \mathbb{R}^* \}$
$G = \{ x + i \,/\, x \in \mathbb{R} \}$

1) Mq F sous groupe de $(E, *)$

$F \neq \phi$ car $1i \in F$
soit $(z, y) \in \mathbb{R}^{*2}$ mq: $(zi, yi) \in F^2$
$\left(-\frac{0}{y^6} + \frac{i}{y}\right)$ est le symetrique de $yi$ ds $(E, *)$
$(zi) * \left(\frac{1}{y} i\right) = \frac{z}{y} i \in F$ car $\frac{z}{y} \in \mathbb{R}^*$
d'ou F est un sous-groupe de $(E, *)$

23

2) a-
$\varphi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}, *)$
$x \longmapsto \varphi(x) = x + i$

$\varphi(\mathbb{R}) = \{ \varphi(x) \,/\, x \in \mathbb{R} \}$
$= \{ x + i \,/\, x \in \mathbb{R} \}$
$= G$

b) $\varphi$ morph de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$
$\varphi(x + x') = x + x' + i$
$\varphi(x) * \varphi(x') = (x + i) * (x' + i)$
$= x \times 1 + 1^5 x' + i(1 \times 1)$
$= x + x' + i$
donc $\varphi(x + x') = \varphi(x) * \varphi(x')$
d'où $\varphi$ morph de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$

c) $\varphi$ est un morph de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$
et $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif
donc $(\varphi(\mathbb{R}), *)$ est un groupe commutatif
to on a: $\varphi(\mathbb{R}) = G$ d'où $(G, *)$ groupe commutatif.

24

EXERCICE 05 (3pts)

Arithmétiques

1) En utilisant l'alg. d'Euclide, déterminons l'entier $u \in \{1;2;\dots;22\}$ tq $10u \equiv 1[23]$

on a: $10 \wedge 23 = 1$

$23 = 2\times10 + 3$

$10 = 3\times3 + 1$

$\Rightarrow 1 = 10 - 3\times3$

$= 10 - 3\times(23 - 2\times10)$

$= 10 - 3\times23 + 6\times10$

$1 = 7\times10 - 3\times23$

$\Rightarrow 7\times10 = 1 + 3\times23$

$\Rightarrow 7\times10 \equiv 1[23]$ et $7\in\{1,2,\dots,22\}$

d'où $u = 7$

2)a) $m \in \mathbb{N}$ $m = q\times10 + r$ et $0\le r<10$

on a: $10u \equiv 1[23]$

et $r\in\mathbb{N}$ $10ur \equiv r[23]$

$10ur + 10q \equiv 10q + r[23]$

$10(ur+q) \equiv m\ [23]$

25

d'où $m \equiv 10(ur+q)\ [23]$

b) $23 / m \Leftrightarrow m \equiv 0[23]$

(et on sait que $m \equiv 10(q+ur)[23]$)

$\Leftrightarrow 10(q+ur) \equiv 0\ [23]$

$\Leftrightarrow 23 / 10(q+ur)$

3) ds $\mathbb{N}$ soit (S) : $\begin{cases} x\equiv1[23] \\ x\equiv\varepsilon[10]\end{cases}$

x solution de (S) $\Rightarrow \begin{cases} x\equiv\varepsilon[10] \\ x\equiv1[23]\end{cases}$

$\Rightarrow \exists q\in\mathbb{Z} ; x = \varepsilon + 10q$

si $q\le -1$ alors ~~...~~

$x = \varepsilon + 10q \le -8$

impossible car $x\in\mathbb{N}$

donc $\exists q\in\mathbb{N} / x = \varepsilon + 10q$

$x - 1 = 10q + 1$

q et 1 est le quotient et le reste de la division euclidienne de $x-1$ par 10

~~...~~

$x\equiv1\ [23] \Leftrightarrow 23/x-1$

$\Leftrightarrow$ 23 divise $q+ur$

26

d'après 1) $u=7$ et $v=1$

donc $23 / x-1 \iff 23 / q+7\times 1$

$\iff 23 / q+7$

b). soit $x$ sol de (S)

alors $\exists q \in \mathbb{N}$ $x = 10q+2$

et $23 / q+7$

$\Rightarrow x = 10q+2$ et $\exists p \in \mathbb{N}^*$

$q+7 = 23p$

$\Rightarrow x = 10(23p-7)+2$

$\Rightarrow x = 230p - 68$ $p \in \mathbb{N}^*$

Réciproquement:

si $x = 230p - 68$ alors $x+68 \equiv 0 [10]$

et $x+68 \equiv 0 [23]$

$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv -68 [10] \\ x \equiv -68 [23] \end{cases}$

27

$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv 2 [10] & \text{car } -68 \equiv 2 [10] \\ x \equiv 1 [23] & \text{car } -68 \equiv 1 [23] \end{cases}$

donc $S = \{230p-68 / p \in \mathbb{N}^*\}$

FIN

— Examen 2SM —
2024 Rattrapage
— ESSALAY —

28