Suites implicites

Ex14 :

Soit φ une fonction continue strictement croissante sur [a ;b]

1)Mq pour tout entier naturel non nul n l'équation

$\varphi(x)=\frac{1}{n}\varphi(a)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\varphi(b)$ admet une solution unique α_n dans [a ;b] .

2) Mq la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante et convergente

3) Déterminer $\lim \alpha_n$.

Ex15 :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur IR^+ par: $f_n(x)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)+2x-1$

2) a- Montrer que la fct f_n est strictement croissante sur IR^+ .

b- Déduire que :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*);(\exists! \alpha_n \in IR^+);f_n(\alpha_n)=0$ et $0<\alpha_n<\frac{1}{2}$.

3) a- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*);(\forall x\in IR_+^*);f_{n+1}(x)<f_n(x)$

b- Déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et qu'elle est convergente .

4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Ex16 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 .On considère la fonction f_n définie sur IR^+ par : $f_n(x)=x^n-x-1$

1)A l'aide de binôme de Newton , montrer que $f_n\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$

2) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique x_n dans $\left[1;1+\frac{1}{n}\right]$.

3) a- Montrer que $(\forall n\geq 3)f_{n-1}(x_n)\geq 0$

b- En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est décroissante

c- Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est convergente et déterminer sa limite .

Ex17 :

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur IR par :

$$f_n(x)=x^n-1+\operatorname{Arctan}(x)$$

1)Montrer que f_n est strictement croissante sur IR^+ .

2) Montrer que

$$(\forall n\in IN^*)\left(\exists! a_n\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right) f_n(a_n)=0$$

tan(1)

3) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissant , en déduire qu'elle est convergente .

4) On pose $l=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

a- Montrer que l > 0 / $(\forall n\in IN^*)\ a_n\leq l$

b- Déterminer l / Mq $l=1$

Ex18 :

On considère la fonction f_n définie sur IR^+ par :

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k.x^k \text{ avec } n\in IN^*$$

1) Mq l'équation $f_n(x)=1$ admet une unique solution dans IR^+ que l'on notera u_n

2) En évaluant $f_{n+1}(u_n)$,montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'elle est convergente

3) a- Mq :

$$(\forall x\in IR^+-\{1\})f_n(x)=x\left(\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\right)$$

b- Calculer u_2 .En déduire $\lim(u_n)^n$

c- Mq $(\forall n\geq 2)(u_2)^n\leq\frac{2}{n(n-1)}$

d- Déterminer $\lim n(u_n)^n$ puis $\lim u_n$