Académie Régionale de l'Education et de la formation Fès-Meknès
Groupe Scolaire Aljabr

BAC BLANC 13

Matière	**Mathématiques**	**Durée**	**4h**
Niveau	**$2^{\text{ème}}$ Bac SM**	**Coefficient**	**9**

Exercice 1

Partie I

On définit dans $G=\mathbb{R}_{+}^{*}\times\mathbb{R}$ la loi de composition interne T par :

$$\forall(x;y)\in G;\left(x';y'\right)\in G\quad(x;y)\mathrm{T}\left(x';y'\right)=\left(xx';\sqrt{x}y'+yx'\right)$$

1. Montrer que la loi T n'est pas commutative.
2. Montrer que la loi T est associative.
3. Montrer que la loi T admet un élément neutre.
4. Montrer que $(G;\mathrm{T})$ est un groupe non commutatif.
5. On considère l'ensemble $F=\{(1;y)/y\in\mathbb{Z}\}$,
   Montrer que $(F,\ \mathrm{T})$ est un sous-groupe de $(G,\ \mathrm{T})$, est-il commutatif ?

Partie II

On considère l'ensemble D défini par $D=\left\{M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}\sqrt{x} & y\\ 0 & x\end{pmatrix}/(x;y)\in G\right\}$

1. Montrer que D est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$.
2. On considère l'application φ définie par : $\begin{aligned}\varphi:G&\to D\\(x;y)&\to M(x;y)\end{aligned}$
   (a) Montrer que φ est isomorphisme de (G,T) dans $(D,\times)$
   (b) En déduire la structure de $(D,\times)$, puis déterminer l'inverse de $M(x;y)$
3. On pose $A=M(1;1)$ et $I=M(1;0)$, et on considère l'ensemble $E=\left\{aI+bA/(a;b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$
   (a) Vérifier que $A^2=-I+2A$
   (b) Montrer que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif, est-il intègre ? justifier votre réponse.

Exercice 2

Soit θ un nombre réel appartenant à $]0,\frac{3\pi}{4}[$

partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):z^2+2iz-1+ie^{i2\theta}=0$

On note par z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E)

1. Ecrire la forme exponentielle de $-1+ie^{i2\theta}$ en déduire que $\arg\left(z_1\right)+\arg\left(z_2\right)\equiv\theta+\frac{3\pi}{4}[2\pi]$
2. Déterminer la valeur de θ pour laquelle $1-i$ est une solution de (E)
3. Montrer que les solutions de l'équation sont les complexes $z_1=-i-e^{i\theta-\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=-i+e^{i\theta-\frac{\pi}{4}}$
4. Montrer que les points $M_1\left(z_1\right),M_2\left(z_2\right)$ varient sur un cercle fixe qu'on déterminera son centre et son rayon

Partie II

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle dont les bases sont $[BC]$ et $[AD]$.
On considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre C et d'angle θ et on pose $A' = \mathcal{R}(A)$ et $B' = \mathcal{R}(B)$.
on note par I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC], [AD]$ et $[BC]$.
On munit le plan complexe du repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$ tels que a est l'affixe de C et $b + ic$ est l'affixe de D avec a, b et c trois nombres réels.

1. Vérifier que l'affixe de B est $-a$ et que l'affixe de A est $-b + ic$.
2. Montrer que $z_{A'} = a\left(1 - e^{i\theta}\right) + (-b + ic)e^{i\theta}$ et $z_{B'} = a\left(1 - 2e^{i\theta}\right)$.
3. Prouver que $\frac{z_J - z_I}{z_K - z_I} = \frac{a+b}{2a} + i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \cdot \frac{c}{2a}$
4. Déduire que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 3

partie I

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 13x - 337y = 1$
   (a) Vérifier que $(26, 1)$ est une solution particulière de l'équation (E).
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)
2. Montrer que le nombre 337 est premier.

partie II

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F) x^{335} \equiv 13[2022]$

1. Montrer $(\forall x \in \mathbb{Z}) : \quad (F) \Leftrightarrow \begin{cases} x^{335} \equiv 13[337] \\ x^{335} \equiv 1[6] \end{cases}$
2. Soit x une solution de l'équation (F)
   (a) Montrer que 337 et x sont premiers entre eux, en déduire que $x^{336} \equiv 1[337]$.
   (b) Montrer que $13x \equiv 1[337]$, en déduire que $x \equiv 26[337]$
   (c) Montrer que 6 et x sont premiers entre eux, en déduire que $x^{334} \equiv 1[6]$.
   (d) En déduire que $x \equiv 1[6]$
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z}) : (F) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 26[337] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$
4. (a) vérifier que -311 est une solution de l'équation (F)
   (b) Donner l'ensemble de solution de l'équation (F).

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$

PARTIE I

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
2. Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1 - x$ possède une solution unique α dans $]\frac{1}{e}, 1[$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$
   (a) Calculer $F_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; F_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - F_n(x)$
   (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+ \quad F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x}$ et $F_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x}$

(d) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})\,(\forall n \in \mathbb{N}^{*}) : F_n(x) \geq 0$

(e) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+}) : \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}$

PARTIE II

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
   (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite .
   (c) Montrer que $\lim \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{2}$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[\\ v_{n+1} = 1 - f(v_n) \end{cases}$.
   (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{e} \leq v_n \leq 1$.
   (b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |v_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}}\,|v_n - \alpha|$, en déduire que (v_n) convergente et préciser sa limite.

PARTIE III

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$ l'équation $f(x) = 1 - x^n$ possède une solution unique α_n dans $]0, 1[$.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante, et déduire qu'elle est convergente .
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^{*}) : \frac{-1}{n} < \ln(\alpha_n) < 0$, en déduire $\lim \alpha_n$.
4. Montrer que $\lim n\,(\alpha_n - 1) = -1$

PARTIE IV

On considère les fonctions g et F définies sur $\mathbb{R}^{+}$par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)}{x}; x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt; x > 0 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+}$.
2. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) : 1 - \frac{x}{4} \leq F(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$
   (b) Montrer que F est continue et dérivable à droite en 0 , et interpréter géométriquement le résultat .
3. (a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) : 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^1 g(t)dt + \frac{\ln x}{x}$
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ puis préciser la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.
4. (a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $(\forall x > 0); F'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = f(x) - \int_0^x g(t)dt$.
   (b) Montrer que $(\forall x > 0) : e^{-x}(x + 1) - 1 < 0$
   (c) Etudier les variation de la fonction h sur $]0, +\infty[$, en déduire que $(\forall x > 0); h(x) < 0$
5. Dresser le tableau de variation de F puis construire sa courbe représentative.

PARTIE V

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}dx$
   (a) Calculer w_0.
   (b) Montrer que la suite (w_n) est décroissante, en déduire qu'elle convergente .
   (c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); w_{n+1} + w_n = g(n)$, en déduire que $\lim w_n = 0$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k g(k)$.

   (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \geq 2) : \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^x}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

   (b) Montrer que $(\forall n \geq 2) : S_n = (-1)^{n-1} w_n + \ln\left(\frac{e+1}{2e}\right)$, en déduire $\lim S_n$.