Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$

1 Définition 1

Théorème 1 *On dit que f admet une limite ℓ en a ssi :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

***Si** I **est un voisinage de** $+\infty$: on dit que f admet une limite ℓ en $+\infty$ ssi :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x > \alpha, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

***Si** I **est un voisinage de** $-\infty$: on dit que f admet une limite ℓ en $-\infty$ ssi :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x < -\alpha, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2 Définition 2

Théorème 2 *Soit $b \in \mathbb{R}$ On dit que f tend vers $+\infty$ en a ssi :*

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - b| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

De même on dit que f tend vers $-\infty$ en b ssi :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - b| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$$

3 Opérations

Soient f et $g : I \longmapsto \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \left(l, l' \in \overline{\mathbb{R}}\right)$
(i). Si $l + l'$ est bien définie, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + l'$
(ii). Si ll' est bien définie, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ll'$
(iii). Si $\dfrac{l}{l'}$ est bien définie, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l}{l'}$
(iv). Si $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$, alors $l \leqslant l'$.

4 Calcul pratique

4.1 Fractions rationnelles

Soient $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ deux fcts polynômes. Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{a_m x^m}$$

4.2 Racines de polynômes

On reprend les 2 polynômes précédents, et on suppose que $a_n, b_m > 0$ (comme ça ils tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ et donc positifs en $+\infty$). On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} = +\infty$.

Maintenant calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)}$

$\rightarrow$ Si $n \neq m$, on factorise par le plus grand degré et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)} = \infty$

$\rightarrow$ Si $n = m$, on écrit : $\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)} = \dfrac{P(x) - Q(x)}{\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)}}$ puis on compare les degrés du numérateur et du dénominateur.

4.3 Fonctions trigonométriques

$\star$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

$\star$ Si on est dans un point autre que 0, et qu'on a une forme indéterminée, il faut utiliser les formules trigonométriques suivantes :

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$		

Ou plus généralement :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

De plus par 2π-périodicité on peut toujours se ramener à $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$.