EXERCICE1 : (7.75 points)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad f(x)=\frac{x^2\ln x}{x^2+1} \quad \text{si} \quad x\in\,]0;+\infty[$$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 1-a) Etudier la continuité de f à droite en 0

0.25x2 b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25x3 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2- Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi(x)=x^2+1+2\ln x$

0.5 a) Dresser le tableau de variations de φ

0.5 b) Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ (On donne $\ln 2\simeq 0.7$ et $\ln 3\simeq 1.1$)

0.25 c) Montrer que : $f(\beta)=-\frac{\beta^2}{2}$

0.5 3-a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x\in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x)=\frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$

0.5 b) Donner le tableau de variations de f

0.25 c) Montrer que $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ sur $]\beta;+\infty[$

0.5 d) Montrer que la droite d'équation $y=\beta x-\frac{1}{2}$ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$

0.5 4- Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

(On admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion)

Partie II :

On pose $J=]\sqrt{3};2[$ et $\alpha=\frac{1}{\beta}$

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}$

0.25 1-a) Etudier les variations de g

0.25 b) Montrer que : $(\forall x\in J)$; $\sqrt{3}<g(x)<2$

(On donne $\sqrt{3}\simeq 1.73$, $e^{\frac{2}{3}}\simeq 1.95$ et $e^{\frac{5}{8}}\simeq 1.87$)

0.25 2-a) En utilisant le résultat de la question I.3-c), montrer que : $g(\alpha)=\alpha$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x \in J) \quad ; \quad |g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ ✓

0.5 c) En déduire que : $(\forall x \in J) \quad ; \quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$

3- On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = \frac{7}{4} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad , \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

0.25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad x_n \in J$

0.5 b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$

0.25 c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α .

EXERCICE2 : (2.25 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $(\forall n \geq 2) \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

1- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

0.25 ?? a) Montrer que pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ et pour tout réel $x \in \left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$,

on a : $\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

0.25 b) En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$; $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

0.5 2- a) Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n \geq 2)$; $u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq u_n - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

0.5 c) Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad ; \quad -1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

0.25 d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE3 : (3.5 points)

Soit $\theta \in [0, \pi[$

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) d'inconnue z

$$(E_\theta) : z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0$$

0.25 1- a) Vérifier que : $(E_\theta) \Leftrightarrow \left(2z+(1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2$

0.5 b) En déduire les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ) avec $\mathrm{Im}(z_1) \leq 0$

0.25 2- a) Montrer que : $\dfrac{z_1+1}{z_2+i} = -\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ ✓

0.25 b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe : $\dfrac{z_1+iz_2}{z_2+i}$

Partie II :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $a = e^{i\theta}$, $b = (1+i)e^{i\theta}$ et $c = b-a$

Soient m un nombre réel de $]0;1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et le point Q d'affixe $q = me^{i\theta}$

0.25 1- a) Déterminer l'affixe p du point P l'image du point Q par la rotation R

0.25 b) Vérifier que : $R(A) = C$

2- Soit H le point d'affixe $h = \dfrac{m}{m-i}e^{i\theta}$

0.5 a) Montrer que : $\dfrac{p-a}{h} = \dfrac{m^2+1}{m}i$ et $\dfrac{h-a}{p-a} = \dfrac{1}{m^2+1}$ ✓

0.25 b) En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP) ??

0.5 c) Montrer que : $\dfrac{b-h}{q-h} = \dfrac{1}{m}i$

0.25 d) En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.

0.25 e) Montrer que les points A, Q, H et B sont cocycliques.

EXERCICE4 : (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): $y = \dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{d}$ où a,b,c *et* d sont des entiers naturels non nuls vérifiant : $a \wedge b = c \wedge d = 1$

1- On suppose que l'équation (E) admet une solution (x_0, y_0) ✓

0.5 a) Montrer que : d divise bc ✓

0.5 b) En déduire que : d divise b ✓

2- On suppose que d divise b et on pose : $b = nd$ où n est un entier naturel non nul.

0.5 a) Montrer que qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $dnu - av = 1$ ✓

0.75 b) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est ✓

$$S = \{(-vcn+bk\ ;\ -ucn+ak)\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$$

0.75 3- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (F): $y=\dfrac{3}{2975}x-\dfrac{2}{119}$

(On donne : $2975=119\times 25$)

EXERCICE5 : (3.5 points)

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice

$O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

On munit l'ensemble $E=\{x+yi\ /\ x\in\mathbb{Z}\ et\ y\in\mathbb{Z}\}$ par la loi de composition interne $\bullet$

définie par : $\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{Z}^4$; $(x+yi)\bullet(x'+y'i)=\left(x+(-1)^y x'\right)+(y+y')i$

Partie I :

0.25 1- a) Vérifier que : $(1-i)\bullet(3+2i)=-2+i$

0.25 b) Montrer que la loi $\bullet$ n'est pas commutative dans E

0.5 2- Montrer que la loi $\bullet$ est associative dans E

0.25 3- Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi $\bullet$ dans E

0.25 4- a) Vérifier que $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2$; $(x+yi)\bullet\left((-1)^{(y+1)}x-yi\right)=0$

0.25 b) Montrer que $(E,\bullet)$ est un groupe non commutatif.

Partie II :

Soient les deux ensembles $F=\{x+2yi\ /\ x\in\mathbb{Z}\text{ et }y\in\mathbb{Z}\}$ et

$G=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ /\ x\in\mathbb{Z}\text{ et }y\in\mathbb{Z}\right\}$

0.5 1- a) Montrer que F est un sous-groupe de $(E,\bullet)$

0.25 b) Montrer que la loi $\bullet$ est commutative dans F

2- Soit φ l'application définie de F vers $M_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2;\ \varphi(x+2yi)=M(x,y)$$

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F,\bullet)$ vers $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$

0.25 b) Montrer que $\varphi(F)=G$

0.25 c) En déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif.

FIN