Ex 7:

2)(a) $$\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(h)+\tan(\pi/4)}{1-\tan(h)\tan(\pi/4)}$$

$$= \boxed{\frac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)}}$$

(b) $$f(\pi/4 + h) = \frac{2\tan^2(h)/h^2 \times h^2}{(1-\tan h)^2 \left(\frac{\sin(2h)}{2h}\right)^2 \times (2h)^2} \xrightarrow[0]{} 1/2.$$

$$\underbrace{\lim_{x \to \pi/4} f(x)} = \lim_{h \to 0} f\left(h+\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\frac{1}{2}}$$

Ex 8 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}}{x} = \lim \underbrace{x\frac{-1 + \cos x}{x^2}}_{\to 0} + \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} - \frac{\frac{\sin x}{x}}{2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\sin x}{2}}\right)}$$

$$= \frac{-1}{4}.$$

<u>Ex 9</u> : 1) TVI ...

2) on pose $f(x) = 1 - x - \sin(x)$, f est C^0 sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

on a $\begin{cases} f(0) = 1 > 0 \\ f(\pi/6) = 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} < 0 \text{ car } \pi > 3. \end{cases}$

*) f dérivable sur $]0, \pi/6[$, et $\forall x \in]0, \pi/6[$, $f'(x) = -1 - \cos(x) < 0$

donc est strictement décroissante sur $]0, \pi/6[$.

TVI $\Rightarrow \exists!\ c \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$, $f(c) = 0$.

Ex 9 : 3) •) f C^0 sur $\mathbb{R}$,

•) f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 4 > 0$.

donc f str $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

*) $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[$

$=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists!\, a \in \mathbb{R}$, $f(a) = 0$.

Mq $a \in]0, 1[$, on a $\begin{cases} f(0) = -5 < 0 \\ f(1) = 3 > 0 \end{cases}$ donc $a \in]0, 1[$.

L BARKANY

Ex 10 :

$$g(x) = \lambda f(0) + \gamma f(1) - (\gamma+\lambda) f(x).$$

*) g C^0 sur $[0,1]$ (car f l'est).

*) $g(0) = \gamma\big(f(1) - f(0)\big) \neq 0$

$g(1) = \lambda\big(f(0) - f(1)\big) = -\frac{\lambda}{\gamma} g(0) \neq 0$

donc $g(1)\,g(0) = -\frac{\lambda}{\gamma}\big(g(0)\big)^2 < 0.$

TVI $\Rightarrow \exists\, c \in]0,1[,\ g(c) = 0.$